

УДК 519.65

Обобщенный алгоритм сферической сплайн - интерполяции

Басараб Михаил Алексеевич

basarab@bmstu.ru

SPIN-код: 9224-5685

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Аннотация. Предложен новый алгоритм непрерывной интерполяции последовательности ориентаций твердого тела. В отличие от подходов, основанных на сферической линейной интерполяции между двумя или несколькими положениями, задаваемыми единичными кватернионами ориентации (SLERP, SQUAD и др.), алгоритм позволяет использовать финитные базисные функции, отличные от кусочно-линейной, в частности, обладающие различной степенью гладкости. В качестве примера рассмотрена атомарная базисная функция, обеспечивающая бесконечную дифференцируемость интерполяционной кривой на единичной сфере. В отличие от метода кумулянтных базисов, алгоритм имеет форму, близкую к традиционной сплайн-интерполяции, что позволяет реализовать разработанные технологии кратномасштабного анализа, квазиинтерполяции и др. С вычислительной точки зрения алгоритм имеет сложность, сопоставимую с другими методами сферической интерполяции и может быть широко использован в задачах компьютерной анимации, биомеханики, робототехники, траекторного анализа.

Ключевые слова: сферическая интерполяция, кватернион, B-сплайн, атомарная функция

A generalized algorithm for spherical spline interpolation

Basarab Mikhail Alekseevich

basarab@bmstu.ru

SPIN-code: 9224-5685

BMSTU, Moscow, Russia

Abstract. A new algorithm for continuous interpolation of a sequence of rigid body orientations is proposed. Unlike approaches based on spherical linear interpolation between two or more consecutive orientations defined by unit quaternions (SLERP, SQUAD, etc.), the algorithm allows the use of compactly supported basis functions other than piecewise linear ones, in particular, those with varying degrees of smoothness. As an example, an atomic basis function is considered, ensuring infinite differentiability of the interpolation curve on the unit sphere. Unlike the cumulative basis B-spline method, the algorithm has a form close to traditional spline interpolation, enabling the implementation of developed technologies for multiresolution analysis, quasi-interpolation, and others. From a computational standpoint, the algorithm has a complexity comparable to other methods of spherical interpolation and can be widely used in computer animation, biomechanics, robotics, and trajectory analysis et al.

Keywords: spherical interpolation, quaternion, B-spline, atomic function

Введение. Задача аппроксимации и интерполяции вращательного движения твердого тела первоначально возникла в сфере анимации, впоследствии найдя применение в таких областях как спутниковая навигация, биомеханика, робототехника и др. [1]. На практике, как правило, используется два способа описания вращений: с помощью углов Эйлера и аппарата кватернионов [2]. Одним из основных недостатков представления вращений с помощью углов Эйлера и матриц поворота является существенное влияние порядка вращений на конечный результат, в то время как одному и тому же повороту соответствуют лишь два кватерниона вращения. Преимуществом описания вращений на основе кватернионов является простота алгебраических операций при выполнении серии последовательных поворотов и богатый набор возможных методов аппроксимации и интерполяции, что обусловило особенно широкое использование этого подхода при решении задач, требующих не только реалистичного восстановления промежуточных значений углов поворота, но и обеспечения требуемой гладкости эволюций объекта в трехмерном пространстве в зависимости от его угловых скоростей и ускорений.

Наиболее распространенным методом сферической кватернионной интерполяции является SLERP [3]. В связи с тем, что построенная с его помощью траектория является кусочно-гладкой, для обеспечения непрерывности производных в узловых точках были разработаны другие подходы: алгоритмы SQUAD, SPRING, методы на основе окружностной интерполяции, алгоритмы на основе кривых Безье [3]. Был также разработан универсальный метод сферической аппроксимации и интерполяции на основе кумулянтных базисов [4], позволяющий использовать различные наборы базисных функций. К сожалению, указанные подходы характеризуются довольно высокой сложностью используемого математического аппарата, а также высокими вычислительными затратами оценки производных, кривизны аппроксимативной кривой и других параметров. Это является наиболее существенной трудностью по сравнению с обычной интерполяцией положения твердого тела в трехмерном пространстве, которая довольно легко и эффективно может быть реализована с помощью методов полиномиальной, сплайн- и вейвлет-аппроксимации.

В данной работе предлагается подход, который комбинирует алгоритм SLERP с обычной интерполяцией на основе B-сплайнов и методом кумулянтных базисов. Приведен пример такой замены на основе известной бесконечно дифференцируемой атомарной функции $ur(x)$ [5]. Новый алгоритм обладает с одной стороны преимуществом простоты, наглядности и интерпретируемости SLERP, а с другой — гибкостью метода кумулянтных базисов с возможностью применения различных аппроксимативных функций.

Материалы и методы. Процедура SLERP для единичных кватернионов q, p при $t \in [0,1]$, определяется следующим образом:

$$\text{SLERP}(q, p; t) = q(q^* p)^t = (qp^*)^{1-t} p = (pq^*)^t q = p(p^* q)^{1-t}, \quad (1)$$

где $*$ обозначает сопряженный кватернион.

Также для SLERP можно использовать тригонометрическое представление

$$\text{SLERP}(q, p; t) = \frac{q \sin[(1-t)\theta] + p \sin(t\theta)}{\sin \theta}, \quad \cos \theta = qp. \quad (2)$$

На основе суперпозиции и последовательного использования этой процедуры строится известный алгоритм SQUAD, а также алгоритмы на основе сплайнов Безье и кубических В-сплайнов [3].

Данные подходы оказываются достаточно сложными в вычислительном плане, поэтому исследователи разрабатывали альтернативные методы, среди которых наибольшую известность вследствие своей универсальности получил метод кумулянтных базисов [4]. Кумулянтный базис позволяет строить различные кватернионные кривые, свойства которых определяются выбором исходных координатных функций (базис на основе полиномов Бернштейна, базис Эрмита — Безье, базис на основе В-сплайнов Шенберга n -го порядка, базисы на основе атомарных функций, базисы на основе теоремы отсчетов и ее обобщений [5] и др.). Несмотря на свою очевидную гибкость и универсальность, метод кумулянтных базисов также имеет ряд недостатков. Так, форма кватернионной кривой зависит от выбранного направления обхода. При использовании финитных базисов с высокой кратностью покрытия (например, кубических В-сплайнов), нахождение неопределенных коэффициентов интерполяции требует решения нелинейных систем алгебраических уравнений. В связи со всем этим, SLERP остается по-прежнему наиболее распространенным методом кватернионной аппроксимации.

Рассмотрим далее новый подход, позволяющий объединить преимущества SLERP (простота и интуитивность представления) и метода кумулянтных базисов (гибкость в плане выбора базиса, обеспечивающего требуемые свойства аппроксимативной кривой).

Пусть задана последовательность N равноотстоящих единичных кватернионов $Q = (q_0, q_1, \dots, q_{N-1})$. Угол между последовательными кватернионами q_i, q_{i+1} равен $\theta = \arccos(q_i q_{i+1})$. Тогда можно показать, что последовательность операций SLERP (2) для всего набора Q можно представить в виде интерполяционного ряда

$$\text{SLERP}_\Sigma(Q; t) = \sum_{i=0}^{N-1} q_i \frac{\sin((1-|t-i|)^+ \theta)}{\sin \theta} = \sum_{i=0}^{N-1} q_i \frac{\sin[B_1(t-i)\theta]}{\sin \theta}, \quad t \in [0, N-1], \quad (3)$$

где выражение

$$B_1(t) = (1-|t|)^+ = \begin{cases} 1-|t|, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geq 1 \end{cases} \quad (4)$$

представляет собой базисную функцию финитного В-сплайна 1-го порядка. Последовательность его сдвигов дает разложение единицы:

$$B_1(t-i) = (1-|t-i|)^+ \equiv 1. \quad (5)$$

Представление (3), в отличие от последовательности выражений (2), позволяет установить соответствие между SLERP и обычной интерполяцией функции f по базису линейных В-сплайнов:

$$f(t) \sim \sum_{i=0}^{N-1} f(i) B_1(t-i),$$

если ввести понятие «сферического» линейного В-сплайна:

$$BS_1(t; \theta) = \frac{\sin[B_1(t)\theta]}{\sin \theta}. \quad (6)$$

В-сплайны являются неединственными финитными функциями, обладающими свойством (5). Пусть дана монотонная финитная («достаточно хорошая» с точки зрения функциональных свойств) функция $f(t)$, удовлетворяющая условиям

$$\text{supp } f(t) = [0, 1]; \quad f(0) = 0; \quad f(1-t) + f(t) = 1. \quad (7)$$

Тогда, очевидно, что аналогично (5), будем иметь

$$f(1-|t-i|) \equiv 1. \quad (8)$$

Это позволяет формально определить обобщенный интерполяционный ряд для последовательности Q в виде

$$\text{GSLERP}_\Sigma(Q; f; t) = \sum_{i=0}^{N-1} q_i \frac{\sin[f(1-|t-i|)\theta]}{\sin \theta}, \quad t \in [0, N-1]. \quad (9)$$

Соответствующая сферическая базисная функция будет выражаться как

$$\varphi(t; \theta) = \frac{\sin[f(1-t)\theta]}{\sin \theta}. \quad (10)$$

Легко видеть, что

$$\text{GSLERP}_\Sigma(Q; f; j) = q_j, \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Выбирая подходящую базисную функцию f , можно добиться удовлетворения необходимых требований к интерполяционной кривой, например, обеспечения ее необходимой гладкости. В следующем разделе будет приведен пример на основе бесконечно-дифференцируемой атомарной функции $up(t)$ [5].

Результаты. В качестве первого очевидного примера рассмотрим иллюстрацию аналога кратномасштабного свойства В-сплайнов на трехмерной

сфере. Как известно [6], линейный В-сплайн (4) можно разложить по своим трем масштабированным и сдвинутым копиям:

$$B_1(t) = \frac{1}{2}B_1(2t-1) + B_1(2t) + \frac{1}{2}B_1(2t+1). \quad (11)$$

Аналогичные (11) разложения верны для В-сплайнов любого порядка и являются основой кратномасштабного анализа, на основе которого строятся различные типы вейвлетов [6].

Можно показать справедливость кратномасштабного свойства для сферической базисной функции (6):

$$BS_1(t; \theta) = BS_1\left(2t-1; \frac{\theta}{2} \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \theta}\right) + BS_1\left(2t; \frac{\theta}{2}\right) + BS_1\left(2t+1; \frac{\theta}{2} \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \theta}\right). \quad (12)$$

Очевидно, что при $\theta \rightarrow 0$, выражение (12) переходит в (11). Свойство (12) позволяет реализовать кратномасштабный сферический вейвлет-анализ по аналогии со случаем обычных В-сплайнов [7].

В качестве другого примера рассмотрим построение бесконечно-гладких интерполяционных кривых на основе атомарных функций, подобно тому, как это было реализовано в случае кумулянтных кватернионных базисов [5]. Простейшей такой функцией является функция $up(t)$ с носителем $[-1, 1]$, удовлетворяющая функционально-дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{2}up'(t) = up(2t+1) - up(2t-1). \quad (13)$$

Тогда функция $f(t) = up(1-t)$ удовлетворяет условиям (7), а соответствующая сферическая атомарная базисная функция в соответствии с (10) имеет вид

$$\varphi_{up}(t; \theta) = \frac{\sin[up(t)\theta]}{\sin \theta}. \quad (14)$$

Помимо обеспечения бесконечной дифференцируемости интерполяционной кривой, атомарная функция обеспечивает подобие производных самой функции, в отличие от кратномасштабного свойства В-сплайнов.

Заключение. Предложенный в работе обобщенный алгоритм сферической линейной интерполяции, GSERP, позволяет установить явную аналогию между обычной и сферической линейными интерполяторами на основе В-сплайнов. Это, в свою очередь, позволяет переформулировать некоторые свойства В-сплайнов на их сферический аналог, в частности, кратномасштабность, а также реализовать квазиинтерполяцию. Дальнейшей перспективой является построение аналогов вейвлет-базисов на основе сферических В-сплайнов. Кроме того, в отличие от SLERP, обобщенный алгоритм является

достаточно гибким и позволяет использовать различные типы базисных функций, в той или иной степени наиболее подходящих для конкретных практических применений. Приведенный пример атомарной базисной функции показывает возможность достаточно простого построения интерполяционных кривых произвольной степени гладкости, в том числе бесконечной.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

- [1] Shoemake K. Animating Rotation with Quaternion Curves. ACM SIGGRAPH Computer Graphics, 1985, vol. 19, no. 3, pp. 245–254. <https://doi.org/10.1145/325165.325242>
- [2] Журавлев В.Ф. *Основы теоретической механики*. Москва, Физматлит, 2001, 320 с.
- [3] Dam E., Koch M., Lillholm M. Technical Report DIKU-TR-98/5. Department of Computer Science, University of Copenhagen, 1998.
- [4] Kim M.-J., Kim M.-S., Shin S.Y. A General Construction Scheme for Unit Quaternion Curves with Simple High Order Derivatives. Proc. of SIGGRAPH '95, Los Angeles, 1995, pp. 369–376. <https://doi.org/10.1145/218380.218486>
- [5] Басараб М.А. Сферическая интерполяция на основе атомарных накопленных базисов. *Электромагнитные волны и электронные системы*, 2007, № 1, с. 35-39.
- [6] Чуи К. *Введение в вэйвлеты*. Москва, Мир, 2001, 412 с.
- [7] Antoine J.-P., Vandergheynst P. Wavelets on the 2-Sphere: A Group-Theoretical Approach. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 1999, vol. 7, no. 3, pp. 262–291. <https://doi.org/10.1006/acha.1999.0272>