

На правах рукописи

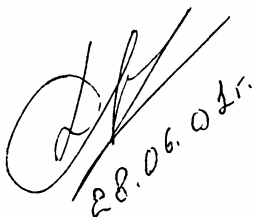
Лагозинский Сергей Антонович

УДК 531.22.8

Разработка численных методов определения
напряженно-деформированного состояния и
критических нагрузок для нелинейных задач
механики стержней

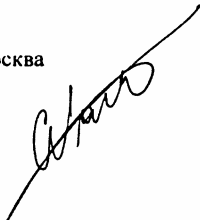
01.02.06 – Динамика, прочность машин,
приборов и аппаратуры

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук



28.06.02г.

Москва



2001

Работа выполнена в Московском Государственном Техническом Университете им

Н.Э.Баумана

Научный руководитель — доктор технических наук
профессор Светлицкий В.А.

Официальные оппоненты - доктор технических наук
профессор Парцевский В. В.

р технических наук

ссор Усюкин В. И.

1575811
Лагозинский С
Разработка численных
методов определения
2001 0.00

ББ "Библиот"

3

14.30 час. на заседании диссертационного
рственного Техническом Университете им
ианская д.5.

еке МГТУ им Н.Э.Баумана

г.

1575811



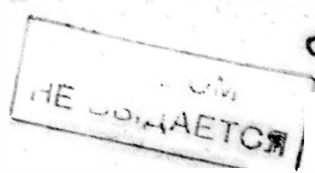
Дронг В.И.



1575811

Лагозинский С.А. Разработк

Общая характеристика работы



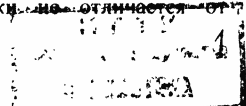
ность темы. Элементы конструкций, сводимые к расчетной схеме стержня, имеют очень широкое распространение во многих отраслях техники. Они используются в качестве упругих элементов приборов: частотные датчики, низкочастотные фильтры, аккумуляторы механической энергии (рис.1), в мехатронных системах, в системах виброзащиты объектов (рис.2). Высоконадежная работа приборов, машин и конструкций, а также точность показаний приборов, использующих стержни в качестве чувствительных элементов, в большой степени зависит от точности их расчета с учетом условий работы и механических свойств самих элементов. Упругие стержневые элементы в реальных условиях могут находиться в различных силовых полях, например, в поле силы тяжести на ускоренно движущемся объекте, на вибрирующем основании, в электромагнитном поле и т.д., что может привести к существенному изменению их статических и динамических характеристик, и как следствие этого, к отказам конструкции (например, из-за потери статической или динамической устойчивости) и к погрешностям в показаниях приборов.

Очень часто упругие стержневые элементы должны работать при больших перемещениях точек осевой линии, например, в системах виброзащиты (рис.2) Это требует при их расчете решения нелинейных уравнений равновесия. Особенно сложными являются задачи расчета амортизаторов, состоящих из пространственно-криволинейных стержней (рис.2.г,д) при больших "сжатиях" амортизатора. При расчете надо определить допустимые величины сжатия амортизатора, при которых в стержневых элементах не появляются пластические деформации.

Одной из основных причин потери работоспособности конструкций, машин и приборов, содержащих стержневые элементы, является статическая и динамическая потеря устойчивости.

Проблема устойчивости упругих элементов конструкций не является новой. Этой проблемой занимались и занимаются многие известные механики Н.А. Алфутов, В.В.Болотин, Х.Лейпгольц, Е.Л.Николаи, В.И.Феодосьев, Г.Циглер, и многие другие, как отечественные, так и зарубежные исследователи. Многие вопросы, возникающие при анализе устойчивости стержней, подробно изучены. Разработаны алгоритмы определения критических нагрузок как для прямолинейных стержней, так и для криволинейных стержней, но в основном при предположении, что форма осевой линии стержня при критическом состоянии (нагруженном состоянии), практически не отличается от

1575811



естественной ^{не} (нагруженной) формы осевой линии стержня. Для прямолинейных стержней это предположение сомнений не вызывает. Так как осевая линия стержня до нагружения и после нагружения осевыми силами остается до потери устойчивости прямой (рис.3). Несколько иначе обстоит дело при анализе устойчивости криволинейного стержня. например, плоского криволинейного стержня (имеется ввиду потеря устойчивости с выходом из плоскости), нагруженного силами, линии действия которых лежат в плоскости осевой линии стержня (рис.4). При нагружении криволинейного стержня форма его осевой линии не остается неизменной. При этом возможны два случая.

В первом случае при критическом состоянии форма осевой линии стержня мало отличается от естественной. Во втором осевая линия стержня при критическом состоянии очень сильно отличается от исходной. Основное внимание уделялось решению задач, относящихся к первому случаю, которые рассматриваются без учета малых изменений геометрии осевой линии стержня, т.е. когда предполагается, что малым изменением геометрии осевой линии на напряженное состояние стержня можно пренебречь. Такое предположение существенно упрощает исследование устойчивости криволинейных стержней, так как не требует рассмотрения полной системы уравнений, в которую входят неизвестные внутренние силы и моменты, а также изменение кривизн, перемещения точек осевой линии стержня и углы поворота связанных осей. Из уравнений равновесия (без учета изменения геометрии осевой линии) определяются внутренние силы и моменты, которые входят в коэффициенты линейных уравнений равновесия или малых колебаний стержня после потери устойчивости, используемые при определении критических нагрузок.

Во втором случае геометрические параметры осевой линии стержня существенно изменяются, что требует для определения напряженно-деформированного состояния соответствующего критическому состоянию, рассматривать полную систему нелинейных уравнений равновесия с последующим использованием решения в линеаризованных уравнениях равновесия и малых колебаний стержня после потери устойчивости, которые дают возможность определить критические нагрузки.

В зависимости от поведения сил при нагружении (например, "мертвые" или "следящие" силы) возможна потеря устойчивости стержня, как статическая, так и динамическая. При нагружении стержня как "мертвыми" так и "следящими" силами сказать, какая потеря устойчивости возможна без проведения численного решения невозможно.

Поэтому большой практический интерес представляет разработка численных методов исследования устойчивости криволинейных упругих стержневых элементах, когда критическое состояние существенно отличается от естественного состояния. В этом случае необходимо решать систему нелинейных уравнений равновесия стержня. Этим методам посвящена данная диссертация. И в этом заключается ее актуальность.

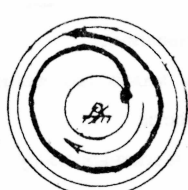
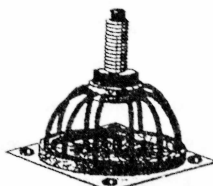


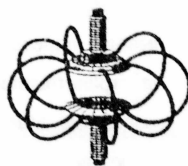
Рис. 1



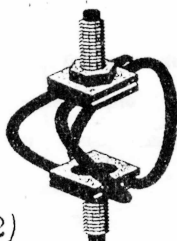
a)



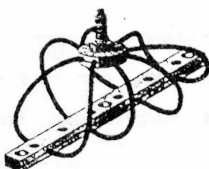
б)



в)



2)



г)

Рис. 2

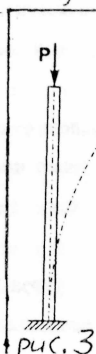


Рис. 3

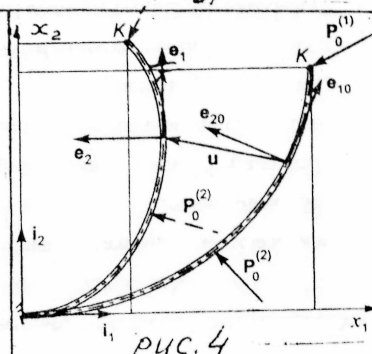


Рис. 4

Цель диссертации выполненной в соответствии с планом работ кафедры РК-5 МГТУ им. Н.Э.Баумана по госбюджетным темам заключается в:

- 1) Разработке численных методов решения прикладных задач механики стержней;
- 2) Разработке численных методов определения напряженно-деформированного состояния криволинейных стержней для геометрически нелинейных задач статики;
- 3) Разработке численных методов исследования устойчивости равновесия стержня и определения критических нагрузок;
- 4) Разработке численных методов расчёта амортизаторов, конструкции которых включают стержневые элементы.

Методика исследования В диссертации используются как теоретические методы, так и методы численного исследования систем нелинейных уравнений равновесия пространственно-криволинейных стержней. Численные методы решения систем линеаризованных уравнений равновесия и малых колебаний стержней относительно

критического состояния. Методы численного определения собственных значений при произвольных нагрузках.

Научная новизна результатов, полученных в диссертации заключается в:

- разработке методов численного решения систем нелинейных уравнений равновесия криволинейных стержней при произвольных нагрузках (распределенные и сосредоточенные, мертвые и следящие силы и моменты, и их комбинации);
- выводе линеаризованных уравнений равновесия и уравнений малых колебаний пространственно-криволинейных стержней после потери устойчивости;
- разработке методов численного определения критических консервативных нагрузок для криволинейных стержней;
- разработке численных методов расчёта жесткостных характеристик амортизаторов при больших деформациях упругих стержневых элементов с учетом потери устойчивости в "малом" и в "большом".
- разработке численных методов определения комплексных собственных значений для уравнений малых колебаний, зависящих от статического напряженно-деформированного состояния стержня при нагружении консервативными и неконсервативными нагрузками.

Достоверность полученных результатов обеспечивается корректным выбором математических моделей, точными численными методами решения уравнений, сопоставлением результатов для частных случаев с ранее известными.

Практическая ценность результатов полученных в диссертации заключается:

- в разработке численных методов решения нелинейных уравнений равновесия пространственно-криволинейных стержней, что позволяет определять напряженно-деформированное состояние упругих стержневых элементов, необходимых для определения "прочности" и долговечности при проектировании.
- в разработке численных методов определения жесткостных характеристик амортизаторов и критических нагрузок, знание которых необходимо при расчете амортизаторов.

Внедрения. Результаты, полученные в диссертации используются в учебном процессе в дисциплинах профессиональной подготовки инженеров-механиков-исследователей (специальность 071100)

Апробация работы Основные результаты обсуждались

- на научных семинарах кафедры РК-5 ("Прикладная механика") МГТУ им. Н.Э.Баумана.

- на V Международном симпозиуме "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред". Россия. Ярополец. 1999г.

Публикации. Основное содержание диссертации опубликовано в двух печатных работах.

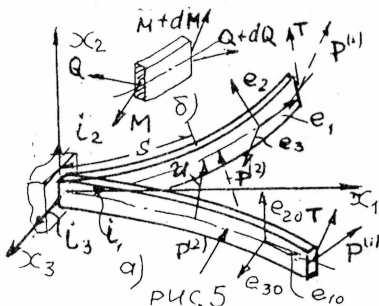
Объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы из 39 наименований. Работа содержит 146 страниц компьютерного текста, и 51 рисунок.

Основное содержание работы

В введении приводится краткий обзор публикации близких к теме диссертации, формулируются основные задачи и дается краткое содержание глав.

Первая глава диссертации посвящена конспективному выводу общих нелинейных уравнений равновесия пространственно-криволинейных стержней, которые в

последующих главах используются для исследования статической и динамической устойчивости стержней. На рис.5а показан стержень до и после нагружения сосредоточенными силами $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ и сосредоточенным моментом T . При выводе уравнений используются две системы ортогональных координат: 1)неподвижная (декартова) с базисом $\{i_j\}$ и 2)подвижная, связанная с базисом $\{e_j\}$.



Рассматривая равновесие элемента стержня (рис. 5б), можно получить следующие уравнения (приведенные к безразмерной форме)

$$Q'_0 + q_0 \times Q_0 + P_0 = 0, \quad (1)$$

$$M'_0 + \alpha_1 \times Q_0 + e_1 \times M_0 + T_0 = 0, \quad (2)$$

$$L_1 \vartheta' + L \alpha_{00}^{(1)} - \alpha_0 = 0, \quad (3)$$

$$u'_0 + \alpha_0 \times u_0 + (l_{11} - 1) e_1 + l_{22} e_2 + l_{33} e_3 \quad (4)$$

$$M_0 = A (\alpha_0 - \alpha_{00}^{(1)}) \quad \vartheta_0 = (\vartheta_{10}, \vartheta_{20}, \vartheta_{30})^T \quad (5)$$

где Q_0, M_0 – вектора внутренних сил и моментов $Q_0 = \sum_{j=1}^3 Q_{j0} e_j$; $M_0 = \sum_{j=1}^3 M_{j0} e_j$;

Q_{10} – осевая сила, Q_{20} и Q_{30} – перерезывающие силы, M_{10} – крутящий момент, M_{20} и M_{30} – изгибающие моменты, $\kappa_{00}^{(1)}$ – вектор кривизн, компоненты которого характеризуют геометрию осевой линии стержня в ненагруженном состоянии; κ_0 – вектор кривизн, компоненты которого характеризуют геометрию осевой линии стержня в нагруженном состоянии; $\mathbf{P}$ и $\mathbf{T}$ соответственно векторы внешних сил и моментов, приложенных к стержню, $\mathbf{A}$ – диагональная матрица, элементы которой A_{ii} есть жесткости стержня на кручения A_{11} и изгиб (A_{22} , A_{33}). Моменты M_j связаны с приращениями кривизн соотношениями

$$M_j = A_{jj} (\kappa_{j0} - \kappa_{j00}) \quad (6)$$

Входящие в уравнение (3) матрицы L_1 и L равны

$$L_1 = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_2 \cos \vartheta_3 & 0 & -\sin \vartheta_2 \\ -\sin \vartheta_3 & 1 & 0 \\ \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 & 0 & \cos \vartheta_2 \end{bmatrix},$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_2 \cos \vartheta_3 - 1 & \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \cos \vartheta_1 + \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_1 & \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \sin \vartheta_1 - \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_1 \\ -\sin \vartheta_3 & \cos \vartheta_{10} \cos \vartheta_{30} - 1 & \cos \vartheta_3 \sin \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 & \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_3 & \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2 \cos \vartheta_1 - 1 \end{bmatrix}$$

где ϑ_j – углы поворота осей относительно их положения до нагружения, l_{ij} – элементы матрицы L . В общем случае $\mathbf{P}_i$ и $\mathbf{T}_i$ равны

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}^{(i)} \delta(\eta - \eta_i) + \mathbf{q} H(\eta - \eta_i) = 0 \quad \mathbf{T} = \sum_{v=1}^n \mathbf{T}^{(v)} \delta(\eta - \eta_v) + \mu H(\eta - \eta_i) = 0 \quad (7)$$

где δ – функция Дирака, H – функция Хевисайда, $\mathbf{P}^{(i)}$, $\mathbf{T}^{(v)}$ – собственно сосредоточенные силы и моменты, $\mathbf{q}$ и μ – распределенные силы и распределенные моменты. Система нелинейных уравнений (1) – (5) позволяет исследовать как задачи статики пространственных криволинейных стержней, так и задачи статической устойчивости, когда потеря устойчивости происходит относительно деформированного состояния, которое может весьма сильно отличаться от естественного ненагруженного состояния.

Во второй главе выводятся уравнения равновесия после потери устойчивости для общего случая, когда рассматривается устойчивость пространственно- криволинейных стержней, что позволяет получить наиболее точные уравнения для частных случаев, например для плоского криволинейного стержня. Из уравнений (1) – (5) получаем уравнения равновесия стержня при критическом состоянии и линеаризованные уравнения после потери устойчивости (считая, что имеет место потеря устойчивости в “малом”).

После потери устойчивости напряженно-деформированное состояние стержня изменится, поэтому

$$\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}^* + \mathbf{Q}, \quad \mathbf{M}_0 = \mathbf{M}^* + \mathbf{M}, \quad \kappa_0 = \kappa^* + \Delta\kappa, \quad \vartheta_{j0} = \vartheta_{j*} + \Delta\vartheta_j, \quad \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}^* + \Delta\mathbf{u} \quad (8)$$

где вектора и углы ϑ_{j*} со звездочкой характеризуют напряженно – деформированное критическое состояние стержня; векторы $\mathbf{Q}$, $\mathbf{M}$, $\Delta\kappa$, $\mathbf{u}$ и углы ϑ_j характеризуют изменение напряженно – деформированного состояния стержня после потери устойчивости. Если новое состояние равновесия близко к критическому, то компоненты векторов $\mathbf{Q}_j$, $\mathbf{M}_j$, $\Delta\kappa_j$, $\mathbf{u}_j$ и углы ϑ_j можно считать малыми величинами, поэтому их произведения являются величинами второго порядка малости и при получении линейных уравнений равновесия ими можно пренебречь.

После преобразований из системы уравнений (1) – (5) получаем две системы уравнений: 1)нелинейные уравнения равновесия стержня, соответствующие критическому состоянию:

$$\mathbf{Q}'_* + \kappa_* \times \mathbf{Q}_* + \mathbf{P}_* = 0, \quad \mathbf{M}'_* + \kappa_* \times \mathbf{M}_* + \mathbf{e}_{1*} \times \mathbf{Q}_* + \mathbf{T}_* = 0, \quad (9)$$

$$L_1 \vartheta'_* + L_* \kappa_0 - \kappa_* = 0, \quad \mathbf{u}'_* + \kappa_* \times \mathbf{u}_* + (l_{11*} - 1) \mathbf{e}_{1*} + l_{21*} \mathbf{e}_{2*} + l_{31*} \mathbf{e}_{3*} = 0,$$

$$\mathbf{M}_* = \mathbf{A} (\kappa_* - \kappa_{00}^{(1)})$$

2) линеаризованные уравнения равновесия стержня после потери устойчивости

$$\mathbf{Q}' + \mathbf{A}_\kappa \mathbf{Q} + \mathbf{A}_{Q*} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{M} + \Delta \mathbf{P} = 0, \quad \mathbf{M}' + \mathbf{A}_\kappa \mathbf{M} + \mathbf{A}_{M*} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{M} + \mathbf{A}_1 \mathbf{Q} + \Delta \mathbf{T} = 0, \\ \Delta \vartheta' + \mathbf{A}_\kappa \Delta \vartheta - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{M} = 0, \quad \mathbf{u}' + \mathbf{A}_\kappa \mathbf{u} + \mathbf{A}_1 \vartheta = 0. \quad (10)$$

где

$$\mathbf{A}_{Q*} = \begin{bmatrix} 0 & Q_{3*} & -Q_{2*} \\ -Q_{3*} & 0 & Q_{1*} \\ Q_{2*} & -Q_{1*} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_\kappa = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa_{3*} & \kappa_{2*} \\ \kappa_{3*} & 0 & -\kappa_{1*} \\ \kappa_{2*} & \kappa_{1*} & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{M*} = \begin{bmatrix} 0 & M_{3*} & -M_{2*} \\ -M_{3*} & 0 & M_{1*} \\ M_{2*} & -M_{1*} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Входящие в уравнение системы (10) приращения внешних сил и моментов (ΔP и ΔT) в общем случае зависят от поведения приложенных к стержню сил и моментов в процессе его деформирования. Во второй главе рассматриваются консервативные силы, поэтому их приращения в связанных осях отличны от нуля. (Приращения следящих сил в связанных осях равны нулю)

Систему уравнений (10) можно представить в виде

$$Z' + AZ = b \quad (Z = (Q, M, \vartheta, u)^T) \quad (11)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} A_x & A_{Q*} A^{-1} & 0 & 0 \\ A_1 & A_{M*} A^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -A^{-1} & A_x & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & A_x \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Приращения векторов ΔP , ΔT при потере устойчивости для произвольных сил линейно зависят от векторов ϑ и u . Поэтому, уравнение (11) является однородным. Например, если в сечениях $\eta = \eta_1$ и $\eta = \eta_2$ приложены сосредоточенные силы и моменты, то для вектора b можно получить следующее выражение

$$b = C^{(1)} Z \delta (\eta - \eta_1) + C^{(2)} Z \delta (\eta - \eta_2)$$

Для частного случая плоского криволинейного стержня при нагружении силами, линии действия которых лежат в плоскости осевой линии стержня имеем следующие уравнения. Уравнения критического состояния:

$$\begin{aligned} Q'_{*1} - Q_{*2} \kappa_{*3} + P_{*1} &= 0, & Q'_{*2} + Q_{*1} \kappa_{*3} + P_{*2} &= 0, \\ M'_{*3} + Q_{*2} + T_{*1} &= 0, & Q'_{*3} - M_{*3} / A_{33} &= 0, \\ u'_{*1} - \kappa_{*3} u_{*2} + l_{11*} - l &= 0, & u'_{*2} + \kappa_{*3} u_{*1} - l_{21*} &= 0, & M_{*3} &= A_{33} (\kappa_{*3} - \kappa_{300}). \end{aligned} \quad (12)$$

Для частного случая, когда ΔP_1 , ΔP_2 , ΔT_3 зависят только от u_1 , u_2 и ϑ_3 , а ΔP_3 , ΔT_1 , ΔT_3 зависят только от u_3 , ϑ_1 и ϑ_2 из уравнения (11) получаем две системы уравнений. В скалярной форме записи эти уравнения имеют вид

1. Уравнения равновесия в плоскости осевой линии стержня

$$Q'_1 + Q_2 / A_{33} M_3 + \kappa_{*3} Q_2 + \Delta P_1 (u_1, u_2, \vartheta_3) = 0, \quad (13)$$

$$Q'_2 + Q_1 / A_{33} M_3 + \kappa_{*3} Q_1 + \Delta P_2 (u_1, u_2, \vartheta_3) = 0, \quad M'_3 + Q_2 + \Delta T_3 (u_1, u_2, \vartheta_3) = 0.$$

$$\Delta \vartheta'_3 - M_3 / A_{33} = 0, \quad u'_1 - \kappa_{*3} u_2 = 0, \quad u'_2 + \kappa_{*3} u_1 - \Delta \vartheta_3 = 0.$$

2. Уравнения равновесия относительно плоскости $X_1 \text{ O } X_2$

$$Q'_3 - Q_2 / A_{11} M_1 + Q_1 / A_{22} M_2 + \Delta P_3 (u_3, \vartheta_1, \vartheta_2) = 0,$$

$$M'_1 - M_3 / A_{22} M_2 - \kappa_{*3} M_2 + \Delta T_1 (u_3, \vartheta_1, \vartheta_2) = 0,$$

$$M'_2 - M_3 / A_{11} M_1 + \kappa_{*3} M_1 - \kappa_{*1} M_3 - Q_3 - \Delta T_2 (u_3, \vartheta_1, \vartheta_2) = 0, \quad (14)$$

$$\Delta \vartheta'_1 - M_1 / A_{11} - \kappa_{*3} \Delta \vartheta_2 = 0, \quad \Delta \vartheta'_2 - M_2 / A_{22} - \kappa_{*3} \Delta \vartheta_1 = 0,$$

$$u'_3 + \Delta \vartheta_2 = 0, \quad M_{*3} = A_{33} (\kappa_{*3} - \kappa_{300}).$$

Системы уравнений (13) и (14) позволяют соответственно определить критические внешние нагрузки: 1) при которых стержень при потере устойчивости остается плоским (система (13)) и 2) критические нагрузки, при которых имеет место потеря устойчивости с выходом из плоскости (система (14)).

Численное решение уравнений (12), (13), (14) и определение критических консервативных нагрузок приводится в четвертой главе.

В третьей главе диссертации изложена теория и численные методы исследования динамической устойчивости пространственно-криволинейных стержней. Выводятся уравнения малых колебаний стержня относительно критического, которое определяется из нелинейных уравнений равновесия (приведенных во второй главе) для общего случая, когда стержень нагружен сосредоточенными силами и моментами. Получающуюся систему линеаризованных уравнений малых колебаний можно представить в виде векторного уравнения.

$$A^{(1)} \frac{\partial^2 Z}{\partial \tau^2} + A^{(2)} \frac{\partial Z}{\partial \tau} + \frac{\partial Z}{\partial \eta} + A^{(3)} Z = b \quad (15)$$

$$\text{где } Z = (Q, M, \Delta \vartheta, u)^T$$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -E \\ 0 & 0 & -J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha_1 E \\ 0 & 0 & -\alpha_2 E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} A_{\kappa} & A_Q A^{-1} & C^{(1)} & C^{(2)} \\ A_1 & (A_{\kappa} + A_M A^{-1}) & C^{(3)} & C^{(4)} \\ 0 & -A^{-1} & A_{\kappa} & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & A_{\kappa} \end{bmatrix};$$

J -диагональная матрица, элементы которой являются "физические" моменты инерции (безразмерные) элемента стержня единичной длины; α_1, α_2 — соответственно коэффициенты силы и момента вязкого сопротивления.

Из уравнения (15) для частного случая плоского криволинейного стержня можно получить два уравнения (при $\Delta P_1, \Delta P_2, \Delta T_3$ зависящих от $u_1, u_2, \Delta \vartheta_3$, и $P_3, \Delta T_1$ и ΔT_2 зависящих от $u_3, \Delta \vartheta_1, \Delta \vartheta_2$)

1) уравнения малых колебаний в плоскости осевой линии стержня

$$B^{(1)} \frac{\partial^2 \mathbf{Z}^{(1)}}{\partial \tau^2} + B^{(2)} \frac{\partial \mathbf{Z}^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathbf{Z}^{(1)}}{\partial \eta} + B^{(3)} \mathbf{Z}^{(1)} = \mathbf{b}_1 \quad (16)$$

где $\mathbf{Z}^{(1)} = (Q_1, Q_2, M_3, \Delta \vartheta_3, u_1, u_2)^T$ $\mathbf{b}_1 = (\Delta P_1, \Delta P_2, \Delta T_3, 0, 0, 0)^T$

$$B^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -J_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_{*3} & Q_{*2}/A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -\kappa_{*3} & 0 & Q_{*1}/A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\kappa_{*3} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \kappa_{*3} & 0 \end{bmatrix}$$

2) уравнения малых колебаний относительно плоскости.

$$C^{(2)} \frac{\partial^2 \mathbf{Z}^{(2)}}{\partial \tau^2} + C^{(2)} \frac{d\mathbf{Z}^{(2)}}{d\tau} + \frac{d\mathbf{Z}^{(2)}}{d\eta} + C^{(3)} \mathbf{Z}^{(2)} = \mathbf{b}_2 \quad (17)$$

где $\mathbf{Z}^{(2)} = (Q_3, M_1, M_2, \Delta\vartheta_1, \Delta\vartheta_2, u_3)^T$ $\mathbf{b}_2 = (\Delta P_3, \Delta T_1, \Delta T_2, 0, 0, 0)^T$

$$C^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -J_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & -Q_{*2}/A_{11} & Q_{*1}/A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (M_{*3}/A_{22}) + \kappa_{*3} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (M_{*3}/A_{11}) + \kappa_{*3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/A_{11} & 0 & 0 & -\kappa_{*3} & 0 \\ 0 & 0 & -1/A_{22} & 0 & \kappa_{*3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Элементы матрицы в уравнениях (15)-(17) зависят от напряженно-деформированного состояния стержня, которое устанавливается из решения уравнений малых колебаний (определяя комплексные собственные значения для каждого уровня нагружения стержня).

Полагая $\mathbf{Z}^{(0)}$ в уравнениях (16) и (17) равным

$$\mathbf{Z}^{(i)} = (\mathbf{Z}^{(1)}_{0i}(\eta) + i \mathbf{Z}^{(2)}_{0i}(\eta)) e^{(\alpha + i\beta)\tau} \quad (18)$$

получаем два совместных уравнения относительно $\mathbf{Z}^{(1)}_{0i}$ и $\mathbf{Z}^{(2)}_{0i}$, которые можно объединить в одно векторное уравнение. Например для $\mathbf{Z}^{(1)}$ имеем

$$\dot{\mathbf{Y}}_0 + D\mathbf{Y}_0 = C^{IV} \mathbf{Y}_0 \delta_1 + C^{IV} \mathbf{Y}_0 \delta_2 \quad (19)$$

где $\mathbf{Y}_0 = (Z_{01}^{(1)}, Z_{01}^{(2)})^T$

$$C^{IV} = \begin{bmatrix} (\alpha^2 - \beta^2)B^{(1)} + \alpha B^{(2)} + B^{(3)} & -(2\alpha\beta B^{(1)} + \beta B^{(2)}) \\ -(2\alpha\beta B^{(1)} + \beta B^{(2)}) & (\alpha^2 - \beta^2)B^{(1)} + \alpha B^{(2)} + B^{(3)} \end{bmatrix}$$

Решение неоднородного уравнения (19)

$$\mathbf{Y}_0(\eta) = K(\eta, \alpha, \beta) \mathbf{C} + G(\eta, \eta_1) C^{IV}(\eta_1) \mathbf{Y}_0(\eta_1) H_1 + G(\eta, \eta_2) C^{IV}(\eta_2) \mathbf{Y}_0(\eta_2) H_2 \quad (20)$$

где $K(\eta, \alpha, \beta)$ – фундаментальная матрица решений однородного уравнения $G(\eta, \eta_j)$ матрицы Грина, H_j – функции Хевисайда. Решение (20) (имеется ввиду, конечно, численное решение) должно удовлетворять краевым условиям, что позволяет получить систему линейных однородных уравнений, определитель которой зависит от α и β . Из условия равенства определителя нулю находим комплексные собственные значения

$$\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$$

в зависимости от приложенных к стержню нагрузок, что позволяет определить критические силы. Численное определение критических нагрузок изложено в пятой главе

В четвертой главе приводятся результаты численного решения нелинейных уравнений равновесия плоских криволинейных стержней и определяются из линеаризованных уравнений равновесия (глава 2) после потери устойчивости критические "мертвые" нагрузки. На рис.6.а,б показаны стержни, которые рассматривались при численном решении. Бралась следующие размерные параметры: $l=0.2\text{м}$, $h=0.004\text{м}$, $b=0.002\text{м}$. (стержень прямоугольного сечения, стальной). Силы $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ (рис. 6) мертвые. Безразмерные значения жесткостей $A_{11}=0.275$, $A_{22}=0.25$, $A_{33}=1$

Результаты решения нелинейных уравнений равновесия стержня (12) при последовательном нагружении представлены на рис.7.а,б. На рис.7.а,б показаны равновесные формы стержня нагруженного силами $P = \pm P_{e20}$ и $P = -P_{e10}$ для ряда значений безразмерной силы P . Каждое состояние равновесия проверялось на устойчивость (решались уравнения (16) и (17)). Крестиками отмечены критические состояния равновесия, при которых стержень теряет устойчивость с выходом из плоскости.

На рис. 8.а показан амортизатор, состоящий из криволинейных плоских стержней. Амортизатор работает в режиме заданных перемещений. При сжатии на величину $u_{x_2a}=0.38$ стержни теряют устойчивость в "малом" (рис. 8.б). При дальнейшем сжатии осевая линия стержня (рис.8.в) становится пространственно-криволинейной кривой. На рис. 8.г показан амортизатор с пространственно-криволинейными стержнями. При сжатии амортизатора на величину $u_{x_2a}=0.449$ стержни теряют устойчивость в "большом". Новое равновесное состояние показано на рис. 8.д и 8.е.

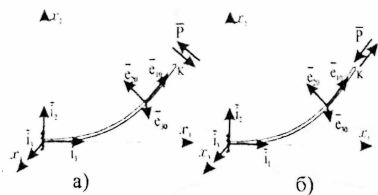


рис.6

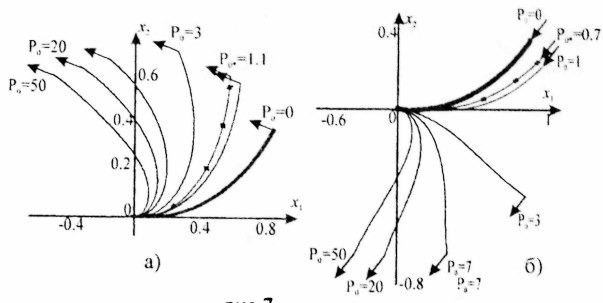
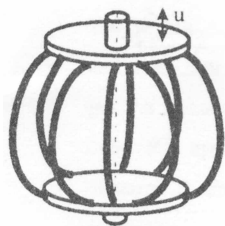
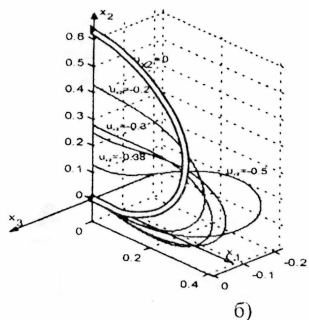


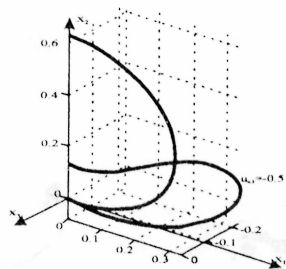
рис.7



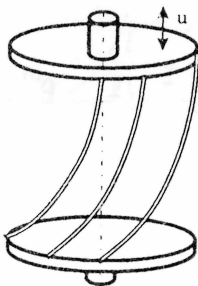
а)



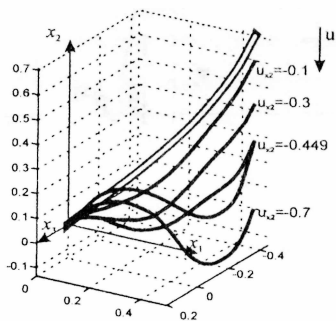
б)



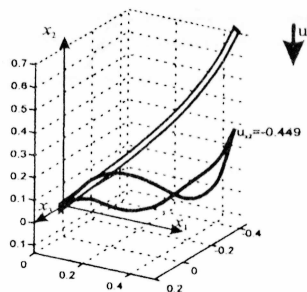
в)



г)

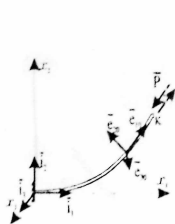


д)

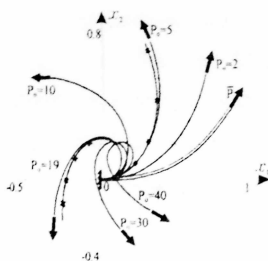


е)

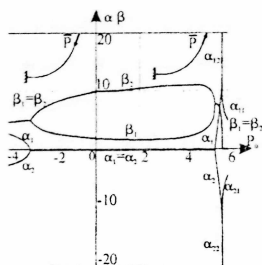
рис.8



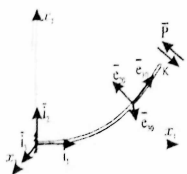
а)



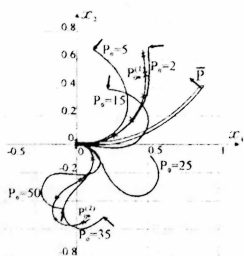
б)



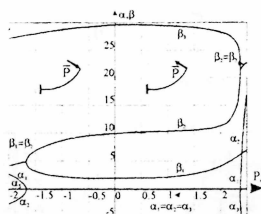
в)



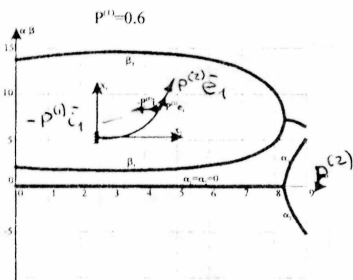
г)



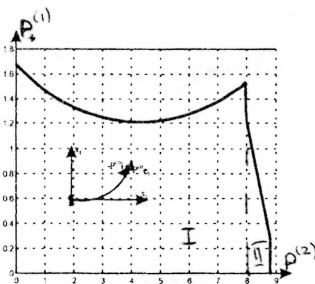
д)



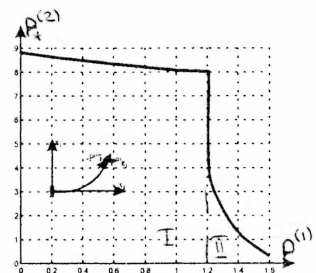
е)



ж)



з)



и)

Рис. 9

В пятой главе приводятся результаты численного решения нелинейных уравнений равновесия плоских криволинейных стержней (12) при мертвых и следящих силах. Критические нагрузки определяются из уравнений малых колебаний стержня относительно состояния равновесия (16). Рассмотрены плоские криволинейные стержни, нагруженные следящими силами (рис.9.а,б) и мертвой и следящей силой (рис.9.ж). Например на рис.9.в,г показана форма равновесия стержня при разных $|P_0|$. Формы, отмеченные крестиком соответствуют критическим формам равновесия $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ соответственно критические силы, при которых стержень теряет устойчивость относительно плоскости и в плоскости). На рис.9.д,е приведены графики изменений действительных и мнимых частей двух первых комплексных собственных значений в зависимости от силы P_0 . При следящей силе P_0 происходит динамическая потеря устойчивости относительно плоскости типа флаттера. На рис.9.ж приведены графики изменений действительных и мнимых частей двух первых комплексных собственных значений при нагружении стержня мертвой силой $P^{(1)}$ и следящей силой $P^{(2)}$ (рис.9.а,б) На рис.9.з приведены графики зависимостей критической мертвой силы $P_1^{(1)}$ от следящей силы $P^{(2)}$ при $A_{11}=0.48$, $A_{22}=0.5$, $A_{33}=1$. В интервале изменения $P^{(2)}$ ($0 \leq P^{(2)} \leq 7.97$ - область I) стержень при увеличении силы $P^{(1)}$ теряет устойчивость по Эйлеру. Для интервала изменения $P^{(2)}$ ($7.97 \leq P^{(2)} \leq 8.8$ - область II) имеет место динамическая потеря устойчивости. На рис. 9.и область I соответствует динамической потере устойчивости, а область II - статической. Т.е. при нагружении стержня мертвыми и следящими силами определить критические сочетания этих сил возможно, только рассматривая малые колебания стержня относительно состояния равновесия ("динамическим" методом).

Основные выводы.

1. Приведены нелинейные уравнения равновесия пространственно-криволинейного стержня, нагруженного произвольными силами (распределенными, сосредоточенными, мертвыми, следящими).
2. Изложен алгоритм приближенного численного решения нелинейных уравнений равновесия плоского криволинейного стержня, нагруженного произвольными силами, линии действия которых лежат в плоскости осевой линии стержня.
3. Получены линеаризованные уравнения равновесия и уравнения малых колебаний пространственно-криволинейного стержня после потери устойчивости.
4. Разработаны алгоритмы численного определения консервативных критических нагрузок для плоских криволинейных стержней при потере устойчивости в плоскости осевой линии стержня и относительно этой плоскости.
5. Разработан алгоритм численного расчета нелинейных жесткостных характеристик амортизаторов, содержащих стержневые элементы.
6. Разработаны численные методы определения комплексных собственных значений для уравнений малых колебаний относительно критического состояния равновесия при нагружении стержня консервативными и неконсервативными силами.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. Буда-Красновский С.В., Лагозинский С.А., Светлицкий В.А. Устойчивость плоской спирали // Вестник МГТУ. Машиностроение.- 1999.- №1 С.84-91
2. Буда-Красновский С.В., Лагозинский С.А., Светлицкий В.А. Статическая и динамическая устойчивость плоских криволинейных стержней // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред, Тезисы докладов 5 Международного симпозиума.- М., 1999 С.26-27
3. Светлицкий В.А., Лагозинский С.А. Исследование устойчивости плоского криволинейного стержня, нагруженного следящими силами // Вестник МГТУ. Машиностроение.- 2000.- №2.- С.93-105

Подписано к печати 3.09.2000 Заказ № 110

Объем 1,0 п.л. Тираж 100 экз.

Типография МГТУ им.Н.Э.Баумана