

На правах рукописи

Сидоров Дмитрий Александрович

**СТАБИЛИЗАЦИЯ АФФИННЫХ СИСТЕМ
ОГРАНИЧЕННЫМ УПРАВЛЕНИЕМ**

Специальность 05.13.01 – Системный анализ, управление и
обработка информации

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2004



Работа выполнена в Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор Крищенко А.П.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор Яковенко Г.Н.
кандидат физико-математических наук, доцент Фомичев В.В.

Ведущая организация:

Институт Проблем Управления им. В.А.Трапезникова РАН

Защита состоится "16" *декабря* 2004 года в 11 часов 00, на заседании диссертационного совета Д 212.141.15 при Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана по адресу 107005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Отзыв на автореферат в двух экземплярах, заверенный печатью организации, просим высылать по адресу: 107005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, МГТУ им. Н.Э. Баумана, ученому секретарю совета Д 212.141.15.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Автореферат разослан " " 2004 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук, профессор

Волков И.К.

Б-ка МГТУ им. Н.Э. Баумана



160097

Сидоров Д.А. Стабилизация

Актуальность проблемы. Одной из задач, рассматриваемых теорией управления, является задача стабилизации положения равновесия. Она заключается в поиске управления в виде обратной связи по состоянию, при подстановке которого в систему положение равновесия становится бы асимптотически устойчивым. В технических приложениях величина управления является ограниченной по модулю или по компонентам. Поэтому представляет интерес решение задачи стабилизации с учетом этих ограничений на управление.

Во многих случаях удастся получить управление, стабилизирующее положение равновесия лишь локально, и возникает задача оценки области стабилизируемости при наличии ограничений на управление.

Другой задачей является построение обратной связи, стабилизирующей положение равновесия глобально. Однако при наличии ограничений на управление существующие методы глобальной стабилизации применимы лишь к узким классам систем.

Наиболее значительные результаты по глобальной стабилизации ограниченным управлением получены для линейных систем. Для линейной системы ограниченное, глобально стабилизирующее управление существует тогда и только тогда, когда система стабилизируема и действительные части собственных чисел матрицы системы неположительны, и известен метод построения такого управления.

Для нелинейных систем получены более частные результаты. Методы решения задачи стабилизации ограниченным управлением для нелинейных систем можно разделить на две группы. К первой группе относятся методы построения глобально стабилизирующего управления, т.е. методы получения обратной связи, стабилизирующей систему при любых начальных условиях. Ко второй группе относятся методы стабилизации в большом, т.е. методы получения обратной связи, стабилизирующей систему для начальных условий из некоторой области, и получения оценки этой области.

В отличие от линейного случая, для нелинейных систем неизвестен критерий глобальной стабилизируемости ограниченным управлением. В работах, посвященных глобальной стабилизации, приводятся разные достаточные условия, при выполнении которых можно построить ограниченное, глобально стабилизирующее управление. При этом предлагаемые методы обычно применимы к довольно узким классам нелинейных систем.

Таким образом, в настоящее время задача глобальной стабилизации нелинейных систем ограниченным управлением решена лишь для узких



классов систем. Поэтому представляет интерес разработка новых методов глобальной стабилизации и расширение классов нелинейных систем, допускающих такую стабилизацию.

В отличие от задачи глобальной стабилизации, задача стабилизации в большом при наличии ограничений на управление может быть решена для достаточно широкого класса нелинейных систем. В большинстве таких методов для оценки области стабилизируемости используется аппарат функций Ляпунова. При этом оценка ищется в виде области, ограниченной поверхностью уровня функции Ляпунова. Различные методы отличаются способами построения ограниченного управления и выбора функции Ляпунова.

Важным критерием для сравнения различных методов является объем области стабилизируемости. Среди существующих методов не удается выделить метод, который давал бы больший объем области стабилизируемости для всех систем. Поэтому представляет интерес получение новых методов стабилизации в большом, которые могут дать лучшую оценку области стабилизируемости для определенных классов систем.

Целью работы является разработка методов построения ограниченных обратных связей, позволяющих глобально или в большом стабилизировать положение равновесия аффинных систем, а также методов оценки области стабилизируемости.

Методы исследования

В диссертации применяются методы дифференциальных уравнений, теории устойчивости, дифференциальной геометрии и геометрической теории управления.

Научная новизна

Для аффинных систем, допускающих преобразование к регулярно каноническому виду, разработан метод стабилизации ограниченным управлением. Получены условия применимости разработанного метода для глобальной стабилизации и стабилизации в большом.

Решена задача стабилизации в большом с помощью ограниченного управления для систем Ван-Дер-Поля, Ресслера и для системы, описывающей угловое движение космического аппарата вокруг центра масс.

На примере системы Ресслера проведен сравнительный анализ оценок областей стабилизируемости, полученных предлагаемым методом и другими методами стабилизации в большом.

Для аффинных систем со скалярным управлением, допускающих преобразование к нерегулярному каноническому виду, предложен метод синтеза ограниченного управления. Получены условия, при выполнении которых построенное управление позволяет для любых начальных условий

привести систему в окрестность положения равновесия, ограниченную заданной поверхностью уровня функции Ляпунова.

Полученные результаты являются новыми.

Достоверность результатов подтверждена доказательствами и результатами математического моделирования.

Практическая и теоретическая ценность

Результаты, полученные в диссертации, позволяют решать задачи глобальной стабилизации или стабилизации в большом для аффинных систем с помощью ограниченной обратной связи, а также получать оценки области стабилизируемости. Полученные стабилизирующие управления позволяют учитывать ограничения, допускают оценку области стабилизируемости, и могут быть использованы в технических приложениях.

На защиту выносятся:

- 1) полученные семейства стабилизирующих управлений и функций Ляпунова для линейных систем с нулевыми собственными числами и способ обеспечения выполнения ограничения на управление;
- 2) метод синтеза ограниченной обратной связи для аффинных систем, допускающих преобразование к регулярному каноническому виду, и условия его применимости для глобальной стабилизации и стабилизации в большом;
- 3) метод синтеза ограниченной обратной связи для аффинных систем со скалярным управлением, допускающих преобразование к нерегулярному каноническому виду, и условия, при выполнении которых полученное управление для любых начальных условий приводит траекторию системы в окрестность положения равновесия, ограниченную заданной поверхностью уровня функции Ляпунова.

Апробация результатов работы

Результаты диссертационной работы докладывались автором на VI международном семинаре "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления" в ИПУ РАН в 2000 г., на Всероссийском научно-исследовательском семинаре "Нелинейная динамика и управление" на факультете ВМК МГУ в 2003 г, на одиннадцатой международной конференции "Математика, компьютер, образование" в 2004 г.

Работа поддерживалась грантом РФФИ 99-01-00863 и грантом РФФИ 01-01-06115 (МАС).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 4 статьях и 2 тезисах выступлений на конференциях.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав, выводов и списка литературы. Диссертация изложена на 103 страницах, содержит 58 рисунков. Библиография содержит 33 наименования.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приводится постановка задачи стабилизации аффинных систем ограниченным управлением. Обсуждаются подходы к решению этой задачи, а также возникающие при этом трудности.

В первой главе приводится обзор результатов, полученных для решения задачи стабилизации ограниченным управлением.

В разделе 1.1 рассматриваются некоторые результаты, полученные для линейных систем.

В разделе 1.2 приводятся результаты, полученные для задачи глобальной стабилизации нелинейных систем ограниченным управлением. Рассматриваются подходы, основанные на методе "обратного хода", использовании функций Ляпунова для систем с управлением (E.D. Sontag), масштабировании управления (P. Morin, R.M. Murray, L. Praly).

Особое внимание уделяется методу масштабирования, так как этот метод применяется в дальнейшем. Суть метода заключается в следующем. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (1)$$

где $x \in R^n$, $u \in R^m$, $f \in C^1(R^n \times R^m)$, $f(0) = 0$. Масштабирование управления для (1) производится следующим образом. Строится однопараметрическое семейство стабилизирующих управлений $u(x, \mu)$, которые, вообще говоря, не являются ограниченными. Для этого семейства управлений находится семейство функций Ляпунова $V(x, \mu)$ с тем же параметром, т.е. управлению с заданным значением параметра соответствует функция Ляпунова замкнутой системы с тем же значением параметра. Затем задается закон изменения параметра в виде функции от x . При выполнении особых условий управление с изменяющимся параметром остается стабилизирующим. В некоторых случаях с помощью введения такого закона изменения параметра можно добиться требуемых свойств управления, например ограниченности.

При выполнении определенных условий, закон изменения параметра может быть задан в виде

$$\mu(x) = \begin{cases} \mu_0, & \text{если } V(x, \mu_0) \leq 1, \\ \text{решение } V(x, \mu) = 1, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (2)$$

где $\mu_0 > 0$ — некоторая константа.

Непосредственное применение этого метода для стабилизации нелинейных систем затруднительно ввиду трудности поиска семейств $V(x, \mu)$ и $u(x, \mu)$ с необходимыми свойствами. Однако для линейных систем такие семейства известны, что позволяет построить ограниченное глобальное стабилизирующее управление. Однако величина, которой ограничено получающееся в результате управление, неизвестна.

В разделе 1.3 рассматриваются методы решения задачи стабилизации в большом, описанные в работах В.А. Каменецкого, А.П. Крищенко.

Во второй главе рассматривается задача стабилизации аффинных систем со скалярным управлением, допускающих преобразование к регулярному каноническому виду, с помощью ограниченной обратной связи. Для построения стабилизирующего управления используется метод масштабирования. Предлагаются семейства стабилизирующих управлений и функций Ляпунова для метода масштабирования.

В разделе 2.1 рассматривается задача построения ограниченного стабилизирующего управления для аффинных систем

$$\dot{z} = A(z) + B(z)u, \quad (3)$$

где $z \in R^n$, $A(z) = (a_1(z), \dots, a_n(z))^T$, $A(0) = 0$, $B(z) = (b_1(z), \dots, b_n(z))^T$, $a_i(z), b_i(z) \in C^\infty(R^n)$, $i = \overline{1, n}$.

Среди аффинных систем выделяются системы, допускающих преобразование к каноническому виду

$$\dot{x}_1 = x_2, \dots, \dot{x}_{n-1} = x_n, \dot{x}_n = f(x) + g(x)u. \quad (4)$$

путем замены переменных $z = \Phi(x)$. Предполагается, что система (4) регулярна, т.е. $g(x) \neq 0 \forall x \in R^n$, и начало координат является положением равновесия системы при $u = 0$, т.е. $f(0) = 0$.

На управление u накладывается ограничение

$$|u| \leq u^*, \quad (5)$$

где $u^* > 0$ — известная константа.

Введением вспомогательного управления

$$w = f(x) + g(x)u \quad (6)$$

система (4) приводится к виду:

$$\dot{x}_1 = x_2, \dots, \dot{x}_{n-1} = x_n, \dot{x}_n = w. \quad (7)$$

Наложим на управление w ограничение $|w| \leq u^{**}$.

Для системы (7) ограниченное глобально стабилизирующее управление w можно построить с помощью метода масштабирования. При этом необходимо обеспечить выполнение ограничения на w . Следующие два раздела посвящены решению этой задачи.

В разделе 2.2 получен более удобный, по сравнению с полученным в работах Р. Morin, R.M. Murray, L. Praly, вид для семейств управлений $u(x, \mu)$ и функций Ляпунова $V(x, \mu)$ для линейных систем с нулевыми собственными числами. Результат сформулирован в виде следующих теорем.

Теорема 2.1. Параметрическое семейство управлений $u_s(x, \mu)$ для линейной системы с нулевыми собственными числами матрицы системы имеет вид

$$u_s(x, \mu) = \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{k}_j}{\mu^{n-j+1}} x_j,$$

где $\tilde{k}_j$ – константы, вычисляемые с помощью рекуррентных соотношений.

Теорема 2.2. Параметрическое семейство функций Ляпунова $V_s(x, \mu)$ для замкнутой линейной системы с нулевыми собственными числами матрицы системы имеет вид

$$V_s(x, \mu) = \eta \sum_{i,j=1}^n \frac{V_{s,ij}}{\mu^{2n-i-j+2}} x_i x_j,$$

где $V_{s,ij}$ – константы, вычисляемые с помощью рекуррентных соотношений, η — параметр, с помощью которого можно регулировать величину управления.

Поскольку собственные числа системы (7) нулевые, то результаты теорем 2.1 и 2.2 справедливы для системы (7).

В разделе 2.3 показано, как задать значение параметра η , чтобы для управления $u_l(x) = u_s(x, \mu(x))$ выполнялось ограничение $|u_l(x)| \leq u^{**}$, где u^{**} — известная константа, а $\mu(x)$ вычисляется по (2). С помощью теорем 2.1 и 2.2 найдена зависимость максимума модуля управления $u_l(x)$ от параметра η

$$|u_l(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{\eta}} \left(\sum_{i,j=1}^n \hat{V}_{ij} \tilde{k}_i \tilde{k}_j \right)^{1/2}$$

откуда следует, что при

$$\eta = \frac{1}{(u^{**})^2} \sum_{i,j=1}^n \hat{V}_{ij} \tilde{k}_i \tilde{k}_j, \quad (8)$$

где $\hat{V}_{ij}$ — элементы матрицы V_s^{-1} , $V_s = \|V_{s,ij}\|_{n \times n}$, выполняется ограничение $|u_i(x)| \leq u^{**}$.

Таким образом, для системы (7), найдено глобально стабилизирующее управление $w = u_i(x)$, удовлетворяющее ограничению $|w| \leq u^{**}$ для любого $u^{**} > 0$.

В разделе 2.4 показано, при каких условиях можно так задать ограничение $|w| \leq u^{**}$, чтобы управление

$$u = \frac{w - f(x)}{g(x)} \quad (9)$$

для системы (4) удовлетворяло ограничению (5). Полученный результат сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема 2.3. Если для любого x из $U \subseteq R^n$ найдутся $m_1, m_2 \in R$, такие что

$$-u^* < m_1 \leq f(x)/g(x) \leq m_2 < u^*,$$

и $g_1 \in R$, такое что $0 < g_1 \leq g(x)$, то из $|w| \leq u^{**}$, где

$$u^{**} = g_1 \min \{u^* + m_1, u^* - m_2\}, \quad (10)$$

следует $|u| \leq u^*$.

Таким образом, если условия теоремы выполняются для $U = R^n$, то получаем глобальное стабилизирующее управление для системы (4), удовлетворяющее ограничению (5). Сделав обратную замену переменных, получаем стабилизирующее управление для исходной аффинной системы (3).

Рассмотрен пример решения задачи глобальной стабилизации предложенным методом.

В разделе 2.5 рассматривается случай, когда условия теоремы 2.3 выполняются лишь в некоторой окрестности U положения равновесия. В этом случае с помощью предлагаемого метода возможна стабилизация ограниченным управлением в большом. Приводятся два способа получения оценки области стабилизируемости для рассматриваемого случая.

Для получения оценки области стабилизируемости U' достаточно найти функцию Ляпунова для замкнутой системы, имеющую неположительную производную в силу системы. Требуемым свойством обладает функция $V_s(x, \mu_0)$. Следовательно, оценку можно получить в виде

$$U' = \{x | V_s(x, \mu_0) < 1\}.$$

Параметр μ_0 подбирается таким образом, чтобы обеспечить выполнение условий теоремы 2.3 на U' и увеличить объем области стабилизируемости. При таком способе получения оценки управление w является линейным в области стабилизируемости.

При использовании второго способа оценка строится в виде $\{x|\mu(x) \leq C\}$, где C — константа. Значение константы C задается так, чтобы обеспечить выполнение условий теоремы 2.3 на U' и увеличить объем области стабилизируемости. Если задать $\mu_0 < C$, то управление w уже не будет линейным на U' . В этом случае возможность варьировать параметр μ_0 на интервале $(0; C)$ позволяет влиять на динамику замкнутой системы.

Приводится пример построения ограниченного стабилизирующего управления и оценки области стабилизируемости для уравнения Ван-Дер-Поля

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 0.6x_2(1 - x_1^2) - x_1 + u \end{cases}$$

с ограничением на управление $|u| \leq 1$.

В разделе 2.6 проводится сравнение предлагаемого в диссертации метода стабилизации с другими методами на примере системы Ресслера с управлением:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -z_2 - z_3, \\ \dot{z}_2 &= z_1 + az_2 + u, \\ \dot{z}_3 &= c + z_3(z_1 - b). \end{aligned} \tag{11}$$

Результаты сравнения показали, что объем области стабилизируемости, полученный с помощью предложенного в диссертации метода, всего на 6% меньше лучшего из полученных результатов.

Также приводится сравнение оценок, полученных с помощью предлагаемого метода и с помощью численного моделирования. Моделирование проводилось следующим образом. Было сформировано множество начальных условий для системы Ресслера. Это множество формировалось из узлов сетки с постоянным шагом, покрывающей окрестность положения равновесия. Для каждого начального условия проводилось интегрирование системы до момента времени $t = 50$. Интегрирование проводилось численно с относительной погрешностью 10^{-6} . Начальные условия, для которых выполнялось условие попадания в окрестность радиуса 0.001, т.е.

$$|z_i(50) - z_{1,i}^0| < 0.001, i = \overline{1, 3},$$

и ограничение на управление

$$\max_{t \in [0, 50]} |u(t)| \leq 1,$$

признавались принадлежащими области стабилизируемости. Сравнение полученных результатов показало, что предлагаемый в диссертации метод дает хорошую оценку области стабилизируемости для данного примера.

В разделе 2.7 рассматривается случай, когда функция $f(x)$ в регулярной системе (4) имеет вид $f(x) = l(x) + q(x)$, где

$$l(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i,$$

и коэффициенты a_i таковы, что собственные числа матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

имеют неположительные действительные части. В том случае, если функция $q(x)$ такова, что множество $\{x \mid |q(x)/g(x)| \leq M\}$ имеет больший объем, чем множество $\{x \mid |f(x)/g(x)| \leq M\}$, применение предлагаемого в данном разделе метода может позволить увеличить объем области стабилизируемости.

Введением вспомогательного управления $w = q(x) + g(x)u$ система (4) приводится к виду

$$\dot{x}_1 = x_2, \dots, \dot{x}_{n-1} = x_n, \dot{x}_n = l(x) + w. \quad (12)$$

Глобально стабилизирующее ограниченное управление для системы (12) можно построить с помощью метода масштабирования. Однако в силу того, что собственные числа системы (12) ненулевые, не удастся воспользоваться полученным ранее результатом для поиска параметра η , обеспечивающего выполнение ограничения $|w| \leq u^{**}$.

Предположим, что значение параметра η , обеспечивающее выполнение ограничения $|w| \leq u^{**}$, найдено. Стабилизирующее управление для системы (12) может быть найдено по формуле

$$u = \frac{w - q(x)}{g(x)}. \quad (13)$$

Для обеспечения ограниченности управления можно воспользоваться результатом следующей теоремы, доказанной в диссертации.

Теорема 2.4. Если найдутся $m_1, m_2, g_1 \in R$, такие что для любого x из $U \subseteq R^n$

$$-u^* < m_1 \leq q(x)/g(x) \leq m_2 < u^*,$$

и $0 < g_1 \leq g(x)$, то из $|w| \leq u^{**}$, где

$$u^{**} = g_1 \min \{u^* + m_1, u^* - m_2\},$$

следует $|u| \leq u^*$.

Недостатком предложенного метода учета линейных слагаемых является трудность поиска параметра η , обеспечивающего выполнение ограничения $|w| \leq u^{**}$. Однако засчет учета линейной части функции $f(x)$ для некоторых систем удается улучшить оценку области стабилизируемости. Приводится пример такого улучшения оценки для уравнения Ван-дер-Поля.

В третьей главе рассматривается метод синтеза стабилизирующей обратной связи для аффинных систем с векторным управлением, допускающих приведение к регулярному каноническому виду.

В разделе 3.1 рассматривается задача стабилизации для аффинных систем

$$\dot{z} = A(z) + B(z)u,$$

где $z \in R^n$, $u \in R^r$, $A(z) \in R^n$, $A(0) = 0$, $B(z)$ — матрица $n \times r$, $a_i(z), b_{ij}(z) \in C^\infty(R^n)$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, r}$, допускающих с помощью замены переменных $z = \Phi(x)$ преобразование к каноническому виду

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n_1-1} &= x_{n_1}, \\ \dot{x}_{n_1} &= f_1(x) + \sum_{j=1}^r g_{1j}(x)u_j, \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n_1+\dots+n_{r-1}+1} &= x_{n_1+\dots+n_{r-1}+2}, \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n_1+\dots+n_r-1} &= x_{n_1+\dots+n_r}, \\ \dot{x}_{n_1+\dots+n_r} &= f_r(x) + \sum_{j=1}^r g_{rj}(x)u_j. \end{aligned} \tag{14}$$

Обозначим $F(x) = (f_1(x), \dots, f_r(x))^T$, $G(x) = \|g_{ij}(x)\|_{r \times r}$. Предполагается, что система канонического вида (14) регулярна, т.е. $\det G(x) \neq 0$.

На управление накладывается ограничение вида

$$|u_i| \leq u_i^*, i = \overline{1, r}. \tag{15}$$

Введением вспомогательного управления $w = F(x) + G(x)u$ система (14) приводится к виду

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2, \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{n_1-1} &= x_{n_1}, \\
 \dot{x}_{n_1} &= w_1, \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{n_1+\dots+n_{r-1}+1} &= x_{n_1+\dots+n_{r-1}+2}, \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{n_1+\dots+n_r-1} &= x_{n_1+\dots+n_r}, \\
 \dot{x}_{n_1+\dots+n_r} &= w_r.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Система (16) распадается на линейные независимые системы вида (7), для которых ограниченное стабилизирующее управление уже найдено в главе 2. Обозначим

$$\hat{x}_i = (x_{n_1+\dots+n_{i-1}+1}, \dots, x_{n_1+\dots+n_i})^T,$$

$i = \overline{1, r}$. Стабилизирующее управление для i -ой системы будет иметь вид $w_i = u_{s,i}(\hat{x}_i, \mu_i(\hat{x}_i))$. При этом закон изменения параметра μ_i для i -ой системы будет вид

$$\mu_i(\hat{x}_i) = \begin{cases} 1, & V_{s,i}(\hat{x}_i, \mu_{0i}) \leq 1, \\ \text{решение } V_{s,i}(\hat{x}_i, \mu_i) = 1, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $V_{s,i}(x, \mu_i)$ — параметрическое семейство функций Ляпунова для i -ой системы. Таким образом, для системы (16) получаем глобально стабилизирующее управление $w = (w_1, \dots, w_r)^T$, удовлетворяющее ограничениям

$$|w_i| \leq w_i^*, i = \overline{1, r}. \tag{17}$$

Управление u для (14) можно выразить через вспомогательное управление w по формуле

$$u = G^{-1}(x)(w - F(x)). \tag{18}$$

В разделе 3.2 рассматривается задача обеспечения выполнения ограничения (15) на управление, вычисленное по формуле (18). Получены условия, выполнение которых позволяет задать ограничения на вспомогательное управление w таким образом, чтобы выполнялись ограничения (15). Эти условия отражены в следующей теореме.

Теорема 3.1. Пусть на $U \subseteq R^n$ выполнены следующие три условия.

1. Существуют $m_{1i}, m_{2i} \in R$:

$$-u_i^* < m_{1i} \leq \sum_{j=1}^r \hat{g}_{ij}(x) f_j(x) \leq m_{2i} < u_i^*,$$

где $i = \overline{1, r}$, $\hat{g}_{ij}(x)$ — элементы матрицы $G^{-1}(x)$.

2. Существуют $g_i \in R$: $\sum_{j=1}^r |\hat{g}_{ij}(x)| \leq g_i, i = \overline{1, r}$.

3. $|w_i| \leq w_i^*, w_i^* \in R, i = \overline{1, r}, \sum_{i=1}^r w_i^* \leq u^{**}$,

$$u^{**} = \min_{i=1, \dots, r} \left[\frac{1}{g_i} \min(u_i^* - m_{2i}, u_i^* + m_{1i}) \right].$$

Тогда при $x \in U$ $|u_i| \leq u_i^*, i = \overline{1, r}$.

Таким образом, если $U = R^n$, получаем ограниченное глобально стабилизирующее управление для (14).

Приводится пример построения глобально стабилизирующего управления.

В разделе 3.3 рассматривается случай, когда условия теоремы из раздела 3.2 выполняются в $U \subset R^n$. В этом случае рассматриваемый метод может быть применен для стабилизации в большом.

Приводятся два способа построения оценки области стабилизируемости.

В разделе 3.4 рассмотренный метод стабилизации применяется для решения задачи стабилизации углового положения космического аппарата ограниченным управлением. Система, описывающая угловое движение космического аппарата, имеет вид:

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \omega, \quad (19)$$

$$I\dot{\omega} + [\omega, I\omega] = u, \quad (20)$$

где $\Lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ — единичный кватернион, ω — вектор угловой скорости, $\circ$ — кватернионное умножение, I — матрица инерции космического аппарата, $[\cdot, \cdot]$ — векторное произведение, $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ — вектор управляющих моментов. На управляющие моменты наложены ограничения $|u_i| \leq u_i^*, i = \overline{1, 3}$.

Стабилизируется угловое положение, описываемое кватернионом $\Lambda^* = (1, 0, 0, 0)$, в области $\lambda_0 > 0$. Система (19)–(20) была приведена к виду

$$\ddot{\lambda} = \dot{L}L^{-1}\dot{\lambda} - LI^{-1} \left[L^{-1}\dot{\lambda}, IL^{-1}\dot{\lambda} \right] + LI^{-1}u, \quad (21)$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$,

$$L = 1/2 \begin{pmatrix} \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

Система (21) является системой вида (14). Для нее с помощью предлагаемого метода построено ограниченное стабилизирующее управление и получена оценка области стабилизируемости. Оценка получена для космического аппарата с матрицей инерции

$$\begin{pmatrix} 176068 & 0 & 0 \\ 0 & 408656 & 0 \\ 0 & 0 & 401248 \end{pmatrix}.$$

при ограничениях на управляющие моменты $|u_i| \leq 50$ Н/м.

В главе 4 рассматривается задача приведения системы в некоторую окрестность положения равновесия с помощью ограниченного управления. Эту задачу можно сформулировать следующим образом: требуется найти в виде обратной связи такое ограниченное управление u , чтобы существовала положительно определенная, радиально неограниченная, кусочно непрерывно дифференцируемая функция $V(x)$, имеющая при $V(x) \geq C_0$, $C_0 > 0$, отрицательную производную в силу замкнутой системы.

Предлагается метод решения этой задачи для аффинных систем, допускающих приведение к нерегулярному каноническому виду (4). Для обеспечения ограниченности управления используется метод масштабирования, при реализации которого предлагаются параметрические семейства управлений и функций Ляпунова. Метод позволяет заменить условие регулярности системы (4) рядом других условий и решать задачу для некоторых нерегулярных систем.

В разделе 4.1 приводится основная идея предлагаемого метода. Метод основан на использовании однопараметрического семейства положительно определенных, радиально неограниченных, дифференцируемых функций $V(x, \mu)$, удовлетворяющих для любого $\mu \in M$, $M = [\mu_0, +\infty)$, $\mu_0 > 0$, условию

$$\inf_{u \in R^m} \{L_F V(x, \mu) + u L_G V(x, \mu)\} < 0 \text{ при } x \neq 0, \quad (22)$$

где $F(x) = (x_2, \dots, x_n, f(x))^T$, $G(x) = (0, \dots, 0, g(x))^T$. Если для системы (4) известно такое семейство функций Ляпунова, то ему можно поставить в соответствие семейство управлений

$$u(x, \mu) = \begin{cases} 0, & \text{при } b(x, \mu) = 0, \\ -\frac{a(x, \mu) + \sqrt{a^2(x, \mu) + b^2(x, \mu)}}{b(x, \mu)}, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (23)$$

где $a(x, \mu) = L_F V(x, \mu)$, $b(x, \mu) = L_G V(x, \mu)$, Тогда для любого $\mu \in M$ производная $V(x, \mu)$ в силу системы (4), замкнутой управлением $u(x, \mu)$, будет отрицательна при $x \neq 0$. Для получения ограниченного управления используется метод масштабирования.

В разделе 4.2 получены условия, при выполнении которых полученное с помощью масштабирования управление решает поставленную задачу.

Обозначим $U = \{x | b(x) = 0, x \neq 0\}$.

Основной результат сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема 4.1. Предположим, что выполняются следующие условия.

1. $V(x, \mu) = \tilde{V}\left(\frac{x_1}{\mu^{p_1}}, \dots, \frac{x_n}{\mu^{p_n}}\right)$, где $\tilde{V}(y_1, \dots, y_n)$ — положительно определенная квадратичная форма, $p_1 > p_2 > \dots > p_n > 0$.
2. Для любого $\mu > 0$

$$\inf_{u \in R} \{L_F V(x, \mu) + L_G V(x, \mu)u\} < 0$$

при $x \neq 0$, где $F(x) = (x_2, \dots, x_n, f(x))^T$, $G(x) = (0, \dots, 0, g(x))^T$.

3. $\frac{\partial V(x, \mu)}{\partial \mu} < 0$ при $V(x, \mu) = 1$.
4. Существуют $\delta > 0, B > 0, \mu_0 > 0$, такие что $|L_G V(x, \mu(x))| \geq B$ при $x \notin U_\delta = \{x | |u(x, \mu(x))| \leq \delta, x \neq 0\}$, где

$$\mu(x) = \begin{cases} \mu_0, & \text{если } V(x, \mu_0) \leq 1, \\ \text{решение } V(x, \mu) = 1, & \text{иначе,} \end{cases}$$

5. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют $L > 0$, такое что $|f(x)/g(x)| \leq L$ при $x \notin U_\delta \cup \{x | \|x\| \leq \varepsilon\}$.

Тогда для любого $C_0 > 0$ существуют положительно определенная, радикально неограниченная, функция $W(x)$ и ограниченное управление $u(x)$, такие что $W(x)$ имеет отрицательную производную в силу замкнутой управлением $u(x)$ системы при $W(x) \geq C_0$.

Рассмотрен пример построения управления предлагаемым методом.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

В диссертации для линейных систем с нулевыми собственными числами получены семейства стабилизирующих управлений и функций Ляпунова для замкнутых систем. Решена задача стабилизации нулевого положения равновесия систем управлением, ограниченным заданной величиной.

Для аффинных систем со скалярным управлением, допускающих приведение к регулярному каноническому виду, предложен метод синтеза ограниченного стабилизирующего управления. Получены условия, при выполнении которых предложенный метод позволяет решить задачу глобальной стабилизации. Если полученные условия выполняются лишь на некотором множестве, то построенное управление позволяет решить задачу стабилизации в большом.

Полученный результат расширен на класс аффинных систем с векторным управлением, допускающих приведение к регулярному каноническому виду. С помощью предложенного метода решена задача стабилизации в большом углового положения космического аппарата.

Рассмотрен случай, когда аффинная система допускает приведение лишь к нерегулярному каноническому виду. Для таких систем предложен метод синтеза ограниченного управления. Получены условия, при выполнении которых построенное управление позволяет для любых начальных условий привести систему в окрестность положения равновесия, ограниченную заданной поверхностью уровня функции Ляпунова.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Стабилизация аффинных систем ограниченным управлением/ Р. Йохансон, А.П. Крищенко, Д.А. Сидоров, С.Б. Ткачев // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. – 2001. – № 2. – С. 31-44.
2. Сидоров Д.А., Ткачев С.Б. Стабилизация аффинных систем ограниченным управлением // Нелинейная динамика и управление: Сборник статей/Под ред. С.В. Емельянова, С.К. Коровина. – М., 2001. – Вып. 1. – С. 131-144.
3. Сидоров Д.А. Синтез ограниченного стабилизирующего управления для нелинейных систем с помощью параметрических семейств функций Ляпунова // Нелинейная динамика и управление: Сборник статей/Под ред. С.В. Емельянова, С.К. Коровина. – М., 2002. – Вып. 2 – С. 163-170.
4. Сидоров Д.А., Ткачев С.Б. Стабилизация нелинейных динамических систем с ограниченным управлением // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Тезисы докладов VI международного семинара. – М., 2000. – С. 100.
5. Сидоров Д.А. Сравнительный анализ методов стабилизации ограниченным управлением // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных процессов. – М., ВЦ РАН, 2003. – С. 104-115.
6. Сидоров Д.А. Стабилизация нелинейных систем с помощью параметрических семейств функций Ляпунова // Математика, компьютер, образование: Тезисы докладов одиннадцатой международной конференции. – Дубна, 2004. – С. 149.