

Мартыненко Сергей Иванович

УДК 519.632.4

**УНИВЕРСАЛЬНАЯ МНОГОСЕТОЧНАЯ ТЕХНОЛОГИЯ
ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
НА СТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ**

Специальность 05.13.18 — Математическое моделирование,
численные методы
и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2002

Работа выполнена в Центральном Институте Авиационного Моторостроения
им. П.И. Баранова

Научные руководитель: д. ф.-м. н. Слободкина Ф.А.

Официальные оппоненты: д. ф.-м. н., проф. М.П. Галанин
к. ф.-м. н., доц. И.Э. Иванов

Ведущая организация: Научно-исследовательский центр МГУ

НТБ МГТУ им. Н.Э. Баумана



1576443

Мартыненко С.И. Универсаль

с
у

1576443

Мартыненко С.

Универсальная много-

сеточная технология

2002

0.00

2002 года в 11³⁰ на заседании дис-
ском Государственном Техническом
107005 Москва, 2-я Бауманская ул., 5

отеке МГТУ.

адресу:

1576443

Волков И.К.

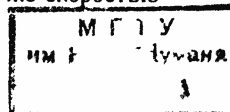
ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Бурное развитие вычислительной техники привело к значительному повышению роли вычислительного эксперимента в научных исследованиях и инженерных приложениях. В настоящее время имеется четкая тенденция к разработке стандартизированного программного обеспечения для решения многих прикладных задач. Для подобного обеспечения наибольший интерес представляют вычислительные алгоритмы, которые являются эффективными при решении широкого класса задач и позволяют эффективно распараллеливать вычисления.

В наиболее эффективных вычислительных алгоритмах, предназначенных для решения краевых задач, используется идея Р.П. Федоренко об аппроксимации длинноволновой части погрешности численного решения на грубых сетках. Первая алгоритмическая реализация идеи Р.П. Федоренко, получившая название «Классические Многосеточные Методы» (KMM), была основана на адаптации компонент алгоритма к решаемой краевой задаче. При оптимальной адаптации, KMM позволяют решать задачи, выполняя $O(\bar{N})$ арифметических операций. Данная привлекательная особенность KMM послужила причиной обширных исследований для дальнейшего совершенствования проблемно-зависимых компонент алгоритма. Поэтому KMM являются семейством методов и не могут быть представлены в виде фиксированного алгоритма. Попытки применения KMM в стандартизированном обеспечении сталкиваются с трудноразрешимой проблемой выбора наиболее эффективного для данного приложения варианта KMM .

Автором было показано, идея Р.П. Федоренко допускает вторую алгоритмическую реализацию, которая получила название «Универсальная Многосеточная Технология» (UMT). В отличие от KMM , UMT основана на адаптации краевой задачи к алгоритму. Таким образом, UMT состоит из двух частей: аналитической (адаптация краевых задач) и вычислительной (численное решение адаптированных задач при помощи оригинального многосеточного метода). Именно априорная адаптация краевых задач, а так же ряд новых конструктивных решений, позволили формализовать вычислительную часть технологии при сохранении скорости сходимости близкой к оптимальной. Основные достоинства UMT позволяют использовать разработанную технологию в стандартизированных программных продуктах, предназначенных для решения широкого класса прикладных задач.

Целью работы является разработка вычислительной технологии для численного решения краевых задач на структурированных сетках, которая обладает высокой степенью формализации и распараллеливания, а так же скоростью



сходимости близкой к оптимальной.

Научная новизна. УМТ является принципиально новой алгоритмической реализацией основополагающей идеи Р.П. Федоренко. Все компоненты УМТ (априорная адаптация краевых задач, многосеточная структура, проблемно-независимые операторы переходов, многосеточный цикл и т.д.) не имеют аналогов в КММ. И наоборот, все компоненты КММ не применимы в УМТ.

Разработанная УМТ применена к решению задач вычислительной гидродинамики (изотермические ламинарные и турбулентные течения в каналах, моделирование теплообмена при кипении криогенных жидкостей в обогреваемых каналах на основе квазигомогенной модели).

Практическая ценность работы. Разработанная УМТ предназначена для решения тех же задач гидро- и газодинамики, теплообмена, теплопередачи и т.д., что и КММ, но при этом не требует подгонки компонент вычислительной части для конкретного приложения с целью достижения высокой скорости сходимости. Программное обеспечение для решения двух- и трехмерных задач, написанное на алгоритмическом языке FORTRAN, полностью разработано, тщательно протестировано и оптимизировано с целью сокращения объема вычислений.

Апробация работы. Основные положения и результаты работы докладывались и обсуждались на Первой Российской Национальной Конференции по Теплообмену (Москва, 1994 г.), научном семинаре им. К.И. Бабенко (ИПМ им. М.В. Келдыша), на семинарах кафедры нефтегазовой и подземной гидромеханики РГУ Нефти и Газа им. И.М. Губкина и ЦИАМ им. П.И. Баранова, Второй Российской Национальной Конференции по Теплообмену (Москва, 1998 г.), XIII Всероссийской конференции "Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов для решения задач математической физики" (Пушино, 2000 г.), Всероссийской конференции молодых ученых "Проблемы исследований и разработок по созданию силовых и энергетических установок XXI века" (Москва, 2000 г.), Международной конференции "Двигатели XXI века", международной конференции "Оптимизация конечно-элементных приближений, сплайны и всплески" (OFEA-2001), XI Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС-2001).

Публикации. По результатам выполненных по теме диссертации исследований опубликовано семнадцать печатных работы. Отдельные разделы диссертации представлены в двух технических отчетах.

Структура и объем работы. Представленная диссертационная работа, состоящая из введения, пяти глав, заключения и списка литературы, изложена на 153 страницах машинописного текста и содержит 38 рисунков. Библиогра-

фия включает 79 наименование цитируемой литературы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении содержится обоснование актуальности работы, сформулированы цели и задачи работы, изложено краткое содержание диссертации, показаны ее научная и практическая ценность.

В первой главе приведен краткий анализ тенденций развития КММ, показаны их характерные недостатки, возникающие вследствие адаптации компонент алгоритма к решаемой краевой задаче. Дан обзор численных методов решения полных уравнений Навье–Стокса. Показана необходимость развития новых вычислительных алгоритмов для решения широкого класса задач.

Во второй главе приводится описание УМТ, которая основана на следующих принципах:

- *адаптация решаемых задач к многосеточной технологии.* Данная адаптация позволяет в значительной мере формализовать вычислительную часть технологии.
- *применение нескольких сеток на одном сеточном уровне для вычисления поправки.* Дополнительные сетки снижают требования, которые предъявляются к сглаживающей процедуре.
- *оригинальное построение грубых сеток.* Преимущество данного построения состоит в возможности получения проблемно-независимых операторов переходов.
- *использование только интегро-интерполяционного метода для построения разностных схем.* Этот метод является более предпочтительным, чем методы используемые в КММ, при решении ряда задач и имеет прямую физическую трактовку.

Основным компонентом УМТ является специальная последовательность подсеток самой мелкой вычислительной сетки, которая является совокупностью множеств сеточных точек $G^v(0; 1)$ и $G^f(0; 1)$, определяемых как

$$G^v(0; 1) = \{x_i^v : x_i^v = h(i - 1), \quad i = 1, \dots, N_0 + 1, \quad h = N_0^{-1}\},$$
$$G^f(0; 1) = \{x_i^f : x_i^f = 0,5 (x_i^v + x_{i+1}^v), \quad i = 1, \dots, N_0\}.$$

Пример построения таких подсеток для одномерной задачи приведен на рис. 1. Далее самая мелкая сетка и все ее подсетки будут называться *многосеточной*

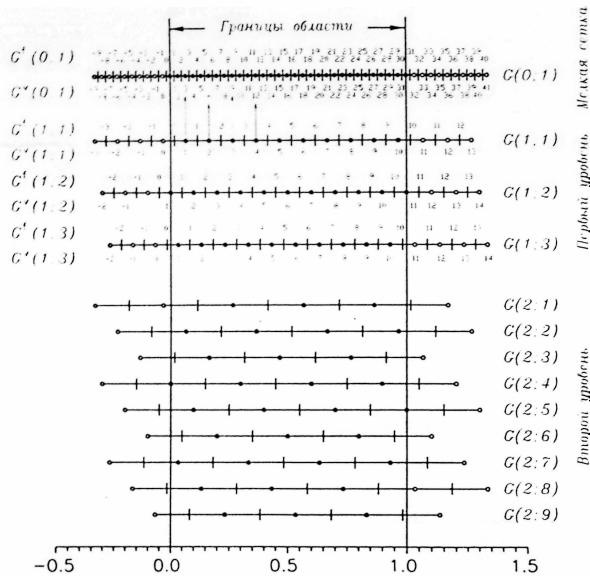


Рис. 1. Пример построения грубых сеток в одномерном случае

структурой. Очевидно, что самая мелкая сетка может быть представлена как совокупность всех сеток L -ого уровня ($L = 1, \dots, L^+$)

$$G(0; 1) = \bigcup_{k=1}^{3^L} G(L; k) \quad \text{и} \quad G(L; n) \cap G(L; m) = \emptyset, \quad n \neq m,$$

где L^+ есть номер уровня с самыми грубыми сетками.

Процесс построения грубых сеток в УМГ состоит в удалении двух точек из множеств $G^v(0; 1)$ и $G^f(0; 1)$, как показано на рис. 2.

В действительности, выражение “сетка L -ого уровня” означает взаимно однозначное отображение индексов сеточных точек данной и самой мелкой сетки. В дальнейшем, данное отображение индексов будет обозначаться фигурными скобками $\{ \}$. Например, отображение индексов сеточных точек x^v записывается как $x_{\{i\}}^v$, где i и $\{i\}$ есть индексы данной и самой мелкой сетки, соответственно. Как видно из рис. 1, для первой сетки первого уровня справедливо: $x_{\{1\}}^v = x_3^v$; $x_{\{2\}}^v = x_6^v$; $x_{\{3\}}^v = x_9^v$; Подобное соглашение позволяет записывать сеточные уравнения в унифицированном виде.

Для наглядности рассмотрим первую краевую задачу для уравнения Пуас-

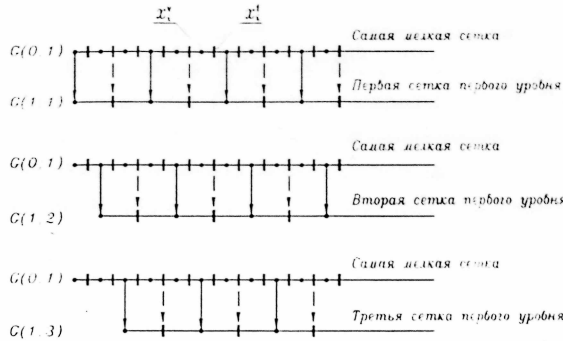


Рис. 2. Процесс построения грубых сеток в одномерном случае

сона

$$\mathcal{L}(u) = f, \quad u|_{\partial\Omega} = g. \quad (1)$$

В противоположность $K_M M$, $U_M \Gamma$ может быть представлена в виде фиксированного алгоритма, который состоит из следующих шагов:

шаг 1: Адаптация задачи (1) к $U_M \Gamma$ посредством представления решения в виде

$$u = c + \hat{u},$$

(т.н. Σ -модификация решения). В дальнейшем, функция $\hat{u}$ будет приближением к искомому решению, а функция c будет поправкой, которая отыскивается на многосеточной структуре. Данная линейная задача (1) может быть переписана в Σ -модифицированном виде как

$$\mathcal{L}(c) = f - \mathcal{L}(\hat{u}), \quad c|_{\Omega} = g - \hat{u}|_{\Omega}.$$

шаг 2: Построение многосеточной структуры.

шаг 3: Дискретизация модифицированной задачи методом контрольного объема.

Интегрирование Σ -модифицированной задачи по контрольному объему V_g^L на некоторой вычислительной сетке g L -ого уровня позволяет получить

$$\frac{1}{V_g^L} \int_{V_g^L} \mathcal{L}(c) dv = J, \quad \text{где} \quad J = \frac{1}{V_g^L} \int_{V_g^L} (f - \mathcal{L}(\hat{u})) dv.$$

Правая часть J есть среднеарифметическое значение невязок, вычисленное в узлах самой мелкой сетки, которые лежат в пересечении данного контрольного объема и области Ω . Дискретный аналог Σ -модифицированной задачи

принимает вид

$$\frac{c_{\{i-1j\}} - 2c_{\{ij\}} + c_{\{i+1j\}}}{h^2 3^{2L}} + \frac{c_{\{ij-1\}} - 2c_{\{ij\}} + c_{\{ij+1\}}}{h^2 3^{2L}} = J_{\{ij\}}.$$

шаг 4: *Многосеточные итерации* (пилообразный цикл). Выполнение нескольких итераций метода Зейделя на многосеточной структуре, начиная с самых грубых сеток (уровень L^+). Поправка c , которая вычисляется на грубых сетках, добавляется на самой мелкой сетке к $\hat{u}$:

$$\hat{u} := \hat{u} + c.$$

В отличие от K_{MM} , в U_{MT} переход от уровня с более грубыми сетками к уровню с более мелкими сетками не связан с интерполяцией поправки, а состоит в изменении отображения индексов. Отсутствие интерполяции в U_{MT} позволяет существенно снизить требования, которые предъявляются к выбору сглаживающей процедуры. Кроме того, вычисление соответствующих интегралов на самой мелкой сетке позволяет отказаться от предварительного сглаживания и значительно упростить многосеточный цикл.

К преимуществам U_{MT} следует отнести унифицированный способ построения грубых сеток, проблемно-независимые операторы переходов, возможность применения простейших сглаживающих процедур, простейший многосеточный цикл, высокий внутренний параллелизм и простоту программной реализации.

Проведенный анализ вычислительных усилий в U_{MT} показал, что необходимый объем вычислений составляет $O(\bar{N} \lg^k \bar{N})$ операций, где $k = 1, 2$ в зависимости от объема используемой компьютерной памяти, а $\bar{N}$ есть число узлов самой мелкой сетки. Проигрыш в эффективности, по сравнению с оптимально адаптированным вариантом K_{MM} ($k = 0$), возникает только при решении простейших задач, и является неизбежным следствием высокой формализации вычислительной части U_{MT} . Показано, что максимальный проигрыш в эффективности возникает при решении первой краевой задачи для уравнения Пуассона и приблизительно составляет

$$\frac{2^N + 1}{2^N - 1} \frac{N}{\lg \bar{N}},$$

где $N = 2, 3$ есть размерность задачи. Проведенный анализ и результаты вычислительных экспериментов показали, что формализация вычислительной части U_{MT} приводит к незначительному уменьшению эффективности.

Для иллюстрации высокой скорости сходимости U_{MT} представлены результаты вычислительных экспериментов. В качестве сглаживающих процедур использовался точечный и блочный вариант метода Зейделя при естественном

упорядочивании неизвестных. В качестве модельных задач рассматривались изотропное и анизотропное уравнение, уравнение с разрывными коэффициентами и нелинейные уравнения. Получены зависимости для аппроксимации граничных условий на грубых сетках. Результаты вычислительных экспериментов продемонстрировали высокую скорость сходимости УМТ без необходимости внесения изменений в вычислительную часть технологии. Приведен пример схемы четвертого порядка аппроксимации, состоящей в раздельной дискретизации оператора в левой части уравнения (1) и интеграла в правой части этого уравнения.

Рассмотрено применение УМТ к решению систем дифференциальных уравнений в частных производных. Проведен анализ четырех вычислительных алгоритмов: классического совместного алгоритма, классического сегрегированного алгоритма, упрощенного многосеточного сегрегированного алгоритма (последовательные сглаживающие итерации на многосеточной структуре) и полного многосеточного сегрегированного алгоритма (сегрегированные итерации на уровне с самыми грубыми сетками и сглаживающие итерации на остальных уровнях). Показано, что полный многосеточный сегрегированный алгоритм является конкурентноспособным с совместным, однако существенно проще с точки зрения программной реализации. Ускорение полного многосеточного сегрегированного алгоритма возникает вследствие близости поправок, получаемых на соседних уровнях многосеточной структуры, и не зависит от выбора сглаживающей процедуры.

Предложены различные способы априорной адаптации краевых задач к УМТ, и представлена общая схема вычислительной технологии. Дано краткое описание разработанных прикладных программ для реализации УМТ.

В третьей главе рассмотрен ряд вопросов, связанных с распараллеливанием УМТ. Показано, что наибольшая эффективность распараллеливания вычислений может быть достигнута при взаимной адаптации архитектуры многопроцессорного компьютера и многосеточного цикла УМТ. Рассмотрен простейший случай, когда число процессоров (p) составляет 3^N , где $N = 2, 3$. Данная конфигурация показана на рис. 3.

Достоинствами данной архитектуры, адаптированной к УМТ, является заранее известное число процессорных модулей, минимальное число линий связи, возможность распределения заданий между модулями до начала вычислений и оптимальная балансировка загрузки.

Распараллеливание УМТ для данной архитектуры ($p = 3^N$) может быть разделено на два этапа:

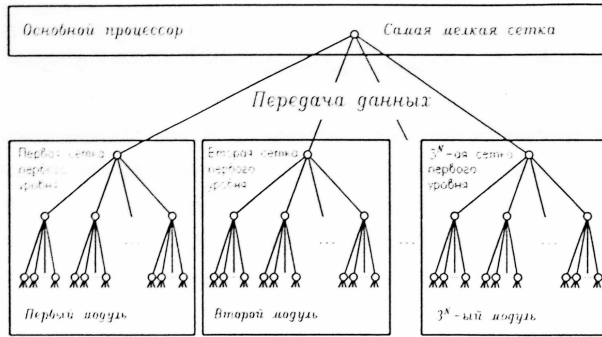


Рис. 3. Распределение грубых сеток среди процессорных модулей

Этап 1: Уровни с грубыми сетками ($0 < L \leq L^+$). Поправки на данных уровнях могут быть вычислены параллельно на p процессорных модулях. Распараллеливание $У_{MT}$ на уровнях с грубыми сетками не зависит от выбора итерационного метода.

Этап 2: Самая мелкая сетка ($L = 0$). Только хорошо распараллеливаемые варианты метода Зейделя могут быть использованы на самой мелкой сетке для избежания простоя $p - 1$ процессоров.

Основной задачей проведенных исследований является оценка внутреннего параллелизма $У_{MT}$. Для получения подобной оценки предположим, что $p - 1$ процессоров простаивают при вычислении поправки на самой мелкой сетке (т.е. рассмотрен только первый этап распараллеливания).

Показано, что сокращение объема обменов данными между процессорами и повышение эффективной распараллеливания возможно при адаптации многосеточного цикла к выбранной архитектуре. Динамический цикл, приведенный на рис. 4, позволяет перераспределять вычислительные усилия в пользу уровней с грубыми сетками, на которых $У_{MT}$ обладает полным параллелизмом.

Получены следующие оценки минимального ускорения $(S_p^N)_{min}$ и эффективности $(E_p^N)_{min}$ при распараллеливании динамического цикла

$$(S_p^N)_{min} \approx 3^N \frac{q^* L^+ + 1}{q^* L^+ + 3^N}, \quad (E_p^N)_{min} \approx \frac{q^* L^+ + 1}{q^* L^+ + 3^N},$$

где q^* есть число многосеточных итераций, выполняемых на грубых сетках. Например, при распараллеливании первой краевой задачи для уравнения Пуассона на сетке с 1000^N узлами ($N = 2, 3$) минимальная эффективность составит

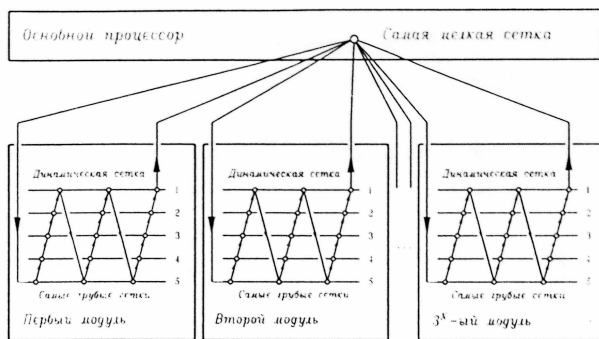


Рис. 4. Распараллеливание динамического цикла

$(E_p^2)_{\min} \approx 70\%$ и $(E_p^3)_{\min} \approx 40\%$, соответственно. Дальнейшее повышение эффективности возможно при распараллеливании сглаживающей процедуры на самой мелкой сетки, однако в этом случае определяющим фактором являются конструктивные особенности многопроцессорного компьютера, в первую очередь скорость обмена данными между процессорами.

В четвертой главе предложен новый подход к численному решению полных уравнений Навье–Стокса. Предложена новая форма записи уравнений Навье–Стокса, которая явно содержит уравнение для вычисления давления, полученное посредством невырожденной замены переменных и линейных преобразований без дополнительного дифференцирования уравнений движения. Численное решение модифицированных уравнений Навье–Стокса не требует использования искусственных параметров релаксации, разнесенных сеток и ограничения на шаг по времени. Для вывода уравнения для расчета давления предложена следующая замена переменных

$$U = \frac{u + \alpha}{p}, \quad V = \frac{v + \beta}{p}, \quad W = \frac{w + \gamma}{p},$$

где α , β и γ есть некоторые константы, такие что

$$u + \alpha \geq 0, \quad v + \beta \geq 0, \quad w + \gamma \geq 0.$$

Модифицированные уравнения Навье–Стокса для несжимаемых течений могут быть записаны в следующей векторной форме

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z} = 0,$$

где вектора **D**, **E**, **F** и **G** имеют вид

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} pU \\ pV \\ pW \\ \xi p \end{pmatrix}, \quad \Psi'_\sigma(\phi) = \epsilon\phi + \frac{1}{Re} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma},$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} p^2 U^2 - \Psi_x^\alpha(p)U + \frac{p}{Re} - \frac{p}{Re} \frac{\partial U}{\partial x} \\ (p^2 U - \Psi_x^\alpha(p))V - \frac{p}{Re} \frac{\partial V}{\partial x} \\ (p^2 U - \Psi_x^\alpha(p))W - \frac{p}{Re} \frac{\partial W}{\partial x} \\ U\xi p^2 + \left(\frac{1}{Re} + U - \Psi_x^\alpha(\xi) \right) p - \frac{\xi}{Re} \frac{\partial p}{\partial x} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} (p^2 V - \Psi_y^\beta(p))U - \frac{p}{Re} \frac{\partial U}{\partial y} \\ p^2 V^2 - \Psi_y^\beta(p)V + \frac{p}{Re} - \frac{p}{Re} \frac{\partial V}{\partial y} \\ (p^2 V - \Psi_y^\beta(p))W - \frac{p}{Re} \frac{\partial W}{\partial y} \\ V\xi p^2 + \left(\frac{1}{Re} + V - \Psi_y^\beta(\xi) \right) p - \frac{\xi}{Re} \frac{\partial p}{\partial y} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} (p^2 W - \Psi_z^\gamma(p))U - \frac{p}{Re} \frac{\partial U}{\partial z} \\ (p^2 W - \Psi_z^\gamma(p))V - \frac{p}{Re} \frac{\partial V}{\partial z} \\ p^2 W^2 - \Psi_z^\gamma(p)W + \frac{p}{Re} - \frac{p}{Re} \frac{\partial W}{\partial z} \\ W\xi p^2 + \left(\frac{1}{Re} + W - \Psi_z^\gamma(\xi) \right) p - \frac{\xi}{Re} \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix},$$

и $\xi = U + V + W$.

Из проделанных преобразований следует, что:

1. функции U , V , W и p должны быть определены в одних и тех же узлах сетки (т.е. отпадает необходимость использования разнесенных сеток).
2. уравнения Навье—Стокса для сжимаемых течений могут быть модифицированы аналогичным образом вне зависимости от вида уравнения состояния.

Для сокращения объема вычислений предложено представление давления в виде

$$p(t, x, y, z) = p^x(t, x) + p^y(t, y) + p^z(t, z) + \mathcal{P}(t, x, y, z).$$

Слагаемые p^x , p^y и p^z определяются при решении модифицированных уравнений движения с использованием интегральных форм уравнения неразрывности в качестве дополнительных условий. При этом вычисление p^x , p^y и p^z осуществляется согласованно с вычислением соответствующих компонент скорости при помощи численных методов предложенных ранее для решения уравнений Навье–Стокса в приближении пограничного слоя.

Рассмотрены вопросы, связанные с расположением контрольных объемов и постановкой граничных условий. В качестве вычислительного эксперимента проведен расчет развивающегося ламинарного течения на начальном участке круглой трубы. Показано, что если скорость на входе в канал является постоянной по радиусу, то давление в непосредственной близости от входного участка изменяется по параболическому закону.

В пятой главе предложена упрощенная (квазигомогенная) модель теплообмена при кипении однокомпонентной жидкости. Турбулентность в двухфазной среде учитывалась при помощи следующей гипотезы

$$\mu_{eff} = \mu_m + \mu_t + \mu_i,$$

где μ_m есть молекулярная вязкость, μ_t – турбулентная вязкость при отсутствии взаимодействия между фазами; μ_i – поправка на межфазное взаимодействие. Функция μ_i задавалась в виде

$$\mu_i(\chi) = A(\mu_m + \mu_t) \exp\left(-\frac{(\chi - 0.5)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (2)$$

исходя из условия перехода основополагающих уравнений математической модели в соответствующие уравнения для вынужденной однофазной конвекции, а так же при помощи ряда дополнительных гипотез. Здесь χ есть относительная энтальпия

$$\chi(x, r) = \frac{i(x, r) - i_{Lsat}(P_{sat}(x, r))}{i_{Gsat}(P_{sat}(x, r)) - i_{Lsat}(P_{sat}(x, r))},$$

а A и σ есть постоянные для данного теплоносителя и данного режима кипения.

С учетом (2), математическая модель кипения в условиях вынужденного течения в обогреваемых каналах состоит из осредненных по Фавру уравнений Навье–Стокса, оригинального варианта $K-\epsilon$ -модели турбулентности, уравнения энергии для теплоносителя, уравнения теплопроводности для стенки канала и уравнения состояния.

В многосеточной технологии искомое решение представляется в виде суммы (Σ -модификация) или произведения (Π -модификация) двух функций. При построении варианта $(K-\epsilon)$ -модели турбулентности использовалась полная Π -модификация (мультипликативное выделение особенности) или представление

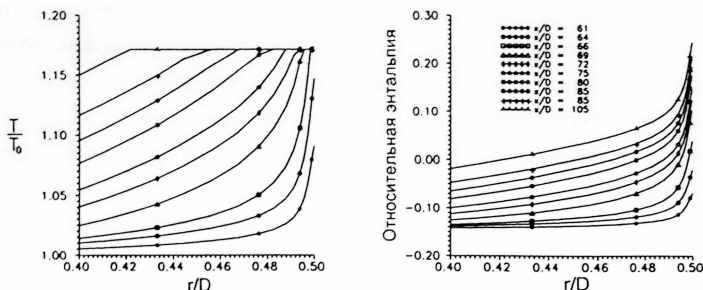


Рис. 5. Развитие двухфазного пограничного слоя в пристеночной области

искового решения в виде

$$\zeta = \Psi_{\zeta} \hat{\zeta}_{\zeta}, \quad \zeta = \begin{pmatrix} K \\ \varepsilon \end{pmatrix},$$

где $\hat{\zeta}$ является приближением к искомому решению, а ζ_{ζ} – поправка, которая отыскивается на многосеточной структуре, а Ψ_{ζ} выбирается на основе экспериментальных данных с целью устранения особенностей решения $\hat{\zeta}_{\zeta}$ в пристеночной области. Для учета пристеночных эффектов в разработанном варианте $(K - \varepsilon)$ -модели турбулентности вместо пристеночных функций применялись пристеночные источниковые члены, вид которых определяется однозначно аппроксимацией экспериментальных данных. Использование функций Ψ_{ζ} позволило в значительной мере устранить особенности решения на этапе построения модели турбулентности.

На основе разработанной модели возможно моделирование двух предельных случаев: сравнительно малой тепловой нагрузки (переход от вынужденной конвекции в недогретой жидкости к поверхностному кипению и далее к пузырьковому режиму кипения вплоть до $\chi = 0.3$) и сравнительно большой тепловой нагрузки (пленочный режим кипения). Выбор азота в качестве типичного криогенного теплоносителя обусловлен спецификой экспериментальных исследований.

На рис. 5 показано изменение относительной температуры и энтальпии азота по радиусу круглого канала в различных радиальных сечениях. Согласно данной модели кипение в пристеночной области начинается когда жидкость в ядре потока недогрета до температуры насыщения. Подобная особенность была отмечена и в экспериментальных исследованиях. По мере образования и развития двухфазного пограничного слоя, температура среды стремится к температуре

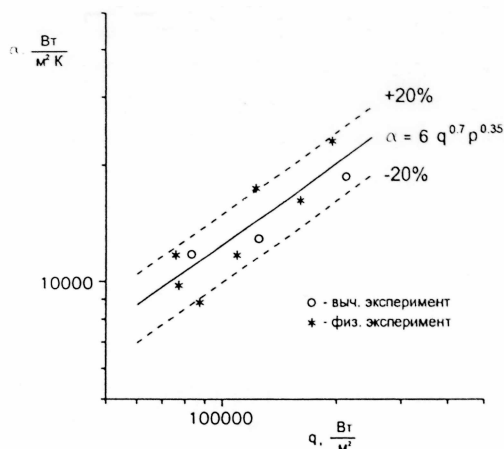


Рис. 6. Сравнение расчетных и экспериментальных данных ($p = 0.3 \text{ МПа}$)

насыщения, и температурный напор остается приблизительно постоянным. Поэтому адекватность модели для этого режима кипения может быть проверена только по коэффициенту теплоотдачи.

Расчетные и экспериментальные значения коэффициента теплоотдачи показаны на рис. 6. Вычислительные эксперименты при различных значениях давления, скорости и недогрева показали, что модель позволяет рассчитать с достаточной точностью поля скорости, давления и температуры вплоть до значений относительной энтальпии равных 0.3. При больших значения в условиях относительно малой тепловой нагрузки на теплообмен оказывает сильное влияние структура двухфазного потока, поэтому применение моделей, основанных на осредненном по времени описании, выглядит проблематичным.

Результаты расчета пленочного кипения показаны на рис. 7. На начальном участке наблюдается сильный градиент относительной энтальпии в пристеночной области. Судя по распределению относительной энтальпии можно утверждать, что жидкая фаза отделена от обогреваемой стенки канала паровой пленкой, причем границы жидкого стержня достаточно четко очерчены. По существующей ныне классификации, этот фрагмент двухфазного потока соответствует стержневому режиму кипения. По мере прогрева жидкого стержня область одновременного существования обеих фаз увеличивается, а диаметр жидкого стержня — уменьшается. В физическом эксперименте это соответствует нагреву жидкого стержня до температуры насыщения и его постепенному

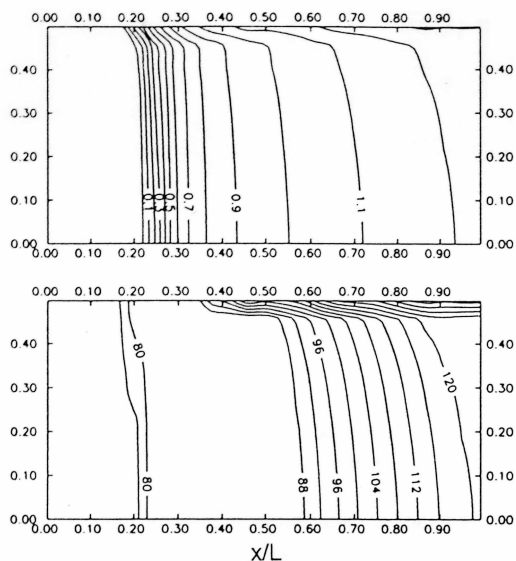


Рис. 7. Распределение относительной энтальпии (вверху) и температуры (внизу) в проточной части канала

разрушению. Следует отметить увеличение паровой пленки и соответственно ее теплового сопротивления. Окончанием стержневого режима в данной модели считается сечение, в котором относительная энтальпия на оси канала становится равной нулю. Далее вниз по течению не существует недогретой жидкости, а область одновременного существования фаз локализована в центральной части канала. В действительности, этот участок соответствует каплям жидкости в потоке несущего перегретого пара. По мере прогрева двухфазного потока область одновременного существования фаз сужается. В данной модели окончанием кипения считается сечение, в котором относительная энтальпия на оси канала считается равной единице. Ниже по течению происходит вынужденная однофазная конвекция в перегретом паре.

ВЫВОДЫ

1. Разработана многосеточная технология для численного решения краевых задач на структурированных сетках. Показано, что априорная адаптация краевых к УМТ, а так же ряд новых конструктивных решений позволили пре-

дельно упростить вычислительную часть технологии. Удалось избавиться от ряда проблемно-зависимых компонент (интерполяция, предварительное сглаживание, построение грубых сеток и т.д.), зафиксировать многосеточный цикл и существенно снизить требования, предъявляемые к сглаживаемой процедуре. Незначительный проигрыш в эффективности является неизбежным следствием высокой формализации вычислительной части УМТ. Возможности УМТ демонстрировались при решении ряда стандартных модельных задач, причем, в отличие от КММ, не требовалось внесения каких-либо изменений в вычислительную часть. Рассмотрены различные способы адаптации краевых задач к УМТ (Σ -, Π - и ϵ -модификации).

На примере модельной задачи, рассмотрены все возможные алгоритмы численного решения систем дифференциальных уравнений в частных производных. Показано, что многосеточный сегрегированный алгоритм является конкурентноспособным по скорости сходимости с совместным, но в тоже время существенно более просто реализуемым.

Полностью разработано программное обеспечение для УМТ. Проблемно-независимые компоненты УМТ выполнены в виде унифицированных подпрограмм, что позволило приблизить сложность программирования УМТ к сложности программирования односеточного варианта метода Зейделя.

2. Получена оценка внутреннего параллелизма УМТ. Показано, при взаимной адаптации архитектуры многопроцессорного компьютера и многосеточного цикла ускорение и эффективность для случая $p = 3^N$ лежат в пределах

$$3^N \frac{q^* L^+ + 1}{q^* L^+ + 3^N} \leq S_p^N < 3^N, \quad \frac{q^* L^+ + 1}{q^* L^+ + 3^N} \leq E_p^N < 1.$$

3. Предложена новая форма записи уравнений Навье–Стокса, которая содержит уравнение для вычисления давления. Данная форма записи получена при помощи оригинальной замены переменных и линейных преобразований без дополнительного дифференцирования уравнений движения. Подобным образом могут быть модифицированы двух- и трехмерные, стационарные и нестационарные уравнения Навье–Стокса для сжимаемых и несжимаемых сред в произвольной системе координат. Показано, что в случае структурированных сеток и применения блочного варианта метода Зейделя возможно уменьшения объема вычислений, связанное с оригинальной декомпозицией давления и использованием интегральных форм уравнения неразрывности в качестве дополнительных условий.

4. Разработана упрощенная математическая модель теплообмена при кипении в условиях вынужденного течения в каналах. В процессе моделирования

наиболее характерных режимов кипения, таких как переход от вынужденной однофазной конвекции недогретой жидкости к развитому пузырьковому кипению и переход от пленочного кипения к вынужденной конвекции в перегретом паре, показана адекватность модели по температуре стенки канала и коэффициенту теплоотдачи. Получено удовлетворительное совпадение с известными эмпирическими зависимостями и опытными данными автора.

Основные результаты диссертации опубликованы в 17 печатных работах, наиболее важными из которых являются:

1. Мартыненко С.И. Универсальная многосеточная технология для численного решения краевых задач на структурированных сетках // Вычислительные методы и программирование. - 2000. - Т.1, раздел 1. - С.85–104.

2. Мартыненко С.И. Универсальная многосеточная технология для численного решения систем дифференциальных уравнений в частных производных // Вычислительные методы и программирование. - 2001. - Т.1, раздел 1. - С.1–11.

3. Мартыненко С.И. Программное обеспечение для универсальной многосеточной технологии: строительные блоки и диагностические инструменты // Вычислительные методы и программирование. - 2001. - Т.1, раздел 4. - С.1–6.

4. Мартыненко С.И. Применение универсальной многосеточной технологии к численному решению уравнений Навье–Стокса // Тез. докл. Международ. Конф. по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС-2001). - М.: 2001. - С.258–260.

Зак.

Тираж

экз.

Типография ЦИАМ