

ГРИБОВ Александр Федорович

**СЛОЖНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА
ТРАЕКТОРИЙ ФАЗОВЫХ СИСТЕМ И ИХ
БИФУРКАЦИИ**

05.13.01 — Системный анализ, управление и обработка информации

Автореферат

**диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

Москва, 2001 г.

Работа выполнена в Московском государственном техническом
университете им. Н.Э. Баумана.

Научный руководитель: д.ф.-м.н., профессор В.Н. Белых

Официальные оппоненты: д.ф.-м.н., профессор Н.А. Бобылев
к.ф.-м.н., с.н.с. М.В. Шамолин

Ведущая организация: Санкт-Петербургский государственный универ-
ситет

Защита состоится "11" декабря 2001 г. в 13 часов на за-
седании диссертационного совета Д 212.141.15 при Московском госу-
дарственном техническом университете им. Н.Э. Баумана по адресу:
107005, Москва, 2-я Бауманская ул., дом 5.

хся в библиотеке Московского
верситета им. Н.Э. Баумана.

зед 2001 г.

1575831

Волков И.К.

НТБ МГТУ им. Н.Э. Баумана



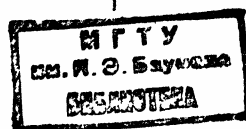
1575831

Грибов А.Ф. Сложные предел

Актуальность темы. Фазовые системы дифференциальных и разностных уравнений, являющиеся предметом настоящих исследований, адекватно описывают как процессы функционирования различных технических устройств (системы управления фазой колебаний, электрические машины, маятниковые системы и т.д.), так и различные физические явления (эффект Джозефсона в теории сверхпроводимости, ускорение заряженных частиц и т.д.). Типичным представителем фазовых систем являются системы уравнений Лурье с периодической нелинейностью. Первоначально основная проблема исследования этой системы с нелинейной функцией "в угле" состояла в решении задачи абсолютной устойчивости. Здесь достаточно упомянуть классические работы Лурье А.И., Айзермана М.А., Попова В.М., Якубовича В.А., Плисса В.А., Калмана Р., Цыпкина Я.З. и др. Следующий этап исследования был связан с решением задачи глобальной асимптотической устойчивости системы Лурье со многими состояниями равновесия или предельными циклами (Якубович В.А., Плисс В.А., Гелиг А.Х., Леонов Г.А. и др.).

Сделанное четверть века назад открытие притягивающих хаотических множеств траекторий детерминированных динамических систем, столь же естественных, как состояния равновесия и предельные циклы, привело к новому взгляду на теорию динамических систем и огромному росту интереса специалистов из различных областей знаний к проблемам хаотической динамики. В связи с этим возникла необходимость исследования сложных множеств предельных траекторий и бифуркационных сценариев перехода от регулярной динамики к хаотической как в системах общего, так и специальных видов, включая системы управления. В классической теории устойчивости систем со многими состояниями равновесия или предельными циклами одной из наиболее актуальных стала задача о глобальной устойчивости предельных множеств, не содержащих устойчивых траекторий, называемых странными аттракторами. Типичным примером служит система Чуа с кубической нелинейностью, исследованию странного аттрактора которой посвящена многочисленная литература. Для фазовых систем подобные исследования связаны с аналоговыми и импульсными системами фазовой автоподстройки.

Различным аспектам теории сложных предельных множеств и их бифуркаций в фазовых системах посвящены работы многочисленных ав-



торов как в нашей стране, так и за рубежом (Неймарк Ю.И., Шильников Л.П., Чириков Б.В., Белых В.Н., Леонов Г.А., Шафеев В.Д., Шахгильдян В.В., Шахтарин Б.И., Reitmann V., Hasler M., Kurths J., Holmes P., Mosekilde E. и др.)

Одной из актуальных нерешенных задач в теории фазовых систем является задача о нахождении аналитических соотношений, позволяющих проводить анализ сложной динамики, необходимый при расчете конкретных устройств. Распространенными аналитическими средствами инженерного анализа всегда являлись метод гармонического баланса и метод припасовывания для кусочно – линейных систем (Мандельштам Л.И., Андронов А.А., Попов Е.П. и др.). Настоящая работа посвящена развитию, обоснованию и использованию этих методов для изучения сложных предельных множеств траекторий фазовых систем.

Целью диссертационной работы является изучение сложных притягивающих множеств траекторий различных типов странных аттракторов фазовых систем и их бифуркации. Это включает в себя: 1) математическое обоснование приближенного метода квазигармонической линеаризации и его использование для определения сценариев перехода к хаосу; 2) получение аналитических условий существования гомоклинических траекторий и их использование в качестве критерия спирального хаоса; 3) исследование гиперболических аттракторов фазовых систем с дискретным временем; нахождение условий бифуркаций их рождения и исчезновения.

Методы исследования. В работе использованы методы качественной теории многомерных динамических систем и теории бифуркаций. Кроме того, в первой главе использованы идеи метода гармонического баланса, развитые в работах Бравермана Э.М., Мееркова С.М. и Пятницкого Е.С..

Научная новизна и основные положения диссертации, выносимые на защиту.

1) Для фазовой системы дифференциальных уравнений произвольного порядка с одной периодической нелинейностью получено обобщение метода квазигармонической линеаризации на случай многообходных вращательных циклов. Дано строгое математическое обоснование метода и приведена методика его использования для нахождения сценария перехода к хаосу через бифуркации удвоения периода и порядок Шарковского.

2) Получены аналитические условия существования гомоклиничес-

ких траекторий для кусочно-линейных систем в сложном, наиболее интересном случае состояния равновесия типа седло-фокус. Тем самым установлено существование спирального хаоса Шильникова.

3) Определены аналитические условия бифуркации рождения и существования многообходных вращательных циклов в кусочно - линейной фазовой системе. На основе этих условий получен критерий бифуркационного перехода к хаосу.

4) Для фазовой системы с дискретным временем, представляющей собой кусочно-линейное разрывное отображение цилиндра в себя, получены условия существования гиперболического аттрактора (притягивающего множества, не имеющего устойчивых орбит).

5) Изучены многомерные кусочно-линейные отображения. Установлено существование гомоклинических траекторий, приводящих к рождению гиперболических аттракторов и служащих одним из условий определения полосы захвата дискретной системы управления фазой.

Теоретическая и практическая значимость результатов. Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы на практике при расчете конкретных динамических систем, имеющих хаотическое поведение.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на школе-семинаре "Разрывные динамические системы" (Киев, 1989 г.), II Всесоюзной конференции "Нелинейные колебания механических систем" (Горький, 1990 г.), Международной конференции "100-летие зарождения радиотехники" (Москва, 1995 г.), IV Международном семинаре "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления" (Москва, 1996 г.), Всероссийском научном семинаре "Нелинейная динамика: качественный анализ и управление" МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва, 1997 г.), совместных семинарах отдела дифференциальных уравнений НИИ ПМК при ННГУ и кафедры математики ВГАВТ (Нижний Новгород, 1997-2000 г.г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 9 статей и 6 тезисов докладов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Текст изложен на 117 машинописных страницах, включая 23 рисунка, 4 таблицы и списка литературы из 72 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дается общая характеристика работы, обсуждается

актуальность темы диссертации, приводится краткий обзор литературы по данной тематике.

Первая глава посвящена обобщению метода квазигармонического баланса на случай произвольного числа гармоник и φ - циклов с произвольным числом оборотов l по фазе. Этот метод возник как модификация метода гармонического баланса в связи со спецификой фазовых систем. Такой модификацией при исследовании синхронных машин занимались Урман Е.Л., Сизов В.П. и др. Наиболее полно этот метод разработан Шахтариным Б.И. Им получены основные соотношения, позволяющие находить параметры однократных φ - циклов и исследовать их устойчивость при учете одной гармоники.

В начале главы в целях увеличения точности рассматриваемого метода получено его обобщение, позволяющее учитывать высшие гармоники и кратность цикла. Получена система алгебраических уравнений, решением которой являются параметры l -оборотного φ - цикла и проведен анализ устойчивости этого решения. Для этого исследуемая фазовая система уравнений представлена в операторном виде

$$S(p)\varphi + R(p)\Phi(\varphi) = 0, \quad p = d/dt, \quad (1)$$

где $S(p), R(p)$ — многочлены степени n и m соответственно, а $\Phi(\varphi) \equiv F(\varphi) - \gamma$ — скалярная 2π - периодическая функция.

Решение, соответствующее φ - циклам ищется в следующем виде:

$$\varphi(t) = \omega t + \operatorname{Im} \sum_{k=1}^N w_k \exp(ik \frac{\omega}{l} t),$$

где $w_k = u_k - iv_k$; ω, u_k, v_k — параметры, подлежащие определению, $k = 1, \dots, N$, где N — число учитываемых гармоник, l — кратность цикла. В результате замены характеристики $F(\varphi)$ частной суммой ее ряда Фурье и реализации баланса гармонических и негармонических членов, была получена система

$$\begin{aligned} X_0 &= \gamma_c + b_0(h_0 - \gamma) = 0, \\ X_{2k} &= \operatorname{Re}[S(ik \frac{\omega}{l})w_k + R(ik \frac{\omega}{l})d_k] = 0, \\ X_{2k+1} &= \operatorname{Im}[S(ik \frac{\omega}{l})w_k + R(ik \frac{\omega}{l})d_k] = 0, \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (2)$$

Решая эту систему, находим параметры φ - цикла.

Для исследования устойчивости найденного решения переходный процесс ищется в виде

$$\varphi(t) = (\omega^* + \Delta\omega)t + \operatorname{Im} \sum_{k=1}^N (w_k^* + \Delta w_k) \exp(ik \frac{\omega^* + \Delta\omega}{l} t),$$

где $\omega^*, w_1^*, \dots, u_k^*$ — параметры стационарного движения. Ограничиваясь линейными членами и учитывая стационарную систему (2), получаем линейную систему дифференциальных уравнений относительно приращений параметров движения. Анализ устойчивости найденного решения проводится на основе критерия Рауса – Гурвица.

В этой же главе дано строгое математическое обоснование метода квазигармонической линеаризации и получены оценки, определяющие точность приближенных решений в зависимости от числа учитываемых гармоник. Указано на возможность применения метода для поиска хаотических систем со счетным числом различных l -оборотных φ – циклов, $l = 1, 2, 3, \dots$. Действительно, если полученная система алгебраических уравнений при всех l имеет решение для одних и тех же значениях параметров, то исходная система имеет счетное число периодических движений. Но поскольку счетное множество φ – циклов может быть только седловым, система является хаотической.

Математическим обоснованием классического метода гармонической линеаризации занимались многие авторы: Басс Р., Бобылев Н.А., Красносельский М.А., Пятницкий Е.С., Розенвассер Е.Н. и др. Специфика фазовых систем — наличие векового члена — потребовала обоснования процедуры получения решения обобщенным методом квазигармонической линеаризации. Для этого фазовая система представлена в следующем виде:

$$\dot{\varphi}(t) = -K(p)\Phi(\varphi(t)), \quad p = d/dt, \quad K(p) = \left(\sum_{k=0}^m b_k p^k\right) \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k\right)^{-1} \quad (3)$$

или

$$\sum_{k=1}^n a_{k-1} p^k \varphi + \sum_{k=0}^m b_k p^k \Phi(\varphi) = 0. \quad (4)$$

Теорема 1. Пусть для уравнения (4) выполнены следующие условия.

1. Разность порядков полиномов в знаменателе и числителе передаточной функции $K(p)$ не менее двух.
2. Все полюсы функции $K(p)$ расположены слева от мнимой оси.
3. Функция $\Phi(x)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|\Phi(x') - \Phi(x'')| < L|x' - x''|, \quad x', x'' \in (-\infty, \infty).$$

4. Процедура квазигармонического баланса, примененная к уравнению (4) определяет решение $\omega t + \sum_{k=1}^N A_k \sin(k\omega t + \gamma_k)$.

Тогда уравнение (4) имеет решение $\varphi(t)$, удовлетворяющее неравенству

$$|\varphi(t) - (\omega t + \sum_{k=1}^N A_k \sin(k\omega t + \gamma_k))| \leq \varepsilon^{1/2} R S \Omega_\beta(\omega),$$

$$t \in [t_0, t_0 + S \operatorname{Arsh}(1/\varepsilon^{1/2})],$$

где R и S — постоянные, определяемые параметрами системы и амплитудами A_k , $\Omega_\beta(\omega)$ — невозрастающая функция ω , $\beta \in [0, 1)$, а $\varepsilon = \max\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}$,

$$\varepsilon_i = \frac{\int_{|\omega| > (N+\beta)\omega} \left| \frac{d^i}{d\omega^i} K(i\omega) \right| d\omega}{\int_{|\omega| \leq (N+\beta)\omega} \left| \frac{d^i}{d\omega^i} K(i\omega) \right| d\omega} \quad (i = 0, 1, 2).$$

Условие $\varepsilon_0 \ll 1$ означает, что площадь "хвоста" частотной характеристики $|K(i\omega)|$ намного меньше "полосы пропускания". Неравенство $\varepsilon_{1,2} \ll 1$ означает, что частотная характеристика $K(i\omega)$ не имеет в области $\omega > \omega_{cp}$ слишком "резких" всплесков. Чем меньше площадь "хвостов" частотных характеристик $|K(i\omega)|$, $|\frac{d}{d\omega} K(i\omega)|$, $|\frac{d^2}{d\omega^2} K(i\omega)|$ при $\omega \in ((N+\beta)\omega, \infty)$, тем с большей точностью и на большем интервале времени функция $\omega t + \sum_{k=1}^N A_k \sin(k\omega t + \gamma_k)$ аппроксимирует решение исходной системы.

Далее рассмотрено применение обобщенного метода квазигармонической линеаризации к исследованию конкретных фазовых систем второго и третьего порядка с синусоидальными и кусочно — линейными функциями $F(x)$. Для этих систем получены определяющие соотношения, позволяющие находить параметры l -оборотов φ -циклов и исследовать их устойчивость. Для кусочно — линейных характеристик проведено сравнение полученных результатов с точными значениями. Проведено исследование влияния высших гармоник на точность вычислений.

Вторая глава посвящена изучению сложных предельных множеств кусочно — линейных систем.

Одним из условий сложности поведения динамических систем является критерий существования спирального хаоса или так называемый Шильниковский хаос. Такой хаос связан с поведением систем, имеющих состояние равновесия типа седло — фокус и петлю сепаратрисы, идущую из седла в него же (гомоклиническую траекторию). В окрестно-

сти такой гомоклинической траектории при выполнении дополнительных условий существует счетное множество периодических траекторий седлового типа. Кроме этого могут существовать как устойчивые, так и полностью неустойчивые периодические траектории. В связи с этим возникает задача о существовании гомоклинической траектории седла – фокуса с условием Шильникова. Спиральный хаос изучался с помощью качественно – численных методов во многих задачах физики, электроники, теории управления и др. Аналитически спиральный хаос в основном исследовался асимптотическими методами малого параметра, основанными на использовании функции В.К. Мельникова. К сожалению, такой подход встречает непреодолимые трудности, связанные с записью порождаемых решений.

В диссертации используется кусочно – линейная аппроксимация, позволяющая использовать явный вид решений уравнений в областях линейности, широко используемая в теории управления и при исследовании конкретных динамических систем. Следует отметить, что для фазовых систем кусочно – линейные функции описывают работу широко распространенных технических устройств.

Рассматривается фазовая система в виде

$$\dot{y} = Ay + g\Phi(\varphi), \quad \Phi(\varphi) \equiv F(\varphi) - \gamma, \quad (5)$$

для которой передаточная функция линейной части задана равенствами

$$W(p) = p^{-1}K(p), K(p) = \left(\sum_{k=0}^m b_k p^k\right) \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k\right)^{-1}, p = d/dt, \quad (6)$$

а нелинейная составляющая $F(x)$ допускает кусочно – линейные аппроксимации :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x}{c} & \text{при } |x| \leq |c| \quad (\text{область I}), \\ \frac{c}{\pi} - \frac{x}{\pi - c} & \text{при } x \in (c; 2\pi - c) \quad (\text{область II}), \end{cases} \quad (7)$$

$$F(x) = 1 - \frac{x}{\pi} \quad x \in (0; 2\pi), \quad (8)$$

$$F(x) = \frac{x}{\pi} \quad x \in (-\pi; \pi). \quad (9)$$

Предполагается, что для $F(x)$ в виде (7) корни характеристических уравнений p_i и p'_i , $i = 1, \dots, n$, в областях I и II удовлетворяют условиям:

$$p_i \neq p_j, p'_i \neq p'_j \text{ при } i \neq j, \operatorname{Im} p'_i = 0; \\ \operatorname{Re} p'_1 > 0, \operatorname{Re} p'_k < 0, k = 2, \dots, n, \operatorname{Re} p_i < 0.$$

Состояния равновесия изучаемой системы находятся из уравнения $F(x) = \gamma$. Их два: $O_1(x_{01}, 0, \dots, 0)$ и $O_2(x_{02}, 0, \dots, 0)$, где $x_{01} = \gamma c$, $x_{02} = \pi - \gamma c \mu$, $\mu = \pi/c - 1$. При сделанных предположениях состояние равновесия O_2 неустойчиво. Следовательно, в фазовом пространстве возможна петля сепаратрисы из точки O_2 .

Обозначим через $W(p_1, \dots, p_n)$ матрицу, столбцами которой являются собственные векторы, соответствующие собственным значениям p_i . Пусть $w_i = w(p_1, \dots, p_n | a)$ — определитель, получающийся из $\det W(p_1, \dots, p_n)$ заменой i -го столбца на вектор — столбец a ; $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$.

Теорема 2. Для существования петли сепаратрисы в системе (5), (7) увеличивающей (уменьшающей) периодическую координату $\varphi = y_1$ на 2π , необходимо, чтобы $\gamma = \gamma_{kc}$ ($\gamma = -\gamma_{kc}$), где

$$\gamma_{kc} = (w - \sum_{i=1}^n \omega_i \exp p_i \tau)(w + \sum_{i=1}^n \omega_i \exp p_i \tau)^{-1}, \quad (10)$$

а τ — корень уравнения

$$\sum_{i=1}^n \omega_i v_{i1} \exp p_i t = 0, \quad (11)$$

$$\omega_i = \mu w_i(p_1, \dots, p_n | f'_1) - (\mu + 1) w_i(p_1, \dots, p_n | e_1), \\ v_{ij} = w_j(p'_1, \dots, p'_n | f_i) - (\mu + 1) w_j(p'_1, \dots, p'_n | e_1); \\ i, j = 1, \dots, n, \quad w = \det W(p_1, \dots, p_n).$$

Теорема 3. Для существования петли сепаратрисы достаточно выполнения условий (10), (11) и чтобы для всех $t \in (0, \tau)$

$$|\gamma \pm (1 \pm \gamma) \sum_{i=1}^n \omega_i \exp p_i t / w| < 1, \quad (12)$$

и для всех $\theta > 0$

$$|\gamma \mu \mp \frac{1 \pm \gamma}{w w'} \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^n \omega_i v_{ij} \exp(p_i \tau) \exp p'_j \theta| < \mu, \quad (13)$$

$$w' = \det W(p'_1, \dots, p'_n),$$

где верхние (нижние) знаки берутся для петли, увеличивающей (уменьшающей) на 2π периодическую координату.

Аналогичные теоремы доказаны для фазовой системы с пилообразной нелинейностью (8) и системы, описывающей работу электронного осциллятора — цепи Чуа.

Одним из основных бифуркационных сценариев перехода к хаосу в динамических системах является каскад бифуркаций удвоения периода устойчивого цикла. Этот каскад после предела Фейгенбаума 2^∞ и последующей бифуркации рождения нечетнократных циклов в соответствии с теоремой Шарковского заканчивающийся бифуркацией рождения цикла периода три, ведет к возникновению развитого хаоса. Для исследования такого типа сценария в работе получены аналитические условия бифуркации рождения и условия существования O -цикла и l -обходного φ -цикла. Для исследования устойчивости полученных циклов построена матрица точечного преобразования плоскости в плоскость. Например, для фазовой системы с нелинейностью (8) параметры системы, необходимые для существования l -обходного φ -цикла должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} & e_1^T (Q(\tau_1) - E)(Q(2\pi l/\gamma_c) - E)^{-1} (Q(2\pi l/\gamma_c) + \\ & + 2 \sum_{k=1}^{l-1} Q(2\pi l/\gamma_c - \sum_{j=1}^k \tau_j) + E) e_1 = e_1^T (Q(\tau_1) + E) e_1 \\ & e_1^T (Q(\sum_{j=1}^l \tau_j) - E)(Q(2\pi l/\gamma_c) - E)^{-1} (Q(2\pi l/\gamma_c) + \\ & + 2 \sum_{k=1}^{l-1} Q(2\pi l/\gamma_c - \sum_{j=1}^k \tau_j) + E) e_1 = \\ & = e_1^T (Q(\sum_{j=1}^l \tau_j) + 2 \sum_{k=2}^l Q(\sum_{j=k}^l \tau_j) + E) e_1, \\ & (\pi\gamma, y_2^1, \dots, y_n^1)^T = (Q(2\pi l/\gamma_c) - E)^{-1} \pi(Q(2\pi l/\gamma_c) + \\ & + 2 \sum_{k=1}^{l-1} Q(2\pi l/\gamma_c - \sum_{j=1}^k \tau_j) + E) e_1. \end{aligned}$$

Здесь в накрывающем пространстве R^n рассматривается l областей (l — кратность цикла), в каждой из которых

$$F_i(x) = 2i - 1 - x/\pi - \gamma, \quad i = 1, \dots, l, \quad (14)$$

и система (5) принимает вид

$$\dot{y} = Ay + g(2i - 1 - \gamma). \quad (15)$$

Этот цикл пересекает плоскости $y_i = 2(i - 1)\pi$, $i = 1, \dots, l + 1$ соответственно в точках $M_i(y_1^i, \dots, y_n^i)$, $i = 1, \dots, l + 1$, а τ_i — время, за которое точка M_i переходит в точку M_{i+1} . При этом $M_l = M_{l+1}$,

p_i корни характеристического многочлена; f_i — собственные векторы, соответствующие собственным значениям p_i . $W(f_1, \dots, f_n)$ — матрица, столбцами которой являются собственные векторы f_i ; $\Lambda(t) = \text{diag}(\exp p_1 t, \dots, \exp p_n t)$ — диагональная матрица, $Q(t) = W\Lambda(t)W^{-1}$, $\gamma_c = \omega = 2\pi l / \sum_{i=1}^l \tau_i$

Доказанные утверждения о существовании O и φ — циклов для определения каскада бифуркаций удвоения и рождения нечетнократных циклов в порядке Шарковского используются следующим образом: если при одних и тех же значениях параметров полученные условия выполняются для $l = 1, 2, 2^2, \dots, 2^\infty, \dots, 3$, то это и означает, что реализуется сценарий перехода к развитому хаосу через каскад удвоений и бифуркаций, следующих в порядке Шарковского. Заметим, что характер бифуркаций l -кратных φ — циклов устанавливается по полученным условиям существования границы смены устойчивости, соответствующей мультипликатору, равному минус единице.

Другим механизмом возникновения хаоса, важным для систем управления, служит механизм рождения сложных предельных множеств траекторий в окрестности областей (площадок) скользящих движений релейных и кусочно — склеенных систем. В работе для разрывной системы с пилообразной нелинейностью показано существование площадки скользящих движений. Найдены уравнения движения на этой площадке и показано, что при определенных условиях наличие такой площадки является причиной возникновения сложного множества предельных траекторий.

В третьей главе рассмотрены системы с дискретным временем, имеющие своими математическими моделями точечные отображения. Цифровые импульсные системы управления представляют важный класс современных технических устройств. Кроме того, такие точечные отображения появляются как отображение последования или отображение Пуанкаре для непрерывных динамических систем. Точечные отображения позволяют использовать аналитические методы, поскольку дискретные решения задаются в явном виде. Наиболее трудными задачами для дискретных систем, как и систем с непрерывным временем, являются вопросы возникновения и характер хаотических колебаний. Этой проблеме посвящена обширная литература как у нас в стране, так и за рубежом. Основные направления исследований в этой области связаны с общетеоретическим изучением бифуркационных сценариев

перехода к хаосу и с анализом многочисленных конкретных моделей качественно – численными методами. В третьей главе рассмотрена кусочно – линейная фазовая система, описываемая соответствующими точечными отображениями, позволяющими получить аналитические результаты, относящиеся к возникновению и характеру хаотических колебаний.

Пусть в отображении f

$$\begin{aligned}\bar{\varphi} &= \varphi + l^T x - \alpha \Phi(\varphi), \\ \bar{x} &= Bx + \beta \Phi(\varphi),\end{aligned}\tag{16}$$

описывающем работу дискретной системы по управлению фазой,

$$\Phi(\varphi) = 1 - \frac{\varphi}{\pi} - \gamma \pmod{2\pi}.$$

Тогда, после введения новых переменных и параметров, отображение (16) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}\bar{\varphi} &= \alpha\varphi + l^T x, \\ \bar{x} &= Bx - \beta\varphi.\end{aligned}\tag{17}$$

Для двумерного отображения $B = b$ — число, $l^T = 1$; для многомерного отображения B — матрица.

Случай двумерного отображения.

Лемма 1. Пусть для отображения (17) $b < 1$. Тогда кольцо вида $K = \{(\varphi, x) | \varphi \in S^1, \beta c(1-b)^{-1} < x < -\beta(1-c)(1-b)^{-1}\}$ есть притягивающая область отображения (17), то есть $fK \subset K$ и для любой точки $M \notin K$ существует целое $p_0 > 0$ такое, что $f^{p_0}M \in K$ при $p > p_0$.

Теорема 4.

1. При условии $(1-c)(b\mu_1 - \beta) < \mu_2(1 - (1-c)(\alpha + \mu_1))$ и $b < 1$ отображение (17) имеет гиперболический аттрактор, образованный O – траекториями. Этот аттрактор притягивает все траектории, если точка $A(1-c, \mu_2)$, не принадлежит притягивающему кольцу K , $c = (1-\gamma)/2$.

2. Если $f(A_1) \in \{x > -\mu_2(\varphi - 1)\}$ и $b < 1$ отображение f имеет гиперболический аттрактор, образованный φ – траекториями, где $A_1(1-c, \mu_1(1-c))$, μ_1 и $-\mu_2$ — положительный и отрицательный корни уравнения $\mu^2 - (b-\alpha)\mu + \beta = 0$.

Для возрастающей характеристики $\Phi(\varphi) = -1 + \frac{\varphi}{\pi} - \gamma \pmod{2\pi}$

отображение (16) может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned}\bar{\varphi} &= \alpha\varphi + x, \\ \bar{x} &= bx + \beta\varphi,\end{aligned}\tag{18}$$

где $c - 1 \leq \varphi \leq c$, $\alpha \leq 1$, $\beta \leq 0$, $0 < |b| \leq 1$.

Лемма 2.

1. При $\alpha b - \beta < 1$ и $\beta < (1 + \alpha)(1 + b)$ неподвижная точка отображения (18) асимптотически устойчива.

2. При $\beta > (1 + \alpha)(1 + b)$ неподвижная точка — седловая, мультипликаторы которой $\lambda_1 < -1$; $-1 < \lambda_2 < 0$ — корни характеристического уравнения матрицы D : $\lambda^2 - (\alpha + b)\lambda + \alpha b - \beta = 0$, а соответствующие им собственные векторы есть $V^S(1, \lambda_1 - \alpha)$ и $V^U(1, \lambda_2 - \alpha)$.

Лемма 3. При $|b| < 1$ отображение (18) диссипативно: кольцо вида

$$K = \{(\varphi, x) | \varphi \in S^1, |x| < |\beta|(1 - c)(1 - |b|)^{-1}\}$$

есть притягивающая область отображения (18), то есть $fK \subset K$ и для любой точки $M \notin K$ существует целое $p_0 > 0$ такое, что $f^{p_0}M \in K$ при $p > p_0$.

Теорема 5. Отображение (18) имеет гиперболический аттрактор с обратным седлом, расположенный в притягивающем кольце K .

Можно показать, что данный аттрактор при определенных значениях параметров содержит одновременно вращательные траектории с любым набегом фаз в ту и другую стороны, а также O — траектории вдоль которых фаза нарастает на q , $q = 1, 2, \dots$ периодов в одну сторону и убывает на такое же число периодов в обратную сторону.

Случай n — мерного отображения.

Лемма 4. Отображение (17) диссипативно при условии, что матрица B — гурвицева.

Лемма 5. Отображение (17) гиперболично.

Теорема 6. В области параметров

$$\left\{ \begin{aligned} c &> 1 - \frac{w_1(V^U, V^S_1, V^S_2, \dots, V^S_{n-1}|e^1)}{w} \\ c &< 1 - \frac{w_1(V^U, V^S_1, V^S_2, \dots, V^S_{n-1}|e^1)}{wd_1V^U} \end{aligned} \right.$$

седловая неподвижная точка отображения (17) имеет грубую гомоклиническую траекторию, лежащую в трансверсальном пересечении устойчивого и неустойчивого многообразий, где d_1 — строка (α, I^T) , V^U, V^S_i — собственные векторы неустойчивого и устойчивого многообразий.

Отметим, что существование гомоклинической траектории служит одним из критериев захвата в дискретной системе фазовой синхронизации, а бифуркация ее исчезновения является одним из условий для определения полосы захвата.

Обобщение n - мерного случая. Предположим, что имеется n - мерное кусочно - линейное отображение f некоторой области $G \subset R^n$ в себя, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $f(G) \subset G$;
- 2) $G = \bigcup_{i=1}^I G_i$, $G_i \cap G_j = \emptyset$, для $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, I$;
- 3) $f|_{G_i}$ имеет вид $\bar{x} = A_i(x - x_i) + x_i$,

где $x, x_i \in G_i$, A_i - $n \times n$ матрица вида $A_i = H \begin{pmatrix} C_i & 0 \\ 0 & D_i \end{pmatrix} H^{-1}$, а H - $n \times n$ невырожденная матрица, C_i - $k \times k$ матрицы с собственными значениями λ_i^j , $j = 1, 2, \dots, k$, такими, что $0 < |\lambda_i^j| < 1$ и все матрицы C_i имеют одинаковое множество собственных векторов, D_i - $m \times m$ матрицы с собственными значениями μ_i^j , $j = 1, 2, \dots, m$, такими, что $|\mu_i^j| > 1$ и все матрицы D_i имеют одинаковое множество собственных векторов.

Теорема 7. Если условия 1) - 3) выполнены, то отображение f имеет гиперболический аттрактор.

В заключении сформулированы основные результаты работы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

В диссертационной работе проведено исследование сложных притягивающих множеств траекторий различных типов странных аттракторов фазовых систем и их бифуркации. К наиболее важным можно отнести следующие результаты.

1) Для фазовых систем дифференциальных уравнений произвольного порядка с одной периодической нелинейностью дано строгое математическое обоснование метода квазигармонической линеаризации и проведено обобщение этого метода на случай многообходных вращательных циклов.

2) Разработана методика использования обобщенного метода квазигармонической линеаризации для нахождения сценария перехода к хаосу через бифуркации удвоения периода и порядок Шарковского.

3) Получены необходимые и достаточные условия существования гомоклинических траекторий для кусочно-линейных систем в случае со-

стояния равновесия типа седло-фокус, что позволяет установить наличие спирального хаоса Шильникова.

4) На основе найденных условий бифуркаций рождения и существования многообходных вращательных циклов в кусочно – линейной фазовой системе получен критерий бифуркационного перехода к хаосу.

5) Для фазовых систем с дискретным временем получены условия существования притягивающих множеств, не имеющих устойчивых орбит.

6) Для многомерной дискретной фазовой системы установлено существование гомоклинических траекторий, приводящих к рождению гиперболических аттракторов и служащих одним из условий определения полосы захвата системы управления фазой.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Грибов А.Ф., Крищенко А.П., Шахтарин Б.И. Динамика кусочно-линейной системы третьего порядка // Автоматика и телемеханика. -1980. -№2. -С. 21-30.
2. Грибов А.Ф., Крищенко А.П. Исследование полосы захвата системы ФАП высокого порядка // Всесоюзная научно-техническая конференция, посвященная 85-летию радио: Тезисы докладов. -М., 1980. -С. 11.
3. Грибов А.Ф., Петрушина И.Б., Шахтарин Б.И. Динамика систем синхронизации с кусочно-линейными характеристиками // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. -1981. -№1. -С. 167-169.
4. Шахтарин Б.И., Белоусова Т.С., Грибов А.Ф. Анализ кусочно-линейной ФАПЧ третьего порядка // Радиотехника. -1981. -Т.36, №2: -С. 23-26.
5. Грибов А.Ф., Шахтарин Б.И. Учет высших гармоник в методе квазигармонической линеаризации // Автоматика и телемеханика. -1981. -№10: -С. 183-188.
6. Грибов А.Ф., Крищенко А.П. О сложных движениях в системе ФАП // Всесоюзная научно-техническая конференция, посвященная дню радио: Тезисы докладов. -М., 1981. -С. 15.

7. Грибов А.Ф., Крищенко А.П. Условия существования сепаратрисного цикла в кусочно-линейной системе // Радиотехника и электроника. -1982. -№2. -С. 321-325.
8. Грибов А.Ф. Исследование бифуркационных циклов, несколько раз охватывающих фазовый цилиндр // Труды МВТУ им. Н.Э. Баумана. -1986. -№443. -С. 18-25.
9. Грибов А.Ф. Исследование некоторых вопросов нелинейных фазовых систем высокого порядка // Труды МВТУ им. Н.Э. Баумана. -1986. -№452. -С. 83-95.
10. Белых В.Н., Грибов А.Ф., Железняк И.Л. Сложные предельные множества траекторий динамической системы с разрывной правой частью // Разрывные динамические системы: Тезисы докладов Всесоюзной школы-семинара. -Киев, 1989. -С. 12.
11. Грибов А.Ф. Периодические траектории и странный аттрактор в кусочно-линейной фазовой системе // Нелинейные колебания механических систем: Тезисы докладов II-ой Всесоюзной конференции. -Горький, 1990. -С. 19.
12. Белых В.Н., Грибов А.Ф. Гомоклинические траектории дифференциальных уравнений системы фазовой синхронизации // Международная конференция, посвященная 100-летию зарождения радиотехники: Тезисы докладов. -М., 1995. -С. 21.
13. Грибов А.Ф., Михайлова О.В. Условия возникновения хаоса и его локализация в системе Чуа // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Тезисы докладов IV-го Международного семинара. -М., 1996. -С. 35.
14. Белых В.Н., Грибов А.Ф., Украинский Б.С. Условия гиперболичности аттракторов некоторых кусочно-линейных многомерных отображений // Моделирование и оптимизация сложных систем: Межвузовский сборник научных трудов (Нижний Новгород). -1998. -№275. -С. 3-6.
15. Грибов А.Ф., Крищенко А.П. Аналитические условия существования гомоклинической петли в системе Чуа // Нелинейная динамика и управление: Сб. статей. -М.: Физматлит, 2001. -Вып. 1. -С. 263-268.



Подписано в печать 26.10.84 Формат 60×84 1/16.

Бумага писчая. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1.

Зак. 137г Тираж 100 экз.

Типография МГТУ им. Н.Э. Баумана.
107005, Москва, ул. 2-я Бауманская, 5.