

1552427

На правах рукописи

САРБАЕВ Борис Сафиулович

УДК 539.3

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ

01.02.04 - Механика деформируемого твердого тела

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора технических наук



Москва - 1996

Работа выполнена в Московском государственном техническом университете им. Н.Э.Баумана.

Официальные оппоненты: член-корреспондент РАН В.В.Васильев;

доктор технических наук,
профессор В.Л.Данилов;

доктор физико-математических наук,
профессор В.Е.Победря.

Будущая организация - Национальный институт авиационных технологий (НИАТ)

Защита состоится 26 декабря 1996 г. в 14 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д053.15.08 при МГТУ им.Н.Э.Баумана (107005, Москва, 2-я Бауманская ул., д.5)

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МГТУ им.Н.Э.Баумана.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью, прошу направлять по адресу: 107005, Москва, 2-я Бауманская ул., д.5, Ученому секретарю диссертационного совета Д053.15.08.

Автореферат разослан _____ 199 г.

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ
диссертационного совета
к.т.н., доцент



В.В.Дубинин

Подписано к печати 2. 10. 96 Заказ 293, объем 2,0 п.л. Тир. 100 экз.

Типография МГТУ им. Н.Э.Баумана

Актуальность темы. Пластичность волокнистых композитных материалов при статическом силовом нагружении обусловлена особенностями их микроструктуры. В этом случае на микроуровне происходит интенсивное развитие необратимых изменений – разрывов волокон, пластических микродеформаций в металлическом связующем, микротрещин в хрупком полимерном связующем, расслоений и т.д. Эти процессы, в значительной степени вызванные неравномерным распределением микронапряжений, в макроэкспериментах могут порождать разнообразные нелинейные эффекты, а именно: нелинейность диаграмм деформирования, остаточные деформации при разгрузке, образование петель гистерезиса при циклическом нагружении, зависимость жесткостных свойств от гидростатического давления и многие другие.

Представляется, что в настоящее время комплексное исследование нелинейного деформирования волокнистых композитов относится к числу актуальных научных проблем. Во-первых, в современном машиностроении продолжает развиваться процесс внедрения стекло-, органических, углепластиков, металлокомпозитов, углерод-углеродных композитных материалов. При этом линейные теории деформирования, распространенные при расчете и проектировании изделий, не всегда адекватно описывают поведение композитов при силовых нагрузках. Существующие линейные теории целесообразно дополнить нелинейными, более точно отражающими свойства материалов. Недостаточное внимание к нелинейным свойствам композитов в итоге может приводить к нерациональным конструктивным решениям.

Во-вторых, в механике композитов проблема нелинейного, в том числе пластического, деформирования волокнистых композитов решена лишь частично. Весьма развитая в механике сплошной среды общая теория нелинейного деформирования анизотропных тел в значительной мере остается невостребованной. Следствием этого является недостаточно высокий научный уровень ныне существующих моделей деформирования, используемых в практических расчетах. Такие вопросы механики композитов, как теория нелинейной упругости, теория приращения деформаций, разработка методов расчета и проектирования конструкций с учетом физической нелинейности, требуют своего развития.

Целью диссертационной работы является создание на основе феноменологического метода комплекса моделей **пластического деформирования**

НТБ МГТУ им. Н.Э. Баумана



1552427

Сарбаев Б.С. Феноменологи-



рования волокнистых композитных материалов при малых деформациях и разработка методов решения физически нелинейных задач статики тонкостенных оболочек вращения из волокнистых композитов.

Достижение указанной цели предполагает:

- разработку моделей деформирования на основе положений теории нелинейной упругости и теории приращения деформаций, основанной на понятии поверхности нагружения; развитие вариантов теории приращения деформаций без поверхности нагружения;
- разработку и анализ форм записи определяющих уравнений, удобных в приложениях; создание алгоритмов и компьютерных программ для исследования пластических свойств волокнистых композитов;
- теоретическое изучение и описание экспериментально наблюдаемых эффектов пластического деформирования волокнистых композитов при различных видах силового нагружения;
- создание на основе предлагаемых определяющих уравнений вычислительных алгоритмов и компьютерных программ для решения задач статики оболочек вращения из волокнистых композитов с учетом физической нелинейности.

Научную новизну диссертационной работы составляют:

- новый вариант теории приращения деформаций с изотропно-трансляционным упрочнением для начально анизотропных тел, основанный на существовании регулярной поверхности нагружения; анализ форм записи определяющих уравнений данной теории, удобных в практических расчетах;
- эндохронная теория пластичности анизотропных тел и композитных материалов; способ обоснования данной теории, в котором она рассматривается как предельный случай классической теории, имеющий место при вырождении регулярной поверхности нагружения;
- полученные с помощью эндохронной теории аналитические зависимости, адекватно описывающие наблюдаемые в эксперименте эффекты пластического деформирования волокнистых композитов;
- способ построения тензорно-линейных определяющих уравнений для нелинейно упругих ортотропных тел; новый потенциал удельной энергии упругой деформации для ортотропного тела и вытекающие из него определяющие уравнения вариант деформационной теории пластичности для ортотропного тела при плоском напряженном состоянии;
- основанный на разработанных определяющих уравнениях комплекс

вычислительных алгоритмов, предназначенный для численного анализа физически нелинейных осесимметричных задач статике тонкостенных пластин и оболочек из волокнистых композитов; численные решения новых задач для оболочек вращения, выполненных из анизотропных материалов с пластическими свойствами.

Практическая ценность. Предложенные в диссертационной работе модели пластического поведения предназначены для описания свойств конструкционных волокнистых композитов (стекло-, угле-, органических, металлокомпозитов). Используя их, можно обосновывать программы экспериментального исследования волокнистых композитов. Вычислительный комплекс, созданный на основе определяющих уравнений, позволяет проводить численный анализ пластических свойств однонаправленных и слоистых композитов при простом, сложном, циклическом нагружении. Для описания свойств, проявляемых при частных видах нагружения, могут быть полезны относительно простые аналитические зависимости, полученные с помощью соотношений нелинейной упругости и эндохронной теории.

Разработанный вычислительный комплекс для численного анализа напряженно-деформированного состояния круглых пластин и оболочек вращения из композитных материалов при простом и сложном нагружении позволяет определять остаточные факторы в силовых корпусах, изготовленных методом намотки, выполнять расчеты комбинированных баллонов давления, проводить расчеты при многократных нагружениях. Он может быть эффективен при расчете и проектировании тонкостенных оболочечных конструкций, применяемых в авиа-, ракето-, судо-, автомобилестроении, при создании конструкций космической техники.

Настоящая диссертационная работа выполнена в рамках фундаментальных научно-исследовательских работ, утвержденных решением Государственной комиссии СМ СССР №328 от 05.10.1985г. (тема "Наполнен-МВО", № ГР Х58683 от 19.08.86г.), Межвузовской научно-технической программы "Динамика, прочность и надежность машин, приборов и конструкций", программы "Технические университеты России" (раздел 2.1 - Машиностроение), научно-исследовательской программы Международного Научного Фонда "Экспериментальное исследование и теоретическое описание процессов деформирования и разрушения анизотропных твердых тел при трехосном напряженном состоянии" (гранты МТ1000, МТ1300).

Результаты диссертационной работы внедрены в ЦНИИСМ, НИИКМТП.

Отдельные теоретические положения, алгоритмы и программы используются в учебном процессе в МГТУ им. Н.Э.Баумана (учебный курс "Механика сплошной среды").

Достоверность результатов обеспечивается последовательным применением общих принципов механики деформируемого твердого тела для разработки моделей пластичности волокнистых композитов; тщательным анализом различных подходов к обоснованию моделей пластичности и исследованием проблемы взаимосвязи разных теорий пластичности, разработанных на основе различных гипотез и понятий; сравнением теоретических и экспериментальных данных о поведении материалов при различных видах нагружения; тестированием вычислительных алгоритмов путем сравнения решений, полученных различными методами.

Апробация работы и публикации. Основные результаты диссертации доложены и обсуждены на V Всесоюзной конференции по композиционным материалам (Москва, октябрь 1981г.), IV Всесоюзном симпозиуме по механике конструкций из композиционных материалов (Новосибирск, сентябрь 1982г.), семинарах Научного совета по механике конструкций из композиционных материалов под руководством профессоров Н.А.Алфутова, В.В.Васильева, А.В.Кармишина (Москва, октябрь 1981г., декабрь 1987г.), V межотраслевом семинаре по механике конструкций из композитных материалов (Миасс, июнь 1984г.), Всесоюзной школе-семинаре "Метод конечных элементов в механике деформируемых тел" (Запорожье, ноябрь 1985г.), V и VI Всесоюзной конференции по механике полимерных и композитных материалов (Рига, октябрь 1983г., ноябрь 1986г.), семинаре кафедры теории пластичности Московского государственного университета под руководством проф. В.Д.Клюшников (ноябрь, 1989г.), III Всесоюзной конференции по механике неоднородных структур (Львов, сентябрь 1991г.), III симпозиуме "Устойчивость и пластичность в механике деформируемого твердого тела" (Тверь, сентябрь 1992г.), Всероссийской школе-семинаре "Современные проблемы механики и математической физики" (Воронеж, январь 1994г.), II Московской международной конференции по композитам (Москва, сентябрь 1994г.), IX Конференции по прочности и пластичности (Москва, январь 1996г.), семинаре кафедры механики композиционных материалов Московского государственного университета под руководством проф. В.Е.Победри (май, 1996г.).

Основные результаты диссертации изложены в 19 печатных рабо-

тах.

Объем работы. Диссертация состоит из введения, шести разделов основной части, заключения, списка цитированной литературы и приложения с актами внедрения; содержит 229 страниц машинописного текста, 2 таблицы, 115 рисунков. Список цитированной литературы состоит из 254 наименований. Общий объем диссертации - 284 страницы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность рассматриваемой проблемы, определяется цель работы, описываются основные подходы к решению проблемы, а также кратко излагается содержание разделов и формулируются новые научные результаты, представляемые к защите.

В первом разделе приведен обзор литературы по проблеме пластического деформирования волокнистых композитов. Выполнен анализ литературных источников, посвященных экспериментальному исследованию деформирования композитов, основным подходам к теоретическому изучению их пластических свойств, а также численным способам расчета оболочек вращения из композитных материалов с учетом физической нелинейности.

Нелинейные свойства волокнистых композитов при статических силовых нагрузках опытным путем изучали Алфутов Н.А., Васильев В.В., Березин А.В., Зиновьев П.А., Лебедева О.В., Махмутов И.М., Протасов В.Д., Работнов Ю.Н., Тетерс Г.А., Цветков С.В., Amijima S., Dvorak G.J., Herakovich C.T., Hashin Z., Pae K.D. и многие другие. Результаты, полученные при испытании плоских и тонкостенных цилиндрических образцов из стекло-, угле-, органопластика, бороалюминия, позволяют сделать выводы о поведении композитов при нагрузке и разгрузке в случаях плоского напряженного состояния, гидростатического нагружения. В большинстве случаев наблюдается невыполнение закона Гука. Диаграммы деформирования являются нелинейными, при разгрузке образуются остаточные деформации, происходит изменение коэффициентов Пуассона. Гидростатическое давление влияет на жесткостные и прочностные характеристики волокнистых композитов. Разгрузка является нелинейной. При циклическом нагружении образуются петли гистерезиса.

Таким образом, в общем случае деформирование волокнистых композитов является пластическим. В качестве примера на рис.1 приведены диаграммы деформирования стеклопластика с углами армирования

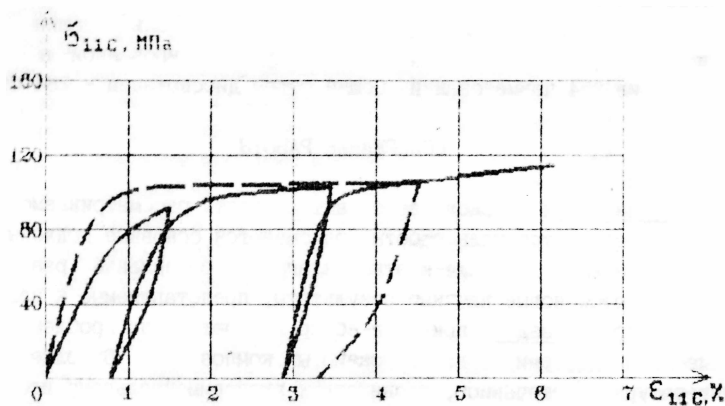


Рис.1

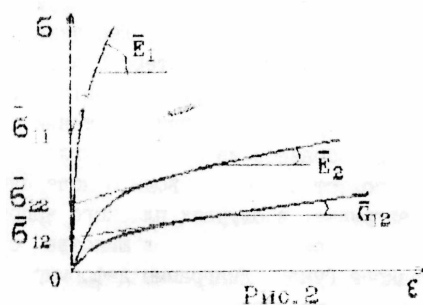


Рис.2

$\pm 45^\circ$. Сплошной и штриховой линиями показаны диаграммы, которые получили Зиновьев П.А., Тараканов А.И. и Rotem A., Hashin Z. соответственно.

Анализ опытных данных показал, что однонаправленный композит при нагружении нормальным напряжением вдоль направления армирования деформируется линейно упруго вплоть до разрушения. Поведение слоистых композитов при различных нагрузках позволяет предположить, что это свойство однонаправленного композита (монослоя) сохраняется и в случае слоистых материалов. В данной работе эта гипотеза является одной из основных при построении определяющих уравнений для волокнистых композитов. Приведенная в разделе простая механическая модель слоистого композита с симметричным перекрестным армированием, построенная с учетом гипотезы о линейно упругом поведении монослоя при нагружении нормальным напряжением вдоль волокон, качественно описывает многие экспериментально наблюдаемые эффекты, в частности, характер диаграмм деформирования, изменение коэффициентов Пуассона.

Из обзора литературных источников следует, что при теоретическом изучении пластичности волокнистых композитов в рамках феноменологического подхода, как правило, используются соотношения нелинейной упругости и теории приращения деформаций. Отметим также, что в механике сплошной среды получены фундаментальные теоретические результаты, необходимые для построения различных теорий нелинейного деформирования анизотропных тел. Такие вопросы, как элементы теории тензорных функций, описание свойств симметрии анизотропной среды, построение тензорно-линейных соотношений, рассматривали Гольденблат И.И., Лохин В.В., Лурье А.И., Новожилов В.В., Победра В.Е., Седов Л.И., Черных К.Ф., Green A.E., Rivlin R.S., Spencer A.J.M и другие. Предложенные идеи могут быть использованы в механике композитов.

Определяющие уравнения, построенные на основе соотношений нелинейной упругости, полезны при анализе поведения анизотропных тел в случае простого нагружения. Адекватные уравнения для волокнистых композитов получаются при использовании тензорно-линейных функций. Общая теория таких функций развита в работах В.Е.Победри. С ее помощью, определяя соответствующим образом инварианты тензоров, можно относительно просто и эффективно учитывать свойства симметрии анизотропной среды. При этом способы получения тензорно-линейных

определяющих уравнений для изотропных, трансверсально изотропных, ортотропных тел методически совпадают. Применительно к волокнистым композитам использование данной теории оказалось более действенным по сравнению с методом, предусматривающим введение понятий обобщенных шаровых тензоров и обобщенных девиаторов (Геогджаев В.О., Ломакин В.А., Петрищев П.П.). Показано, что определяющие уравнения для волокнистых композитов, которые ранее предложили Березин А.В., Васильев В.В., Салов В.А., Tsai S.W., Pindera M.-J., Herakovich C.T. и др., по существу являются тензорно-линейными.

В общих случаях нагружения, когда нагрузка не изменяется пропорционально одному параметру, более логичным является применение уравнений теории приращения деформаций. В работах Д.Друккера показано, что правило градиентальности тензора приращения пластических деформаций имеет универсальный характер и может быть использовано для композитов.

Из обзора следует, что при изучении свойств волокнистых композитов часто применяется вариант теории пластичности анизотропного тела, развитый Р.Хиллом для металлов. Кроме этого, определение параметра упрочнения, правила трансляции поверхности нагружения часто полностью заимствуются из теории пластичности изотропного пластически несжимаемого тела. Вряд ли такой путь в механике волокнистых композитов можно считать достаточно обоснованным. Более разумной представляется идея, согласно которой для поверхности нагружения однонаправленного композита применяется квадратичное выражение, учитывающее пластическую сжимаемость и линейно упругое поведение при нагружении нормальным напряжением вдоль волокон. Варианты такого выражения предложили Каюмов Р.А., Sun C.T., Vaziri R. Последовательным применением ассоциированного закона течения были получены зависимости теории пластичности с изотропным упрочнением, включающие выражение для параметра упрочнения.

Анализ литературы показал, что для адекватного описания пластических свойств композитов требуется дальнейшее развитие теории приращения деформаций. Основными вопросами являются выбор аналитического выражения для поверхности нагружения, определение параметра упрочнения. Микромеханические исследования, которые выполнили Работнов Ю.Н., Исупов Л.П., Dvorak G. ., показали, что для волокнистых композитов возможны сложные законы перемещения поверхности нагружения в пространстве напряжений. Поэтому одно из направлений

развития теории связано с формулировкой новых законов трансляции поверхности нагружения для анизотропного тела.

Отметим некоторые нетрадиционные подходы к описанию пластичности композитов. Беревин А.В., Кузнецов С.Ф., Парцевский В.В. развивают вариант теории приращения деформаций, в котором учитывается изменение упругих податливостей волокнистого композита в процессе деформирования. При этом по существу используется ассоциированный закон А.А.Ильюшина, учитывающий изменение характеристик упругости при пластическом течении. В ряде работ для описания поведения композитов предлагаются варианты теории пластичности без поверхности нагружения. Учитывая цели настоящей работы, обзор литературы, посвященной этой проблеме, автор привел в разделе IV.

Из обзора следует, что несмотря на некоторые успехи, достигнутые в последнее время, теория нелинейного деформирования волокнистых композитов далека от завершения. Возможности определяющих уравнений, вытекающих из теорий нелинейной упругости и приращения деформаций, по-прежнему используются недостаточно. Вместо них широко применяются приближенные способы, основанные на соображениях эвристического характера. Варианты таких соотношений предложили Васильев В.В., Зиновьев П.А., Протасов В.Д., Тараканов А.И., Филипенко А.А., Jones R.M., Petit P.H., Sandhu R.S., Tsai S.W., Tsu-Wei Chou и многие другие. В результате чаще всего получаются достаточно простые зависимости, по форме совпадающие с соотношениями закона Гука для ортотропного тела при плоском напряженном состоянии. Они удобны при проведении вычислений. Однако следует иметь в виду, что возможности данных зависимостей ограничены, а развитие требует введения многочисленных новых гипотез, как правило, частного характера.

Обзор литературы также показал, что численные методы расчета оболочек вращения из волокнистых композитов с учетом физической нелинейности разработаны недостаточно. Одна из причин заключается в ограниченном выборе математических моделей пластического деформирования композитов, удобных для выполнения численного анализа. Из существующих способов расчета наибольшее распространение получили способы, которые предложили Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Тараканов А.И. и Гузь А.Н., Чернышенко И.С. При разработке новых методов расчета оболочек вращения из волокнистых композитов целесообразно использовать опыт, накопленный при нелинейном расчете

изотропных оболочек. Из работ Виргера И.А., Васильева В.В., Зенкевича О., Ильюшина А.А., Кармишина А.В., Мяченкова В.И., Победри Б.Е., Постнова В.А., Чернышенко И.С. и других вытекает, что прикладное и научное значение имеют не только собственно определяющие уравнения, но и форма их представления. При соответствующем решении этой задачи можно использовать методы переменных параметров упругости, дополнительных нагрузок, начальных напряжений в форме О.Зенкевича.

Раздел завершается развернутыми формулировками выводов, вытекающих из обзора литературы, и целей диссертационной работы.

Второй раздел посвящен описанию нелинейных свойств композитов с помощью соотношений нелинейной упругости для ортотропного тела. В прямоугольной декартовой системе координат X_1, X_2, X_3 , оси которой совпадают с осями симметрии среды, представлен общий вид тензорно-линейных зависимостей между тензорами напряжений и малых деформаций. Такая зависимость, в частности, имеет место, если потенциал удельной энергии упругой деформации является функцией инвариантов, содержащих элементы тензора малых деформаций в степени, не превышающей вторую. В общем виде получены потенциальные определяющие уравнения для ортотропного тела, сформулированы условия существования потенциала и теорема о простом нагружении.

В частном случае можно принять, что поведение ортотропного тела при статической нагрузке определяется двумя группами механизмов деформирования. В первую группу входят механизмы деформирования при нагружении нормальным напряжением вдоль осей OX_1 и OX_2 , при нагружении касательным напряжением в плоскости OX_1X_2 . Им соответствуют инварианты $i_1(\epsilon) = \epsilon_{11}$, $i_1(\sigma) = \sigma_{11}$; $i_2(\epsilon) = \epsilon_{22}$, $i_2(\sigma) = \sigma_{22}$; $i_4(\epsilon) = \epsilon_{12}^2$; $i_4(\sigma) = \sigma_{12}^2$. Вторую группу составляют механизмы деформирования при нагружении нормальным напряжением вдоль оси OX_3 , при нагружении касательным напряжением в плоскостях OX_1X_3 и OX_2X_3 . Эти механизмы деформирования описываются инвариантами $i_3(\epsilon) = \epsilon_{33}$, $i_3(\sigma) = \sigma_{33}$; $i_5(\epsilon) = \epsilon_{13}^2$, $i_5(\sigma) = \sigma_{13}^2$; $i_6(\epsilon) = \epsilon_{23}^2$, $i_6(\sigma) = \sigma_{23}^2$ соответственно. Указанные группы механизмов деформирования не взаимодействуют между собой. В начальный момент деформирования свойства тела описываются законом Гука. Тогда потенциал удельной энергии упругой деформации можно представить в виде

$$U = U_1(i_1(\epsilon), i_2(\epsilon), i_4(\epsilon)) + U_2(i_3(\epsilon), i_5(\epsilon), i_6(\epsilon)). \quad (1)$$

Из (1) следует, что определяющие уравнения записываются в виде

двух групп уравнений, несвязанных между собой.

Предполагаем, что для монослоя выполняются условия $dU_2=0$, а также $b_{33}=b_{13}=b_{23}=0$. Потенциал U предлагается задавать следующим образом

$$U = U_1[i_1(\epsilon), i_2(\epsilon), i_4(\epsilon)] + C = (1/2)[C_{11}i_1(\epsilon)^2 + C_{22}i_2(\epsilon)^2 + 2C_{12}i_1(\epsilon) + \\ - \alpha/\beta - 1 \\ + C_{33}i_4(\epsilon)] + \frac{B(1+\beta\epsilon_0)^2}{\alpha+\beta} \left[\frac{1}{2\beta} + \frac{(1+\beta\epsilon_0)}{\alpha-\beta} \right] + C, \quad (2)$$

где C - постоянная, $q_1(\epsilon) = i_1(\epsilon)i_2(\epsilon)$, $\epsilon_0^2 = i_2(\epsilon)^2 + a^2i_4(\epsilon)$. Здесь принимается, что $a > 0$, $B > 0$; $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha > \beta$; $C_{11} > 0$, $C_{33} > 0$, $C_{11}C_{22} > C_{12}^2$. Определяющие уравнения, вытекающие из (2), описывают эффект Пуассона, а также взаимодействие механизмов деформирования при нагружениях касательным напряжением в плоскости OX_1X_2 и нормальным напряжением в направлении оси OX_2 . Вводя векторы напряжений $\{\delta\}$ и деформаций $\{\epsilon\}$, их можно представить в одной из следующих форм

$$\{\delta\} = [D_c(\epsilon)]\{\epsilon\}, \quad (3)$$

$$d\{\delta\} = [D_k(\epsilon)]d\{\epsilon\}, \quad (4)$$

где $[D_c(\epsilon)]$, $[D_k(\epsilon)]$ - матрицы секущих и касательных характеристик жесткости соответственно.

Для идентификации параметров, входящих в равенство (2), необходимо провести эксперименты на одноосное растяжение в направлениях, параллельных осям OX_1 и OX_2 , и на чистый сдвиг в плоскости OX_1X_2 . В разделе приводятся соответствующие зависимости. Типичные диаграммы деформирования, предсказываемые с помощью потенциала (2), показаны на рис.2. Диаграмма $b_{11}-\epsilon_{11}$ близка к линейной. Такое деформирование, при котором диаграмма $b_{11}-\epsilon_{11}$ является практически линейной, а диаграммы $b_{22}-\epsilon_{22}$, $b_{12}-\gamma_{12}$ - существенно нелинейными, свойственно некоторым видам стекло-, углепластиков. При развитых деформациях напряжения b_{22} и b_{12} стремятся к асимптотическим значениям. Определяющие уравнения описывают изменение коэффициента Пуассона $\nu_{12}' = |\epsilon_{22}/\epsilon_{11}|$ в процессе деформирования.

С помощью полученных определяющих уравнений, представленных в форме (4), выведены зависимости для слоистого материала. При этом предполагалось, что все слои деформируются совместно, без проскальзывания. Для слоистого композита, состоящего из n монослоев, каждый из которых характеризуется углом армирования ϕ_i и толщиной

h_i ($i=1,2,\dots,n$), матрица касательных характеристик жесткости вычисляется по формуле

$$[B_k] = \sum_{i=1}^n [T_{1i}][D_{ki}][T_{1i}]^T \delta_i, \quad (5)$$

где $[D_{ki}]$ - матрица касательных характеристик жесткости для i -го монослоя, $[T_{1i}]$ - матрица преобразования поворота системы координат на угол φ_i , δ_i - относительная толщина. В разделе приведены развернутые выражения для элементов матрицы $[B_k]$.

В качестве численного примера рассматривается описание нелинейных диаграмм деформирования для стеклопластика, которые экспериментально получили Amijima S. и Adachi T. Подробно описана процедура определения материальных параметров, предусматривающая обработку диаграмм деформирования однонаправленного композита. Для однонаправленного стеклопластика при одноосном растяжении под углом к направлению армирования и слоистого материала с симметричным перекрестным армированием при одноосном растяжении получено удовлетворительное совпадение экспериментальных и теоретических данных.

В конце раздела приведен вариант деформационной теории пластичности ортотропного тела при плоском напряженном состоянии, разработанный на основе предложенных соотношений нелинейной упругости. Особенность теории состоит в том, что условия начала пластичности, активного и пассивного нагружений сформулированы в пространстве деформаций.

Центральное место в настоящей работе занимают третий и четвертый разделы, посвященные разработке теории приращения деформаций. В третьем разделе предлагается вариант теории приращения деформаций с изотропно-трансляционным упрочнением. Используется регулярная поверхность нагружения, задаваемая квадратичным выражением относительно компонент тензора активных напряжений. В частности, для изотропного пластически несжимаемого тела поверхность нагружения задается следующим образом

$$(3/2)(s_{ij}-r_{ij})(s_{ij}-r_{ij}) = [b_0\varphi(\xi_p)]^2.$$

где b_0 - предел текучести, s_{ij} - девиатор напряжений, r_{ij} - тензор добавочных напряжений ($r_{ii}=0$); $\varphi(\xi_p)$ - функция упрочнения, для которой должны выполняться условия $\varphi(\xi_p) \geq 1$, $\varphi(0)=1$, $d\varphi/d\xi_p > 0$. Тензор r_{ij} предлагается вычислять в соответствии со следующим интегральным выражением

$$\Gamma_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\xi_p}{R} \int_0^R \phi(\xi_p, \xi_p') \frac{de_{ij}^p}{d\xi_p} d\xi_p', \quad (6)$$

где R - параметр материала ($R > 0$), e_{ij}^p - девиатор пластических деформаций, $d\xi_p = [(2/3)de_{ij}^p de_{ij}^p]^{1/2}$ - параметр Одвишта. Ядро $\phi(\xi_p, \xi_p')$ обладает следующими свойствами $\phi(\xi_p, \xi_p') > 0$, $\phi(\xi_p, \xi_p) = \alpha(\xi_p) > 0$. Формула (6) обобщает некоторые известные к настоящему времени варианты интегрального выражения для Γ_{ij} . Например, Г.Бакхаус, предложив для тензора добавочных напряжений зависимость типа (6), ядро $\phi(\xi_p, \xi_p')$ определил следующим образом (с учетом принятых здесь обозначений)

$$\phi(\xi_p, \xi_p') = F(\xi_p') \exp[-\alpha(\xi_p - \xi_p')^\gamma],$$

где α, γ - параметры материала.

Одним из требований, предъявляемых к ядру $\phi(\xi_p, \xi_p')$, является выполнение условия устойчивого деформирования, записываемого в виде $dr_{ij} de_{ij}^p > 0$. В разделе приведены достаточные условия для выполнения этого неравенства. Рассмотрены также условия перехода к ядру разностного типа, экспоненциальному ядру. Для данной теории на основе ассоциированного закона течения анализируется зависимость между приращениями девиаторов напряжений и полных деформаций. В качестве численного примера рассматривается вариант сложного нагружения изотропного тела - предварительное нагружение чистым сдвигом и последующее нагружение при плоском напряженном состоянии с постоянной интенсивностью напряжений.

Особенность теории, предложенной для анизотропного тела, заключается в том, что тензор добавочных напряжений определен с помощью интегрального выражения, учитывающего не только историю нагружения тела, но и его начальную анизотропию. При этом уравнение поверхности нагружения предлагается задавать в виде

$$2f(b_{ijkl}) = B_{ijkl} s_{ij} s_{kl} = [a\phi(\xi_p)]^2. \quad (7)$$

Здесь B_{ijkl} - симметричный, положительно определенный, невырожденный тензор IV ранга с безразмерными элементами; $\phi(\xi_p)$ - функция упрочнения. Элементы тензора B_{ijkl} , выражаемые через пределы текучести, и функция $\phi(\xi_p)$ устанавливаются в эксперименте. Материальный параметр a (например, наибольший предел текучести) имеет размерность напряжений. Параметр упрочнения ξ_p описывает историю де-

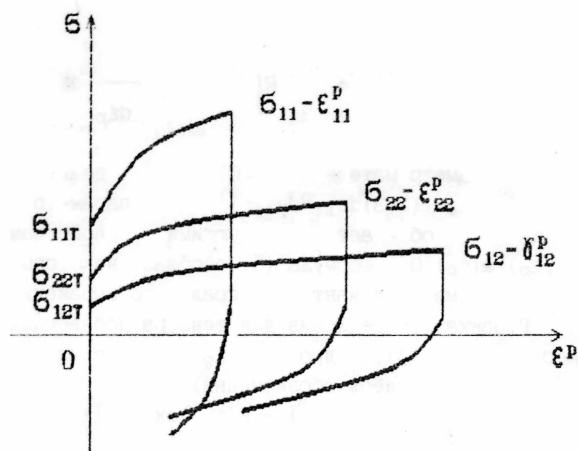


Рис.3

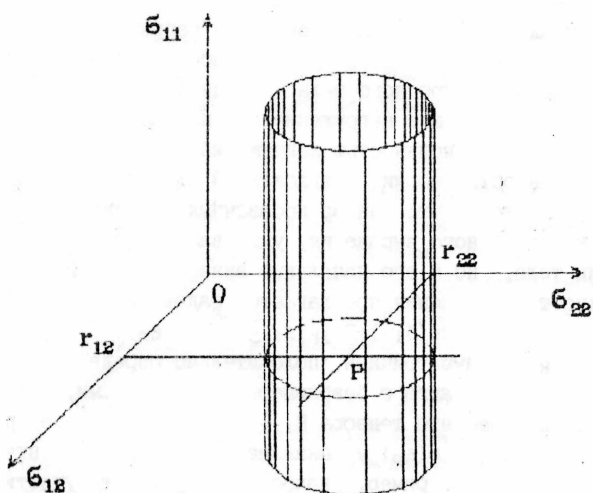


Рис.4

формирования анизотропного тела в пространстве пластических деформаций. Симметричный тензор активных напряжений s_{ij} определяется как разность $s_{ij} = b_{ij} - r_{ij}$, где b_{ij} - тензор напряжений. Для тензора добавочных напряжений предлагается выражение

$$r_{ij} = \int_0^{z_p} G_{ijkl}(z_p - z_p') \frac{d\epsilon_{kl}^p}{dz_p} dz_p', \quad (8)$$

где $dz_p = d\epsilon_p / f(\epsilon_p)$ - временноподобный параметр ("внутреннее время"), отражающий историю деформирования, причем функция $f(\epsilon_p)$ удовлетворяет условиям $f(\epsilon_p) > 1$, $df/d\epsilon_p > 0$. Тензор IV ранга $G_{ijkl}(z_p)$ определяется из анализа данных эксперимента. Используя ассоциированный закон течения, для параметра ϵ_p можно получить

$$d\epsilon_p = (F_{ijkl} d\epsilon_{ij}^p d\epsilon_{kl}^p)^{1/2}, \quad (9)$$

где тензор F_{ijkl} - тензор, обратный тензору B_{ijkl} .

Данная теория описывает пластические деформации при гидростатическом нагружении, эффект Баушингера, нелинейную разгрузку, образование петель гистерезиса при циклическом нагружении. Для изотропного тела с пластической несжимаемостью из представленных уравнений можно получить определяющие уравнения, рассмотренные выше. Предложенные уравнения содержат в себе ряд частных случаев, которые можно рассматривать как законы трансляции поверхности нагружения Ишлинского-Прагера, Циглера, обобщенные на случай анизотропного тела.

Из равенств (7)-(9) получены уравнения для пластического ортотропного тела при плоском напряженном состоянии. Линейная деформация в направлении оси Ox_3 не учитывается. Вводятся векторы напряжений $\{b\} = (b_{11}, b_{22}, b_{12})^T$ и малых деформаций $\{\epsilon\} = (\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{12})^T$. Тогда равенство (5) можно представить в матричном виде

$$2f(b_{ij}) = \{s\}^T [B] \{s\} = [a f(\epsilon_p)]^2. \quad (10)$$

Для вектора активных напряжений $\{s\} = (s_{11}, s_{22}, s_{12})^T$ имеем $\{s\} = \{b\} - \{r\}$, где $\{r\} = (r_{11}, r_{22}, r_{12})^T$ - вектор добавочных напряжений. Равенство (8) запишем так

$$\{r\} = \int_0^{z_p} [R(z_p - z_p')] \frac{d\{\epsilon_p\}}{dz_p} dz_p'. \quad (11)$$

Здесь $\{\epsilon_p\} = (\epsilon_{11}^p, \epsilon_{22}^p, \gamma_{12}^p)^T$ - вектор пластических деформаций, $[R(\epsilon_p)]$ - матрица размерностью 3×3 , определяемая из анализа экспериментальных данных. Для приращения параметра упрочнения ξ_p имеем

$$(d\xi_p)^2 = d\{\epsilon_p\}^T [B]^{-1} d\{\epsilon_p\}. \quad (12)$$

Типичные диаграммы деформирования, вытекающие из приведенных зависимостей, показаны на рис.3.

Для численного анализа пластических свойств ортотропных тел уравнения рассматриваемой теории целесообразно представить в виде

$$d\{\delta\} = [D_{ep}] d\{\epsilon\}, \quad (13)$$

где $[D_{ep}]$ - матрица упругопластических жесткостей. В разделе приведены формулы для вычисления элементов этой матрицы. С помощью зависимости (13) получено выражение для матрицы упругопластических жесткостей слоистого материала в виде, аналогичном (5).

Для однонаправленного волокнистого композита, обладающего линейно упругими свойствами при нагружении нормальным напряжением вдоль волокон, равенства (10)-(12) существенно упрощаются. Например, для поверхности нагружения получим

$$2f(\delta_{11}) = B_{22}S_{22}^2 + B_{33}S_{12}^2 = [a f(\xi_p)]^2.$$

В пространстве напряжений δ_{11} , δ_{22} , δ_{12} она представляет собой эллиптический цилиндр, ось которого параллельна оси δ_{11} (рис.4). В разделе приведены расчетные зависимости для однонаправленного композита, основанные на равенстве (13).

В качестве примера анализируется деформирование однонаправленного композита при нагрузке, разгрузке и повторном нагружении. В частном случае, когда заданы экспоненциальное ядро и линейная зависимость для $f(\xi_p)$, поведение материала можно описать относительно простыми аналитическими выражениями. Для материала типа стеклопластика рассчитаны диаграммы деформирования при одноосном нагружении. Рассматриваются однонаправленный композит и слоистый композит с симметричным перекрестным армированием. Для монослоя определяется положение поверхности нагружения в процессе деформирования.

В конце раздела приведены определяющие уравнения для идеально пластического однонаправленного композита, вытекающие из (10)-(12). С их помощью исследуется поведение композита при сложном деформировании. Полученные аналитические зависимости качественно верно описывают свойства материала.

Четвертый раздел посвящен разработке эндохронной теории пласт-

1872.427

тичности, или теории пластичности без поверхности нагружения, для анизотропных тел и волокнистых композитов. В настоящее время основные достижения теории связаны с описанием пластических свойств изотропных материалов при циклическом нагружении. Некоторые экспериментальные данные для волокнистых композитов (практическое отсутствие линейно упругого поведения, нелинейность разгрузки и др.) показывают, что имеются предпосылки к применению эндохронной теории для описания свойств композитов.

В работе значительное внимание уделено поиску взаимосвязи между соотношениями классической пластичности и эндохронной теории. С помощью простейшего одномерного определяющего уравнения показано, что возможны два различных взгляда на определяющие уравнения пластического тела. В первом случае исходными являются уравнения эндохронной теории пластичности. При некоторых условиях из них можно получить зависимости теории пластичности с поверхностью нагружения. Основное внимание должно быть уделено теоретическому обоснованию эндохронной теории пластичности. Во втором случае соотношения теории пластичности с поверхностью нагружения, основанные на классических допущениях, принимаются за первооснову. Аналитические уравнения эндохронной теории получаются в результате процедуры обобщения. Важным моментом является выбор способа устранения неаналитичности определяющих уравнений.

Анализ литературы показал, что возможны различные способы обоснования эндохронной теории без привлечения положений классической пластичности. В разделе они условно названы "термодинамический подход", "подход на основе теории упругопластических процессов А.А.Ильюшина", "гипоупругий подход", "вероятностный подход". В большинстве случаев рассматриваются изотропные тела. Различные аспекты термодинамического подхода развивают Вакуленко А.А., Valanis K., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Как правило, применяются соотношения термодинамики необратимых процессов и новые параметры состояния - внутренние переменные. В итоге получаются уравнения наследственного типа относительно внутреннего времени. Искомые уравнения можно также получить путем упрощения общих соотношений теории упругопластических процессов А.А.Ильюшина. Упрощения основаны на принципе затухающей памяти. Этот подход предложили Кадашевич Ю.И., Мосолов А.А., Динариев О.Ю. В гипоупругом подходе, который исследуют Ключников В.Д., Bazant Z.P., Kolymbas D., диффе-

ренциально нелинейные соотношения эндохронной теории по существу рассматриваются, как частный случай гипотезы модели сплошной среды, предложенной К.Трусделлом. Вероятностное обоснование эндохронной теории разработано Кадашевичем Ю.И., Мосоловым А.А.

Известны также способы обоснования, в которых уравнения классической теории с поверхностью нагружения, заданы априори. Путем обобщения таких уравнений Ю.И.Кадашевич получил тензорно-параметрические уравнения, в которых не используется поверхность нагружения. В.Д.Клошников показал, что уравнения, аналогичные уравнениям эндохронной теории для изотропного тела, можно получить из уравнений сингулярной пластичности при вырождении поверхности нагружения в отрезок прямой.

Представляется, что рационально подходить к эндохронной теории именно с позиций классической теории пластичности. При этом появляется возможность для определения новой взаимосвязи эндохронной и классической теорий. На ее основе можно провести сравнительный анализ методов решения задач и результатов, вытекающих из этих теорий. Наконец, обобщая приемы, с помощью которых в случае изотропных тел осуществляется переход от уравнений классической теории к уравнениям эндохронной теории, можно наметить пути получения определяющих уравнений для анизотропного тела.

В настоящей работе уравнения эндохронной теории предлагается рассматривать как предельный случай уравнений теории приращения деформаций с изотропно-трансляционным упрочнением, имеющий место при вырождении регулярной поверхности нагружения в точку. Для этого используются соотношения, предложенные в разд. III. Тогда тензор пластических деформаций отождествляется с тензором полных деформаций, а тензор добавочных напряжений - с тензором напряжений. Отсюда, в частности, вытекает, что эндохронную теорию можно рассматривать как приближенную теорию по отношению к теории с изотропно-трансляционным упрочнением при малых значениях пределов текучести.

В разделе приведен вывод уравнений для изотропного тела. В качестве примера использования выведенных уравнений рассматривается сложное нагружение на плоскости σ_{12} - σ_{11} при постоянной интенсивности напряжений. Полученные результаты сравниваются с результатами, приведенными в разд. III. Обе системы уравнений, описывающих деформирование тела, существенно отличаются друг от друга, но

приводят к качественно одинаковым результатам.

При обосновании эндохронной теории пластичности для анизотропного тела в соотношениях (7), (8) принимается: $a=0$ и $G_{ijkl}(0)=E_{ijkl}$, где E_{ijkl} - тензор модулей упругости. Тогда получим

$$\delta_{ij} = \int_0^z C_{ijkl}(z-z') \frac{d\epsilon_{kl}}{dz} dz'. \quad (14)$$

Здесь z - внутреннее время, причем $dz=d\xi/f(\xi)$. Величина ξ , описывающая историю деформирования, является аналогом параметра ξ_p из (9). Для рассматриваемой теории зависимость (9) трансформируется в следующее равенство

$$(d\xi)^2 = g_{ijkl} d\epsilon_{ij} d\epsilon_{kl}. \quad (15)$$

Компоненты симметричного положительно определенного тензора IV ранга g_{ijkl} зависят от свойств пластического тела. Равенства (14) и (15) являются уравнениями эндохронной теории пластичности для анизотропного тела. Они справедливы для любых направлений догрузки из данной точки в пространстве напряжений. Результаты, согласующиеся с опытными данными, можно получить, применяя в (14) экспоненциальное ядро. При этом уравнения целесообразно представить в следующем обобщенном виде

$$d\{\delta\} = [D] d\{\epsilon\} - d\{\delta^*(\xi)\}, \quad (16)$$

где $[D]$ - матрица жесткости линейно упругого тела, $\{\delta^*(\xi)\}$ - вектор дополнительных напряжений, зависящих от параметра ξ .

Из соотношений (14), (15) получены уравнения для трансверсально изотропного тела, для ортотропного тела при плоском напряженном состоянии. На их основе построены определяющие уравнения для слоистых материалов.

Завершается раздел анализом некоторых следствий из эндохронной теории, необычных с позиций классических представлений. Показано, что при простом нагружении из уравнений эндохронной теории по существу получаются соотношения деформационной теории, причем разгрузка в такой теории происходит по нелинейному закону. Отмечается, что при определенных условиях матрица упругопластических жесткостей из (13) может быть вырожденной, несимметричной. Уравнения эндохронной теории не подчиняются постулату Друккера, в общем

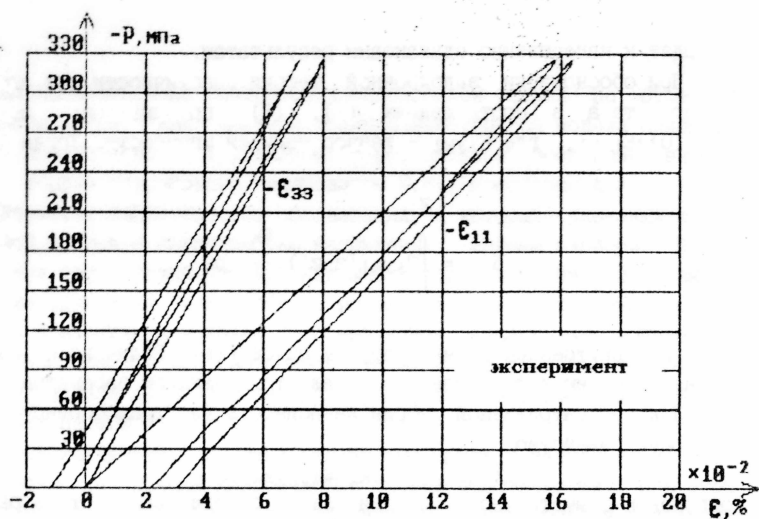


Рис.5

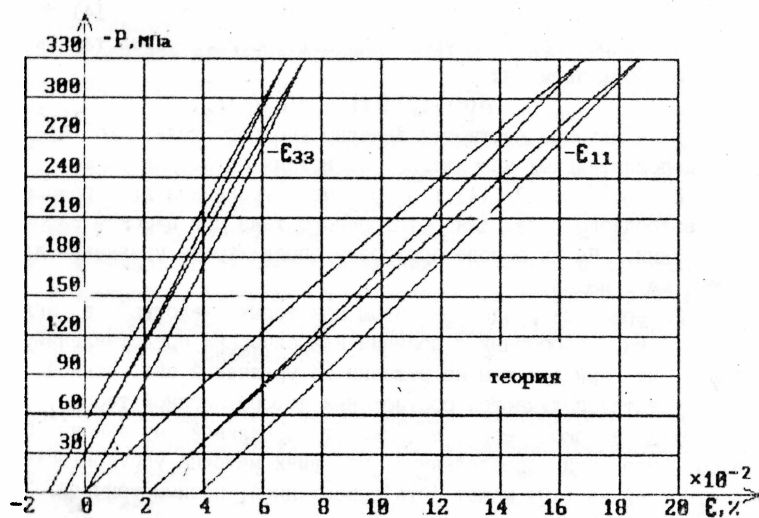


Рис.6

случае они являются дифференциально нелинейными. Указанные особенности теории полезно иметь в виду при описании свойств материалов, при разработке численных методов решения краевых задач прикладной теории пластичности.

В пятом разделе пластические свойства волокнистых композитов описываются с помощью эндохронной теории пластичности. Выбор этой теории предопределили сравнительная простота определяющих уравнений, высокая эффективность вычислительных алгоритмов, построенных на их основе. В ряде случаев удается получить обзоримые аналитические решения, которые удовлетворительным образом согласуются с экспериментальными данными.

В разделе описываются алгоритмы численного интегрирования определяющих уравнений, приводится описание возможностей вычислительной программы, предназначенной для анализа пластических свойств волокнистых композитов при различных видах нагружения. В качестве примера рассматривается описание диаграмм деформирования однонаправленного бороалюминия и стеклопластикового монослоя. Используются диаграммы деформирования, которые в опыте получили Зиновьев П.А., Цветков С.В. и Amijima S., Adachi T. В зависимости от решаемой задачи деформирование однонаправленного композита моделируется уравнениями либо для трансверсально изотропного тела, либо для ортотропного тела при плоском напряженном состоянии. При выбранных материальных параметрах и функциях совпадение теории и эксперимента удовлетворительное.

Предложенные уравнения эффективны при анализе свойств волокнистых композитов в случае гидростатического нагружения. Эксперименты, выполненные Зиновьевым П.А. и Цветковым С.В. на образцах из одононаправленного бороалюминия при гидростатическом сжатии, показали, что кривые нагрузки и разгрузки не совпадают. При разгрузке имеют место остаточные деформации разных знаков. Такое поведение не имеет ничего общего с поведением, предсказываемым классической теорией Мизеса-Хилла. На рис.5 и 6 соответственно показаны экспериментальные и теоретические диаграммы (ось OX_3 направлена вдоль волокон). Как видно, совпадение результатов удовлетворительное.

Определяющие уравнения для слоистых материалов описывают изменение коэффициентов Пуассона волокнистых композитов. Экспериментально установлено, что эти параметры в процессе деформирования в зависимости от схемы армирования могут как увеличиваться, так и

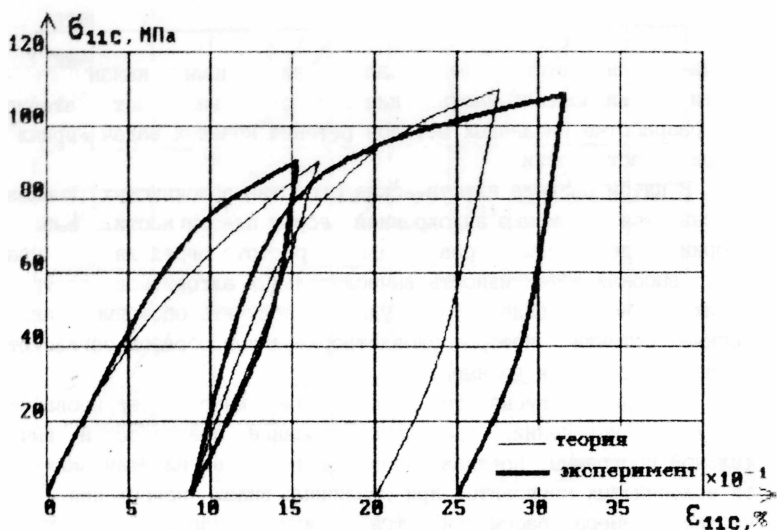


Рис.7

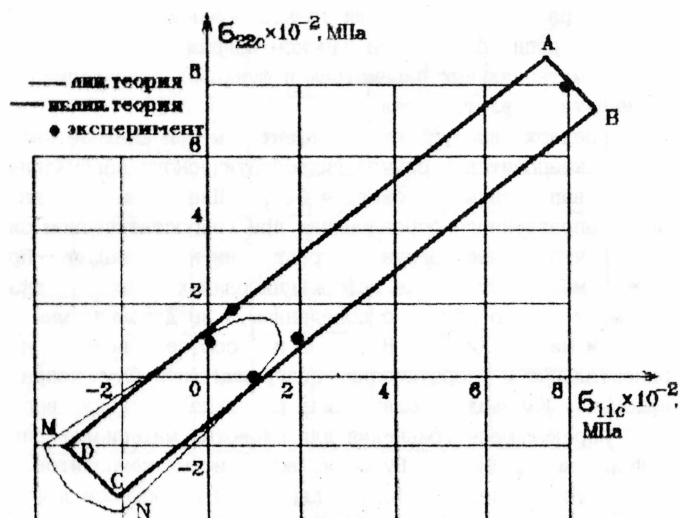


Рис.8

уменьшаться, устремляясь к некоторым предельным значениям. В разделе показано, что этот эффект можно описать, применив интегральное преобразование Лапласа. При этом для монослоя принимаются экспоненциальное ядро и гипотеза о линейном упругом поведении при нагружении нормальным напряжением вдоль волокон. В частности, для слоистого композита с симметричным перекрестным армированием получено следующее выражение для асимптотического значения коэффициента $\nu_{12c}' = |\epsilon_{22c}/\epsilon_{11c}|$

$$\nu_{12c}^* = (\cos^2\varphi + \nu_{21}\sin^2\varphi) / (\sin^2\varphi + \nu_{21}\cos^2\varphi),$$

где ν_{21} - коэффициент Пуассона линейно упругого монослоя, φ - угол армирования. Показано, что соотношение между начальным значением коэффициента Пуассона ν_{12c} и его асимптотическим значением зависит от параметра $k = E_2/[G_{12}(1+\nu_{21})]$, где E_2 - модуль упругости монослоя при растяжении в направлении, перпендикулярном направлению армирования, G_{12} - модуль сдвига монослоя в плоскости армирования.

В данном разделе выполнен анализ нелинейного поведения слоистых композитов при простом нагружении. Приведены аналитические зависимости для слоистых композитов с углами армирования $\varphi = \pm 45^\circ$ при пропорциональном деформировании, задаваемом равенством $\epsilon_{11c} = k\nu_{12c}$. С их помощью можно получить диаграммы деформирования, которые удовлетворительным образом совпадают с результатами опытов Авакяна Р.А., Лебедевой О.В. для стеклопластика. Численным интегрированием определяющих уравнений построены диаграммы деформирования слоистых композитов с различными схемами армирования при пропорциональном нагружении на плоскости напряжений $\epsilon_{11c} - \epsilon_{22c}$. Теоретические результаты сравнивались с данными экспериментального исследования Зиновьева П.А., Тараканова А.И., Фомина Б.Я. Здесь также теория и эксперимент находятся в удовлетворительном соответствии.

В ряде случаев для слоистых композитов при циклически изменяющихся нагрузках получены опытные данные, которые описываются уравнениями эндохронной теории. В качестве примера на рис.7 приведено сопоставление теоретической и экспериментальной диаграммы деформирования для стеклопластика с углами армирования $\varphi = \pm 45^\circ$ при одноосном растяжении. Экспериментальные результаты заимствованы из работ Зиновьева П.А., Тараканова А.И., Фомина Б.Я. В разделе также выполнено исследование определяющих уравнений при циклически изменяющихся нагрузках. В частности, определены условия, при которых уравнения описывают стабилизацию петли гистерезиса при мягком цик-

лическом нагружении.

Полученные данные показывают, что при исследовании слоистых композитов учет нелинейности существенно уточняет деформативные и прочностные свойства как слоистого материала, так и монослоя. В общем случае монослой испытывает сложное нагружение. При этом нормальные напряжения в пластическом монослое, действующие в направлении вдоль волокон, могут превосходить нормальные напряжения в этом направлении для линейно упругого монослоя. Этот результат важен, так как в волокнистых композитах именно нормальное напряжение, действующее вдоль волокон, является основным при расчете предельных напряжений. В итоге предельные характеристики слоистого композита, определенные с учетом свойств пластичности монослоя, могут существенным образом отличаться от таковых, определенных в соответствии с законом Гука. В качестве примера на рис.8 приведены кривые разрушения на плоскости σ_{11} - σ_{22} для стеклопластика с углами армирования $\varphi = \pm 45^\circ$ (экспериментальные точки заимствованы из работ Зиновьева П.А., Тараканова А.И. и др.). При расчете для монослоя использовался известный критерий разрушения

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= F_+ \text{ при } \sigma_{11} > 0; |\sigma_{11}| = F_- \text{ при } \sigma_{11} < 0, \\ a\sigma_{22}^2 + b(\sigma_{22})^2 + c(\sigma_{12})^2 &= 1. \end{aligned}$$

Здесь F_+ , F_- - пределы прочности монослоя при растяжении и сжатии вдоль волокон соответственно; параметры a, b, c зависят от пределов прочности при растяжении и сжатии поперек волокон F_+ , F_- и предела прочности при сдвиге в плоскости армирования F_{12} .

Данный пример подчеркивает важность учета пластических свойств при анализе разрушающих нагрузок для конструкций, изготовленных из слоистых композитов. Расчет и проектирование с учетом свойств пластичности композитов позволяет создавать рациональные конструкции, в полной мере использующие прочностные свойства конструкционного материала.

Шестой раздел посвящен разработке численных способов решения задач статике тонкостенных пластин и оболочек, выполненных из волокнистых композитных материалов. Для описания свойств композитов используются определяющие уравнения, предложенные в разделах II-IV. Применяется классическая теория пластин и оболочек, основанная на гипотезах Кирхгофа-Лява. Рассматриваются осесимметричные задачи в геометрически линейной постановке.

В разделе предложен способ расчета комбинированной оболочки.

Внутренний слой изготовлен из металла, а внешний слой образован намоткой упругих волокон. С помощью уравнений эндохронной теории пластичности для изотропного тела получена относительно простая система дифференциальных уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние оболочки. Уравнения справедливы как для активного, так и для пассивного нагружений. Интегрирование системы уравнений осуществляется методом Рунге-Кутты. В численном примере анализируются остаточные напряжения и деформации, возникающие при разгрузке. Данный способ расчета может быть полезен при оптимальном проектировании комбинированных баллонов.

Расчет круглой ортотропной пластины (рис.9), представленный в разделе, имеет в основном теоретическое значение. Относительная простота системы разрешающих уравнений позволяет сосредоточить внимание на особенностях решения нелинейной задачи. Полученные численные результаты удобно использовать для тестирования сложных вычислительных комплексов. Для описания нелинейных свойств материала использовались соотношения из разделов II-IV, записанные в формах (3), (4), (13), (16). Диаграмма деформирования ортотропного материала показана на рис.10 (кривая 1 - нелинейная упругость; кривая 2 - теория пластичности с трансляционным упрочнением; кривая 3 - эндохронная теория). В зависимости от типа определяющих уравнений и формы их представления нелинейная задача решалась методом последовательных приближений за один шаг нагружения, методом шагового нагружения с решением линеаризованной системы уравнений на каждом шаге, методом шагового нагружения с использованием дополнительных нагрузок. На каждом шаге система разрешающих уравнений интегрировалась методом начальных параметров. Рассчитанные эпюры окружных и радиальных моментов показаны на рис.11 (кривые 1 - линейное решение; кривые 2 - нелинейная упругость; кривые 3 - эндохронная теория). График на рис.12 характеризует изменение прогиба при $r=r_2$ в зависимости от приложенной силы (кривая 1 - линейное решение; кривая 2 - теория пластичности с изотропным упрочнением; кривая 3 - эндохронная теория).

Таким образом, решения для пластины, полученные различными методами, практически совпали. По сравнению с линейным решением окружные изгибающие моменты уменьшаются, а радиальные - увеличиваются. Этот эффект следует принимать во внимание, исследуя пластины и оболочки из ортотропных материалов, обладающих качественно раз-

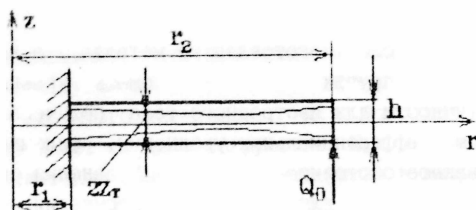


Рис.9

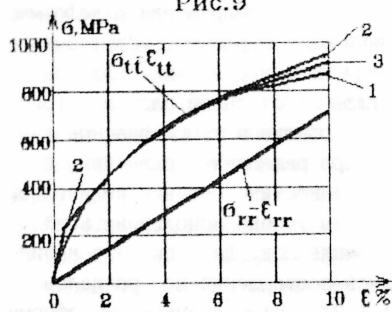


Рис.10

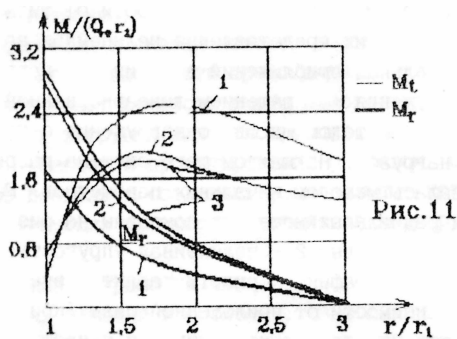


Рис.11

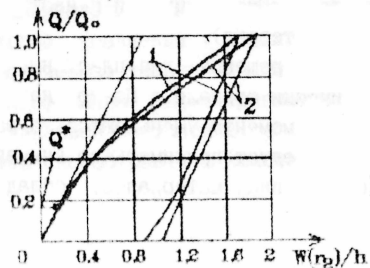


Рис.12

личными деформативными свойствами при нагружении нормальными напряжениями вдоль осей симметрии материала. Как отмечалось выше, такие свойства характерны для волокнистых однонаправленных композитов.

В разделе приведены основные соотношения метода конечных элементов для оболочек вращения. При этом использовался кольцевой конечный элемент. Описаны алгоритмы решения физически нелинейных задач. Среди них - метод последовательных приближений, метод переменных параметров упругости, вариант метода начальных напряжений О.Зенкевича. Последний метод эффективен при использовании уравнений эндохронной теории. В этом случае на каждом шаге нагружения решается нелинейная задача.

Один из алгоритмов метода начальных напряжений, записанный для конечного элемента, выглядит следующим образом. На i -ом шаге нагружения выполняется итерационная процедура, причем для l -ой итерации имеем

$$\Delta\{\delta_i^{(l)}\} = [K]^{-1} \Delta\{\Psi_i^{(l-1)}\},$$

$$\Delta\{\Psi_i^{(l-1)}\} = \Delta\{F\}_i - \Delta\{R\}_i - \int_0^{S_k} [B]^T \Delta\{\Sigma_i^{(l-1)}\} r ds,$$

$$\Delta\{\delta_i^{(l)}\} = \Delta\{\delta_i^{(l-1)}\} + \Delta\{\delta_i^{(l)}\}.$$

Здесь: $[K]$ - матрица жесткости конечного элемента, $\{\delta\}$ - вектор узловых перемещений, $\{\Sigma\}$ - вектор внутренних силовых факторов, $\{F\}$ - вектор узловых сил, $\{R\}$ - вектор узловых сил, обусловленный действием распределенной нагрузки в пределах элемента при $0 \leq s \leq s_k$, $[B]$ - матрица связи вектора узловых перемещений и вектора деформаций координатной поверхности элемента. Вычисления продолжаются до тех пор, пока не выполнится условие $\Delta_i^{(l)} < \epsilon_0$, где $\Delta_i^{(l)}$ - невязка, вычисляемая по заданному правилу, ϵ_0 - малое число, определяющее точность вычислений. После выполнения необходимого количества итераций определяются векторы узловых перемещений и внутренних силовых факторов

$$\{\delta_i\} = \{\delta_{i-1}\} + \Delta\{\delta_i\},$$

$$\{\Sigma_i\} = \{\Sigma_{i-1}\} + \Delta\{\Sigma_i\}.$$

При $l=1$ можно принять $\Delta\{\delta_i^{(1)}\} = \Delta\{\delta_{i-1}\}$. На первом шаге нагружения при $i=1$ решается линейная задача. Приведенный алгоритм вычислений справедлив также для разгрузки. В этом случае для m -го шага нагружения, при котором начинается разгрузка, с целью ускорения сходи-

мости в качестве первого приближения можно задать решение линейной задачи (при $i=1$), т.е. $\Delta\{\delta_m^{(1)}\}=\Delta\{\delta_1\}$.

Как видно, с помощью итерационной процедуры уравнивается приращение нагрузки. Вектор приращения узловых перемещений на шаге нагружения вычисляется суммированием приращения искомого вектора, вычисленного на каждой итерации, с текущим значением вектора приращения узловых перемещений. По сравнению с другими вариантами метода начальных напряжений данный вариант приводит к более точным результатам.

В разделе представлен сравнительный анализ рассмотренных способов решения. Выбор способа зависит от вида теории, используемой для описания нелинейных свойств материала, от целей выполняемого исследования.

Рассмотрено три примера расчета, в которых для описания свойств материалов применяются уравнения эндохронной теории. В первом примере, имеющем тестовый характер, анализируются напряжения в тонкостенном цилиндрическом образце с углами намотки $\varphi=\pm 45^\circ$ при растяжении меридиональной погонной силой. Показано, что монослой находится в условиях сложного нагружения. При разгрузке в нем возникают остаточные касательные напряжения и угловые деформации.

Во втором примере выполнен расчет силового корпуса, изготовленного методом непрерывной намотки. Силовой корпус, рассматриваемый как тонкостенная оболочка вращения, имеет цилиндрическую часть и равнонапряженные днища. Расчет с учетом физической нелинейности существенным образом уточняет напряженно-деформированное состояние данной конструкции. Для напряжений σ_{11} , действующих вдоль волокон однонаправленного композита на внешней поверхности силового корпуса, в нелинейном расчете получены значения, превосходящие по абсолютной величине значения напряжений, соответствующие линейному решению. Это важно, так как именно напряжения σ_{11} определяют несущую способность силового корпуса при статическом нагружении. Напротив, для напряжений σ_{22} и σ_{12} , действующих в однонаправленном композите на внешней поверхности корпуса поперек волокон и при сдвиге в плоскости армирования соответственно, линейные решения по абсолютному значению превышают нелинейные. При этом имеет место тенденция к сглаживанию пиковых значений напряжений. При разгрузке образуются остаточные напряжения и деформации. По этой причине подобные расчеты актуальны при проектировании изделий, функционирую-

щих в условиях многократного нагружения, при контроле остаточных перемещений и деформаций в процессе испытаний силовых корпусов.

Третий пример посвящен расчету сферического комбинированного баллона, внешний композитный слой которого изготовлен многовонной намоткой. Металлический лейнер представляет собой тонкостенную сферическую оболочку с полусными отверстиями. Для оценки подходов к проектированию данной конструкции был выполнен анализ напряженно-деформированного состояния шар-баллона в двух вариантах. Параметры шар-баллона I варианта назначались из условия постоянства толщины по образующей, а параметры шар-баллона II варианта - из условия получения квазиизотропного материала на экваторе баллона. Для обоих случаев толщина баллона на экваторе оставалась неизменной. Расчеты показали, что в I варианте напряжения распределены по образующей более равномерно по сравнению со II вариантом. Несмотря на это при проектировании баллона данной конструкции может быть полезным требование квазиизотропности материала на экваторе оболочки. Из расчетов с учетом физической нелинейности следует, что в этом случае напряжения в слоях распределены наиболее рационально, а масса баллона меньше, чем масса баллона со схемой намотки, обеспечивающей равную толщину по образующей. При циклическом нагружении данной конструкции теория предсказывает образование петель гистерезиса на диаграмме "внутреннее давление - радиальное перемещение на экваторе".

В заключении приведены выводы, вытекающие из результатов диссертационной работы. Они заключаются в следующем.

1. На основе феноменологического метода создан комплекс новых моделей пластического деформирования волокнистых композитов. В его состав входят:

- новый вариант теории приращения деформаций с изотропно-трансляционным упрочнением для начально анизотропных тел и волокнистых композитов, использующий регулярную поверхность нагружения;
- эндохронная теория пластичности анизотропных тел и волокнистых композитных материалов;
- тензорно-линейные определяющие уравнения для нелинейно упругого ортотропного тела, вытекающие из нового потенциала удельной энергии упругой деформации; вариант деформационной теории пластичности для ортотропного тела при плоском напряженном состоянии.

2. В работе предложен новый способ обоснования эндохронной теории пластичности, в котором она рассматривается как предельный случай одного варианта теории приращения деформаций с изотропно-трансляционным упрочнением, имеющий место при вырождении регулярной поверхности нагружения в точку; такой подход к эндохронной теории позволяет выполнить сравнительный анализ уравнений эндохронной теории и уравнений классической теории с поверхностью нагружения, исследовать особенности эндохронной теории.

3. Разработанные модели пластического деформирования адекватно описывают экспериментально наблюдаемые эффекты деформирования волокнистых композитов; с их помощью в ряде случаев получены обзорные аналитические зависимости, удобные при исследовании свойств пластичности волокнистых композитов. Уравнения эндохронной теории описывают деформирование волокнистых композитов при простом нагружении, при циклическом нагружении, при гидростатическом нагружении. Использование нелинейных определяющих уравнений для слоистых материалов позволяет уточнить напряженное состояние монослоя, рассчитать предельные нагрузки, соответствующие опытным данным.

4. Предложенные определяющие уравнения представлены в форме, удобной для проведения практических расчетов; на их основе разработан комплекс вычислительных алгоритмов, предназначенный для численного анализа физически нелинейных задач статике тонкостенных оболочек вращения из волокнистых композитов; созданы соответствующие компьютерные программы; получены численные решения новых задач статике оболочек вращения, выполненных из волокнистых композитов с пластическими свойствами.

5. Полученные результаты способны оказать влияние на дальнейшее развитие прикладной теории пластичности анизотропных тел и механики композитных материалов. С их помощью открываются возможности для решения таких актуальных проблем механики композитов, как изучение поведения волокнистых композитов при сложных видах нагружения, исследование явлений гистерезиса при циклическом нагружении, влияние гидростатического нагружения на прочностные и жесткостные свойства, построение критериев разрушения, учитывающих историю нагружения и ряд других проблем. На основе полученных соотношений для волокнистых композитов можно разрабатывать технические теории ползучести, нелинейные определяющие уравнения, учитывающие действие температурного нагрева.

6. В работе заложены научные основы для разработки новых методов решения задач механики конструкций из волокнистых композитов. С помощью предложенных определяющих уравнений можно проводить исследование напряженно-деформированного состояния оболочек с учетом деформаций поперечного сдвига в физически нелинейной постановке, изучать концентрации напряжений в анизотропных телах и т.д. Вычислительные алгоритмы и реализующие их компьютерные программы могут быть полезны при расчете и проектировании новых конструкций из волокнистых композитов.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Зиновьев П.А., Сарбаев В.С. Применение теории пластичности без поверхности текучести для описания неупругого поведения анизотропной среды // Тезисы докладов V Всесоюзной конференции по композиционным материалам. - Москва, 1981. - С.175-176.

2. Зиновьев П.А., Сарбаев В.С. Способ описания неупругого поведения композиционных материалов // Изв. ВУЗов. Машиностроение. 1982. - N.7. - С.7-12.

3. Зиновьев П.А., Сарбаев В.С. Об одной модели неупругого поведения композиционных материалов типа стеклопластика // Тезисы докладов IV Всесоюзного симпозиума по механике конструкций из композиционных материалов. - Новосибирск, 1982. - С.22-23.

4. Сарбаев В.С. Применение теории пластичности без поверхности текучести для описания неупругого поведения слоистых композиционных материалов // Изв. ВУЗов. Машиностроение. - 1984. - N1. - С.3-7.

5. Сарбаев В.С. О неупругом поведении слоистых стеклопластиков // Изв. ВУЗов. Машиностроение. - 1984. - N4. - С.6-10.

6. Сарбаев В.С. Расчет оболочек вращения с учетом физической нелинейности // Изв. ВУЗов. Машиностроение. - 1984. - N6. - С.20-23.

7. Зиновьев П.А., Сарбаев В.С. Эндохронная теория нелинейного деформирования слоистых композитных материалов // Механика композитных материалов. - 1985. - N3. - С.423-430.

8. Сарбаев В.С., Лебедева О.В. Нелинейное поведение слоистых армированных материалов при простом деформировании // Изв. ВУЗов. Машиностроение. - 1987. - N8. - С.16-20.

9. Сарбаев Б.С. Об изменении коэффициентов Пуассона слоистых армированных материалов при нелинейном деформировании // Труды МГТУ им. Н.Э.Баумана. - 1987. - N475. - С.44-55.

10. Сарбаев Б.С. Вариант нелинейных определяющих уравнений для волокнистых полимерных материалов // Применение пластмасс в машиностроении: Сб. научн. тр. МВТУ им. Н.Э.Баумана. - 1987. - N22. - С.10-13.

11. Сарбаев Б.С. Эндохронная теория пластичности анизотропных сред // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. - 1991. - N2. - С.106-116.

12. Сарбаев Б.С. Применение эндохронной теории пластичности для описания неупругих свойств волокнистых композитов // Механика неоднородных структур: Тезисы докладов III Всесоюзной конференции. - Львов, 1991. - Ч.2. - С.298.

13. Сарбаев Б.С. О некоторых свойствах уравнений эндохронной теории пластичности // Устойчивость и пластичность в механике деформируемого твердого тела: Тезисы докладов III симпозиума. - Тверь, 1992. - С.29.

14. Сарбаев Б.С. Математические модели нелинейного поведения слоистых композитов // Механика конструкций из композиционных материалов: Сб. статей / Под общ. ред. В.В.Васильева, В.Д.Протасова. - М.: Машиностроение, 1992. - С.323-339.

15. Сарбаев Б.С. Нелинейно упругие свойства волокнистых композитов // Современные проблемы механики и математической физики: Тезисы докладов всероссийской школы-семинара. - Воронеж, 1994. - С.84.

16. Сарбаев Б.С. Об одном варианте теории пластичности с трансляционным упрочнением // Изв. РАН. Механика твердого тела. - 1994. - N1. - С.65-72.

17. Сарбаев Б.С. Компьютерное моделирование пластического поведения волокнистых композитов // Тезисы докладов II Московской международной конференции по композитам. - 1994. - С.228-229.

18. Sarbayev B.S. An Endochronic Theory of Plastic Deformation of Fibrous Composite Materials // Comput. Mater. Science. - 1995. - V.4. - P.220-232.

19. Сарбаев Б.С. Вариант теории пластичности с изотропно-трансляционным упрочнением для анизотропного тела // Сб. аннотаций докладов IX международной конференции по прочности и пластичности. - М., 1996. - С.93.