

1552423

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени Н. Э. Баумана

---

На правах рукописи

Наумов Андрей Михайлович

УДК 531.8

РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННО-КРИВОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ,  
НАГРУЖЕННЫХ СИЛАМИ ПРОИЗВОЛЬНОГО НАПРАВЛЕНИЯ

01.02.06 - Динамика, прочность машин,  
приборов и аппаратуры.

АВТОРЕФЕРАТ  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук.

Москва - 1996

Работа выполнена в Московском государственном техническом университете имени Н. Э. Баумана.

Научный руководитель - доктор технических наук, профессор  
СВЕТЛИЦКИЙ В. А.

Официальные оппоненты - доктор технических наук, профессор  
ШАПОВАЛОВ Л. А.  
- доктор технических наук, профессор  
ТЕМИС Ю. М.

Ведущая организация - МАИ

Защита состоится 26 декабря 1996 г. в 14.30 на заседании  
Специализированного совета Д.053.15.08 при Московском государс-  
твенном техническом университете имени Н.Э.Баумана по адресу:  
107005 Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МГТУ  
им. Н. Э. Баумана.

Автореферат разослан " \_\_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 1996 г.

Ученый секретарь Специализированного совета  
кандидат технических наук, доцент



Дубинин В. В.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ.

Актуальность темы. Очень многие элементы конструкций можно рассматривать, используя модель стержня (прямолинейные, плоские криволинейные, пространственно-криволинейные). Диапазон использования "стержней" в технике очень широк, начиная с упругих стержневых элементов приборов (например, спирали, винтовые стержни) и кончая шлангами для перекачки жидкости и для подъема конкреций со дна морей и океанов.

Упругие стержневые элементы широко используются в технике в качестве чувствительных элементов средств измерений, в информационных и мехатронных системах, в низкочастотных механических фильтрах, аккумуляторах механической энергии, акселерометрах, в системах активной и пассивной виброударозащиты.

Упругие элементы, входящие в мехатронные системы, должны обладать очень высокой надежностью, близкой к надежности радиоэлектронных элементов. Только в этом случае надежность системы в целом будет высокой. В настоящее время надежность мехатронных систем определяется надежностью ее механических элементов, которая ниже надежности радиоэлектронных элементов. Для повышения надежности механических упругих элементов, в том числе чувствительных элементов первичных измерительных приборов информационных систем и систем управления, необходимо глубокое понимание физических особенностей процессов, которые имеют место при их эксплуатации и учете этих процессов при обосновании математических моделей и методов расчета упругих элементов.

Особенно большое значение при разработке высокоточных методов расчета стержней имеет правильный учет действующих на упругие элементы сил (например, сил инерции, аэродинамических сил и т. д.). В общем случае действующие на стержни силы могут иметь произвольные направления по отношению к единичному вектору, направленному по касательной к осевой линии стержня, что существенно осложняет учет этих сил в уравнениях равновесия. Кроме того, многие силы есть силы с обратной связью, когда они зависят от деформированного состояния стержня (например, аэродинамические силы). Повышенные требования к точности расчетов заставляют рассматривать многие прикладные задачи механики стержней в нелинейной постановке, чтобы оценить погрешность в расчетах по сравнению с решением этой же задачи в линейной постановке. Так как получить решение в аналитической форме нельзя, то остается единственно воз-

НТБ МГТУ им. Н.Э. Баумана



1552423

Наумов А.М. Расчет простра

ионный вариант - развивать и использовать численные методы исследования (компьютерное моделирование, вычислительный эксперимент).

Несмотря на большое число публикаций, посвященных механике стержней, многие проблемы, как теоретические, так и прикладные, остались пока неразработанными. К таким проблемам относятся:

1) учет в уравнениях равновесия (и малых колебаний) приложенных к стержню распределенных и сосредоточенных сил произвольного направления, которые в процессе деформирования стержня изменяются как по модулю так и по направлению. Модули проекций этих сил зависят от перемещения точек осевой линии стержня и от углов поворота связанных осей;

2) разработка алгоритма и численных методов определения геометрических характеристик стержня (кривизн произвольной пространственной осевой линии стержня, элементов матриц преобразования единичных векторов в зависимости от дуговой координаты);

3) численные методы исследования, в линейной и нелинейной постановке, взаимодействия стержней с потоком воздуха или жидкости.

Именно этим задачам механики стержней посвящена данная диссертация.

Цель работы заключается в разработке методов расчета гибких пространственно-криволинейных стержней, нагруженных распределенными силами произвольного направления с определением напряженно-деформированного состояния.

Методика исследований. В диссертационной работе используются как теоретические методы так и методы численного исследования систем нелинейных дифференциальных уравнений равновесия пространственно-криволинейных стержней (метод последовательных нагружений и метод дискретного продолжения решения по параметру). Линеаризованные уравнения равновесия в первом методе на каждом шаге решаются методом начальных параметров.

Научная новизна результатов, полученных в работе, заключается: 1) в разработке методов численного решения нелинейных уравнений статики пространственно-криволинейных стержней, нагруженных силами произвольного направления;

2) в разработке алгоритма определения проекций произвольной внешней нагрузки в связанных осях с учетом зависимости нагрузки от деформированного состояния стержня;

3) в решении ряда новых прикладных задач, имеющих практическое значение.

Практическая ценность заключается в разработанной методике расчета пространственно-криволинейных стержней, нагруженных произвольно направленными силами с обратной связью, когда они зависят от деформированного состояния стержня. Результаты, полученные в работе, могут быть использованы для расчета и проектирования широкого класса упругих стержневых элементов машин и приборов. Основные теоретические результаты работы используются в учебном процессе.

Достоверность результатов обеспечивается корректностью сформулированных задач, принятых расчетных схем и моделей и адекватных этим моделям уравнениям статики гибких упругих стержней. Достоверность расчетов подтверждается совпадением результатов, полученных с помощью двух численных методов, а также совпадением результатов некоторых тестовых задач с имеющимися данными в литературе.

Внедрение. Результаты, полученные в диссертации, могут быть использованы в учебном процессе при чтении лекций по специальным дисциплинам, входящим в программы подготовки инженеров ряда машиностроительных специальностей.

Апробация работы. Основные результаты работы были изложены: 1) в докладе "Статика и динамика поджатых цилиндрических пружин в инерционном поле" на научно-технической конференции молодых ученых и специалистов факультета "Робототехника и комплексная автоматизация" МВТУ им Н.Э. Баумана 26 мая 1988 г.;

2) в докладе "Теория и методы компьютерного моделирования задач статики стержневых пространственно-криволинейных элементов, взаимодействующих с потоком воздуха или жидкости" на Второй Международной научно-технической конференции "Актуальные проблемы фундаментальных наук", Россия, Москва, 24-28 января 1994 года, МГТУ им. Н.Э. Баумана;

3) на конференции, посвященной Межвузовской Научно-технической Программе "Динамика, прочность и надежность машин, приборов и конструкций", 23-25 февраля 1995 года, МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Публикации. Основное содержание работы опубликовано в трех печатных работах.

Объем работы. Диссертационная работа состоит из предисловия, трех разделов (глав), приложения, списка используемых источников из 77 наименований. Работа содержит 137 страниц машинописного текста, 62 рисунка, 5 таблиц.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

В предисловии обосновывается необходимость разработки теории и методов расчета элементов конструкций, сводящихся к расчетной схеме гибких стержней, нагруженных инерционными и аэродинамическими силами произвольного направления, дается краткий обзор работ отечественных и зарубежных авторов, наиболее близких к теме диссертации. Формулируются основные задачи и обосновывается актуальность темы диссертации.

В первой главе приводятся основные уравнения равновесия пространственно-криволинейных стержней. В безразмерном виде они представляют собой следующую систему уравнений:

$$\frac{d\bar{Q}}{d\varepsilon} + \bar{x} \times \bar{Q} + \bar{q} + \bar{P} \delta(\varepsilon - \varepsilon_p) = 0; \quad (1)$$

$$\frac{d\bar{M}}{d\varepsilon} + \bar{x} \times \bar{M} + \bar{e}_1 \times \bar{Q} + \bar{m} + \bar{M} \delta(\varepsilon - \varepsilon_m) = 0; \quad (2)$$

$$L_1 \frac{d\bar{v}}{d\varepsilon} + L_2 \bar{x}_0^{(1)} - A^{-1} \bar{M} = 0; \quad (L_2 = L - E); \quad (3)$$

$$\frac{d\bar{U}}{d\varepsilon} + \bar{x} \times \bar{U} + (l_{11} - 1) \bar{e}_1 + l_{21} \bar{e}_2 + l_{31} \bar{e}_3 = 0; \quad (4)$$

$$\bar{M} = A (\bar{x} - \bar{x}_0^{(1)}); \quad A = \begin{vmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{vmatrix}; \quad (5)$$

где  $\bar{Q}$  и  $\bar{M}$  - соответственно вектора внутренних сил и моментов,  $\bar{q}$  - внешняя распределенная нагрузка,  $\bar{m}$  - внешний распределенный момент,  $\bar{P}, \bar{M}$  - соответственно внешние сосредоточенные сила и момент, приложенные в сечениях с координатами  $\varepsilon_p$  и  $\varepsilon_m$ ,  $\delta$  - функция Дирака,  $A_{ij}$  - жесткости при кручении и изгибе ( $A_{11} = G I_K$ ,  $A_{22} = E I_{x_2}$ ,  $A_{33} = E I_{x_3}$ ; где  $E, G$  - модули упругости соответственно первого и второго рода,  $I_{x_2}, I_{x_3}$  - моменты инерции сечения стержня относительно главных осей  $x_2, x_3$ ;  $I_K$  - геометрическая характеристика сечения при кручении),  $\bar{U}$  - вектор перемещений;  $\bar{x}$  - вектор кривизн ( $\bar{x} = \sum_{j=1}^3 x_j \bar{e}_j$ );  $\bar{x}_0^{(1)}$  - вектор начальных кривизн ( $\bar{x}_0^{(1)} = \sum_{j=1}^3 x_{j0} \bar{e}_j$ );  $L, L_1$  - некоторые матрицы размера  $[3 \times 3]$ , элементы которых зависят от углов  $v_j$ ;  $l_{i1}$  - элементы матрицы  $L$ .

Исследование равновесия стержня удобно проводить, используя уравнения в проекциях на связанные оси. Кроме того, в связанных осях компоненты  $Q_i$  и  $M_i$  векторов  $\vec{Q}$  и  $\vec{M}$  имеют четкий физический смысл ( $Q_1$  - осевая сила,  $Q_2$  и  $Q_3$  - перерезывающие силы,  $M_1$  - крутящий момент,  $M_2$  и  $M_3$  - изгибающие моменты).

В уравнения (1), (2) входят внешние силы и моменты. Эти уравнения справедливы для больших перемещений стержня под действием внешних нагрузок, поэтому необходимо учесть возможное поведение внешних сил в процессе нагружения стержня. Наиболее простыми являются случаи поведения внешней нагрузки, когда нагрузка "мертвая" или когда она "следящая". В прикладных задачах поведение нагрузки при деформировании стержня может быть и более сложным (например, сосредоточенные силы, следящие за фиксированной точкой или линией в пространстве, или распределенная аэродинамическая нагрузка, возникающая при взаимодействии стержня с потоком воздуха или жидкости и т. д.).

Поведение внешней нагрузки играет основную роль при определении напряженно-деформированного состояния стержня. Если внешняя нагрузка "мертвая" и постоянная по модулю, а уравнения равновесия записываются в проекциях на неподвижные (декартовы) оси в базисе  $\{\vec{i}\}$ , то проекции сил  $q_{x_j}, m_{x_j}, p_{x_j}, m_{x_j}$  не зависят от деформированного состояния стержня. Если внешняя нагрузка следящая и постоянная по модулю, а уравнения записываются в связанном базисе  $\{\vec{e}\}$ , то проекции  $q_i, m_i, p_i, m_i$  также не зависят от деформированного состояния стержня. Во всех остальных случаях при записи проекций внешней нагрузки в рассматриваемой системе координат необходимо использовать матрицы перехода от связанного базиса деформированного стержня к декартовому неподвижному базису и наоборот. В последующих главах рассмотрены задачи статики, когда действующие на стержень силы нельзя отнести ни к мертвым, ни к следящим, что осложняет их решение, так как проекции сил на оси (неподвижные и подвижные) зависят от перемещений точек осевой линии стержня и от углов поворота связанных осей. Методы учета поведения сил при нагружении подробно изложены во второй главе.

Частный случай уравнений равновесия пространственно-криволинейного стержня, когда компоненты векторов перемещений  $u_j$  и углы поворота  $\psi_j$ , а также приращения кривизн  $\Delta\kappa_j$  можно считать малыми величинами:

$$\frac{d\bar{Q}}{d\varepsilon} + A_x \bar{Q} + \bar{q}_0 + \bar{P}_0 \delta(\varepsilon - \varepsilon_p) + \Delta \bar{q} + \Delta \bar{P} \delta(\varepsilon - \varepsilon_p) = 0; \quad (6)$$

$$\frac{d\bar{M}}{d\varepsilon} + A_x \bar{M} + A_1 \bar{Q} + \bar{m}_0 + \bar{m}_0 \delta(\varepsilon - \varepsilon_m) + \Delta \bar{m} + \Delta \bar{m} \delta(\varepsilon - \varepsilon_m) = 0; \quad (7)$$

$$\frac{d\bar{\vartheta}}{d\varepsilon} + A_x \bar{\vartheta} - A^{-1} \bar{M} = 0; \quad (8)$$

$$\frac{d\bar{U}}{d\varepsilon} + A_x \bar{U} + A_1 \bar{\vartheta} = 0; \quad (9)$$

где  $\Delta \bar{q}$ ,  $\Delta \bar{m}$ ,  $\Delta \bar{P}$ ,  $\Delta \bar{m}$  - приращения векторов внешних сил, зависящие от перемещений точек осевой линии стержня и углов поворота связанных осей.

Во второй главе рассматриваются линейные и нелинейные задачи статики стержней, нагруженных произвольными по направлению силами.

В начале главы рассмотрена линейная задача, имеющая прикладное значение при расчете упругих элементов акселерометров. На цилиндрическую пружину, являющуюся чувствительным элементом прибора, например, акселерометра, с присоединенной сосредоточенной массой  $M$ , которая может перемещаться только в направлении оси  $x_1$  (рис. 1) действуют распределенные силы инерции  $\bar{q}$ , в общем случае не совпадающие по направлению с осью  $x_1$ . Если считать пружину безмассовой, то никаких дополнительных смещений точки  $O_1$  по оси  $x_1$  не будет. При учете массы пружины появляются дополнительные смещения, которые вносят погрешность (если они не учтены) в показания прибора.

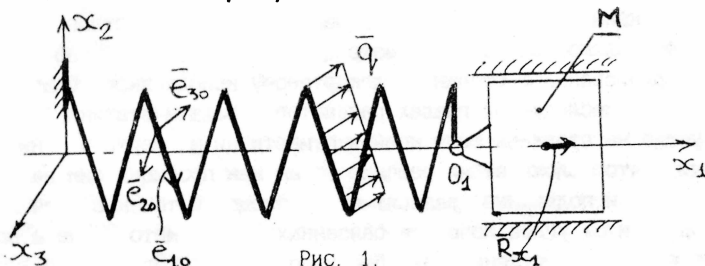


Рис. 1.

Решение сформулированной задачи требует: 1) определения проекций вектора  $\bar{q}$  на оси координат, связанные с осевой линией винтового стержня и 2) определения напряженно-деформированного состояния пружины, которое необходимо как для определения смещения точки  $O_1$  по оси  $x_1$ , так и для определения напряжений, возни-

кающих в пружине. Задача рассматривается в линейной постановке.

При высокоточных расчетах необходимо учитывать массу пружины, чтобы показания акселерометра были максимально точными. Поэтому задачу можно сформулировать следующим образом: определить дополнительные осевые (по оси  $x_1$ ) смещения точки  $O_1$  цилиндрической пружины, нагруженной произвольной по направлению распределенной "мертвой" нагрузкой.

Для численного решения уравнений равновесия, содержащих элементы  $\ell_{ij}$  матрицы  $L^0$ , необходимо знать, как они зависят от безразмерной дуговой координаты  $\varepsilon$  ( $\ell_{ij}^0 = \ell_{ij}^0(\varepsilon)$ ). Поэтому рассмотрим коротко алгоритм получения элементов матрицы, зависящих от  $\varepsilon$ . Для этого уравнение винтовой линии было представлено в параметрическом виде:

$$x_1 = R_0 \operatorname{tg} \alpha_0 \cdot t; \quad x_2 = R_0 \cos t; \quad x_3 = R_0 \sin t, \quad (10)$$

где  $t$  - параметр осевой линии.

Выразим параметр  $t$  через длину дуги  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \int_0^t \sqrt{(x_1')^2 + (x_2')^2 + (x_3')^2} dt = t \sqrt{R_0^2 + (R_0 \operatorname{tg} \alpha_0)^2}.$$

Поэтому:

$$t = \varepsilon / \sqrt{R_0^2 + R_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_0}. \quad (11)$$

Безразмерные координаты точек осевой линии стержня:

$$\begin{aligned} x_1(\varepsilon) &= R_0 \operatorname{tg} \alpha_0 \gamma \varepsilon; \quad (\gamma = 1 / \sqrt{R_0^2 + R_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_0}); \\ x_2(\varepsilon) &= R_0 \cos \gamma \varepsilon; \quad x_3(\varepsilon) = R_0 \sin \gamma \varepsilon. \end{aligned} \quad (12)$$

Радиус-вектор  $\bar{r}$  и его первая производная соответственно равны:

$$\bar{r} = x_j(\varepsilon) \bar{i}_j; \quad d\bar{r}/d\varepsilon = \bar{e}_{10} = x_j'(\varepsilon) \cdot \bar{i}_j.$$

С другой стороны, единичный орт  $\bar{e}_{10}$ , выраженный через проекции на декартовы оси:

$$\bar{e}_{10} = \ell_{11}^0 \bar{i}_1 + \ell_{12}^0 \bar{i}_2 + \ell_{13}^0 \bar{i}_3,$$

где  $\ell_{aj}^0$  - элементы матрицы  $L^0$  преобразования базиса  $\{\bar{i}\}$  к базису  $\{\bar{e}_0\}$ . Таким образом, первые три компоненты матрицы  $L^0$  известны:

$$\ell_{11}^0 = R_0 \operatorname{tg} \alpha_0 \cdot \gamma; \quad \ell_{12}^0 = -R_0 \gamma \cos \gamma \varepsilon; \quad \ell_{13}^0 = R_0 \gamma \sin \gamma \varepsilon.$$

Воспользовавшись формулами Серре-Френе, определяющими выражения для производных единичных векторов базиса можно получить

все остальные компоненты матрицы  $L^0$ . Она выглядит так:

$$L^0 = \begin{pmatrix} \bar{e}_{10} & \bar{e}_{20} & \bar{e}_{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \lambda_0 & -\cos \lambda_0 \sin \lambda_0 \varepsilon & \cos \lambda_0 \varepsilon \\ 0 & -\cos \lambda_0 \varepsilon & \sin \lambda_0 \varepsilon \\ \cos \lambda_0 & \sin \lambda_0 \sin \lambda_0 \varepsilon & -\sin \lambda_0 \cos \lambda_0 \varepsilon \end{pmatrix} \quad (13)$$

где  $\lambda_0 = \cos \alpha_0 / R_0 = 2\pi I$ ,  $I$  - число витков пружины.

В таблице приведена погрешность показания прибора в зависимости от отношения массы пружины  $m_{пр}$  к массе груза  $M$ . Погрешность определялась из соотношения:

$$\Delta = \frac{U_{x1} - U_{x1}^c}{U_{x1}} \cdot 100\%,$$

где  $U_{x1}$  - перемещение массы вдоль оси  $x_1$  с учетом инерционности пружины,  $U_{x1}^c$  - перемещение массы без учета инерционности пружины.

|                    |        |       |       |       |       |       |       |      |
|--------------------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| $\frac{m_{пр}}{M}$ | 0.0287 | 0.051 | 0.204 | 0.319 | 0.459 | 0.625 | 0.816 | 1.03 |
| $\Delta\%$         | 1.41   | 2.47  | 9.2   | 13.66 | 18.56 | 23.7  | 28.84 | 33.9 |

Далее во второй главе коротко излагается алгоритм численного решения нелинейных уравнений равновесия стержня методом последовательных нагружений.

Решая нелинейные уравнения (1)-(5) методом последовательных нагружений, получим на  $m$ -ом шаге шаге линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая в векторной форме записи имеют вид (где  $\beta < 1$  - коэффициент, показывающий, какая доля нагрузки приходится на один шаг нагружения):

$$\bar{Y}^{(m)}(\varepsilon) = -A^{(m-1)}(\varepsilon) \cdot \bar{Y}^{(m)}(\varepsilon) + \beta \bar{f}^{(m-1)}(\varepsilon), \quad (14)$$

где  $\bar{Y}^{(m)} = [\bar{q}^{(m)}, \bar{M}^{(m)}, \bar{v}^{(m)}, \bar{u}^{(m)}]^T$ ,

$$A^{(m-1)} = \begin{pmatrix} A_{xx}^{(m-1)} & A_{qx}^{(m-1)} A^{-1} & 0 & 0 \\ A_{x1} & A_{xx}^{(m-1)} + A_M^{(m-1)} \cdot A^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -A^{-1} & A_{xx}^{(m-1)} & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & A_{xx}^{(m-1)} \end{pmatrix};$$

$\bar{f}^{(m-1)}$  - вектор, зависящий от внешней нагрузки.

Элементы матриц  $A_{xx}^{(m-1)}, A_{qx}^{(m-1)}, A_M^{(m-1)}$  определяются из результатов вычис-

лений на предыдущих шагах нагружения. Решим уравнения (14):

$$\bar{Y}^{(m)} = K^{(m)} \bar{C}^{(m)} + \bar{Y}_1^{(m)}. \quad (15)$$

Задачи статики стержней является двухточечными краевыми задачами. Компоненты вектора  $\bar{C}^{(m)}$  находятся из краевых условий при  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$ , что дает при определении компонент вектора  $\bar{C}^{(m)}$  два уравнения:

$$\bar{Y}^{(m)}(0) = \bar{C}^{(m)}; \quad (16)$$

$$\bar{Y}^{(m)}(1) = K^{(m)}(1) \bar{C}^{(m)} + \bar{Y}_1^{(m)}(1). \quad (17)$$

Уравнения (16)-(17) дают возможность определить двенадцать компонент вектора начальных параметров  $\bar{C}^{(m)}$ .

Также во второй главе исследуется вышеизложенным численным методом НДС цилиндрической пружины с переменным углом подъема витков при поджатии и при действии распределенной инерционной нагрузки (рис. 2а).

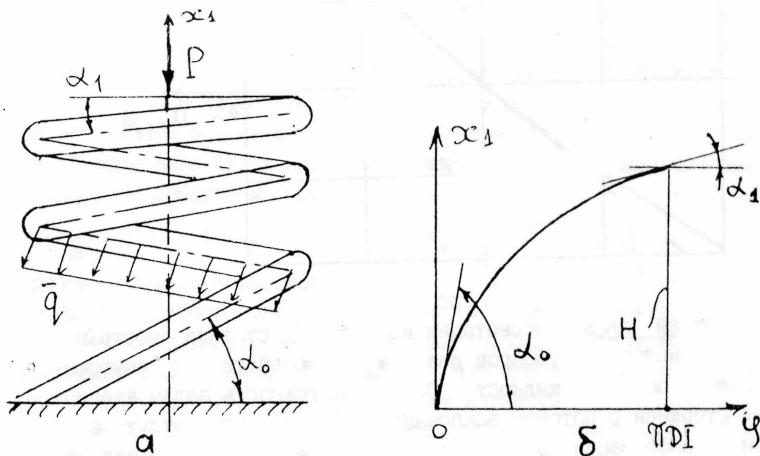


Рис. 2.

Уравнение винтовой линии описывается в параметрическом виде (развертка пружины на плоскость показана на рис. 2б):

$$\begin{aligned} x_1(\varphi) &= b\varphi + b_1\varphi^2; & x_2(\varphi) &= R_0 \cos \varphi; \\ x_3(\varphi) &= R_0 \sin \varphi; & (R_0 &= R/l); \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\psi$  и  $\psi_1$  - некоторые постоянные, определяющиеся из граничных условий при  $\varepsilon = 0 \quad \alpha = \alpha_0$ , при  $\varepsilon = 1 \quad \alpha = \alpha_1$ . При этом кривизна и кручение винтовой линии как функции центрального угла принимают следующий вид:

$$\Omega_{30} = R_0 \sqrt{R_0^2 + (\psi + 2\psi_1 \varphi)^2 + 4\psi_1^2} / [R_0^2 + (\psi + 2\psi_1 \varphi)^2]^{3/2}; \quad (19)$$

$$\Omega_{10} = (\psi + 2\psi_1 \varphi) / [R_0^2 + (\psi + 2\psi_1 \varphi)^2 + 4\psi_1^2].$$

На рис. 3 представлена упругая характеристика пружины при кинематическом растяжении и сжатии при следующих числовых характеристиках: диаметр пружины  $D = 100$  мм, диаметр проволоки  $d = 1$  мм, число витков  $I = 3$ ,  $\alpha_0 = 40$  град,  $\alpha_1 = 6$  град,  $H$  - высота пружины,  $U_{x1}$  - перемещение конца пружины в осевом направлении.

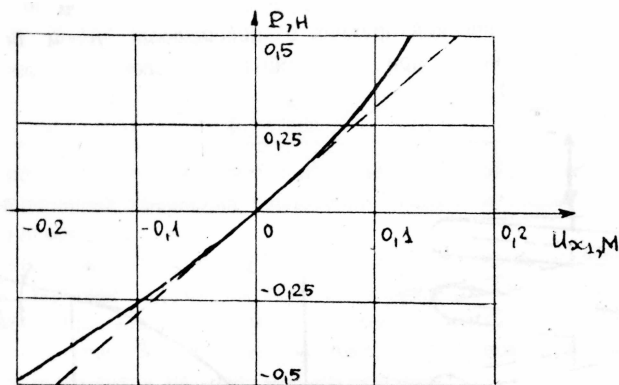


Рис. 3.

В третьей главе диссертации исследуется статика пространственно-криволинейных трубопроводов при взаимодействии с внутренним и внешним потоками жидкости. Основная сложность задач взаимодействия стержней с потоком заключается в том, что отсутствует необходимая информация об аэродинамических силах, которые зависят как от профиля обтекаемого стержня, так и от ориентации осевой линии стержня относительно направления потока. При больших скоростях потока равновесные формы стержней с малой жесткостью могут сильно отличаться от естественных форм, что приводит к нелинейным задачам статики стержня в потоке. Обычно при рассмотрении статики стержня в потоке подразумевается, что обтекание стержня потоком

является стационарным (без срывов), что справедливо только в определенном диапазоне скоростей потока для стержней круглого поперечного сечения и стержней с обтекаемым профилем.

В монографии В. А. Светлицкого "Механика стержней" т. 1 подробно изложена методика определения аэродинамических сил, действующих на стержень со стороны внешнего потока. Система уравнений равновесия трубопровода, взаимодействующего с внутренним потоком жидкости, отличается от исходной системы уравнений (1)-(5) только первым уравнением для внутренних сил, которое выглядит следующим образом:

$$\frac{d\bar{Q}}{d\xi} + \bar{\alpha} \times \bar{Q} + \bar{\alpha} \times [(\rho_0 + n_1 w_0^2) \bar{e}_1] + \bar{\gamma} + \bar{q} + \bar{P} \delta(\xi - \xi_p) = 0; \quad (20)$$

где  $\rho_0 = \rho_0^f \ell^2 / A_{33}(0)$ ;  $\rho_0^f = \rho_c F$  - размерная сила внутреннего давления,  $\rho_c$  - давление жидкости,  $F$  - площадь просвета сечения трубопровода,  $w_0, w_0^f$  - соответственно безразмерная и размерная скорость движения жидкости внутри трубки ( $w_0 = w_0^f / \ell^2 \sqrt{A_{33}(0)} / ((m_1 + m_2) \ell^4)$ ),  $n_1 = m_2 / (m_1 + m_2)$ ;  $m_1$  - погонная масса трубопровода,  $m_2$  - масса жидкости, приходящаяся на единицу длины трубопровода;  $\bar{\gamma} = (m_1 + m_2) \bar{g}$  - погонная сила веса трубопровода с жидкостью;  $\bar{q}$  - распределенная аэродинамическая сила. Необходимо заметить, что если трубопровод с внутренним потоком жидкости находится во внешнем потоке жидкости, то в этом случае погонная сила веса трубопровода будет определяться с учетом выталкивающей архимедовой силы следующим образом:

$$\bar{\gamma} = [F_{\text{тр}} (\rho_{\text{тр}} - \rho_{\text{ж}}^*) + F (\rho_{\text{ж}}^B - \rho_{\text{ж}}^*)] \bar{g},$$

где  $F_{\text{тр}}$  - площадь кольцевого сечения трубопровода;  $\rho_{\text{тр}}$  - плотность материала трубопровода;  $\rho_{\text{ж}}^*$  - плотность жидкости внутри трубопровода;  $\rho_{\text{ж}}^B$  - плотность внешнего потока жидкости. При выводе данного уравнения было сделано допущение, что стержень заполнен стационарным потоком идеальной несжимаемой жидкости.

Сформулированная нелинейная задача взаимодействия трубопровода с внешним и внутренним потоком жидкости решалась, наряду с вышеизложенным методом последовательных нагружений, также методом дискретного продолжения решения по параметру. Этот метод позволяет решить исходную нелинейную систему уравнений равновесия стержня (1)-(5) без предварительной линеаризации. Было решено две прикладные задачи.

В первой задаче определяется НДС винтового цилиндрического

трубопровода (змеевика) и его новые равновесные формы при взаимодействии его с внешним и внутренним потоками жидкости (рис. 4). Также был рассмотрен змеевик с промежуточной опорой. Геометрия цилиндрического трубопровода характеризуется следующими параметрами: 1) средний диаметр витка -  $D$ ; 2) средний диаметр трубы -  $d$ ; 3) толщина стенки трубы -  $\delta$ ; 4) угол подъема витков -  $\alpha_0$ ; 5) число витков -  $I$ .

Характеристики внешнего и внутреннего потоков: 1) скорость внешнего потока, характеризующаяся модулем  $|\vec{V}_0|$  и направлением, задающимися в декартовых координатах направляющими косинусами  $\cos \beta_i$ , где  $\beta_i$  - углы между вектором  $\vec{V}_0$  и координатными осями  $x_i$ ; 2) скорость внутреннего потока -  $W_0$ ; 3) давление в потоке -  $p_0$  (принимается постоянным по всей длине змеевика); 4) плотность внешнего потока -  $\rho_x^*$ ; 5) плотность жидкости внутри трубы -  $\rho_x^B$ . На рис. 5 и рис. 6 представлены соответственно формы равновесия и график эквивалентного напряжения для змеевика со следующими характеристиками (без опоры и с промежуточной опорой при  $E_{оп} = 0,5$ ):  $D = 50$  мм,  $d = 5$  мм,  $\alpha_0 = 30^\circ$ ,  $I = 10$ ,  $|\vec{V}_0| = 2,5$  м/с,  $p_0 = W_0 = 0$ ,  $\beta_1 = 90^\circ$ ,  $\beta_2 = 0^\circ$ ,  $\beta_3 = 90^\circ$ ,  $\delta = 0,3$  мм,  $\rho_x^B = \rho_x^* = 1000$  кг/м<sup>3</sup>. Из анализа графиков напряжений видно, насколько уменьшаются напряжения при использовании промежуточной опоры.

Во второй задаче определяется поведение резинокордного трубопровода (шланга), заполненного потоком жидкости и провисающего в внешнем потоке (рис. 7). Реальный шланг имеет отличные от нуля жесткости, что следует учитывать при расчетах. Как правило, в работах, посвященных статике и динамике шлангов, заполненных жидкостью и находящихся в потоке, они рассматриваются как абсолютно гибкие стержни.

Для оценки жесткости шланга считалось, что эквивалентное значение изгибной жесткости шланга  $(EI)_E$  есть сумма жесткостей на изгиб отдельных слоев структуры. Отдельные слои рассматривались как однородные концентрические цилиндрические оболочки и в процессе изгиба влиянием их друг на друга пренебрегалось. Аналогично с жесткостью на кручение. Таким образом:

$$(EI)_E = \sum_{j=1}^k E_j I_j \approx \pi \sum_{j=1}^k E_j z_j^3 t_j; \quad (21)$$

$$\text{3) } (GI)_E \approx 2\pi \sum_{j=1}^k G_j z_j^3 t_j;$$

где  $E_j$  - модуль упругости первого рода в осевом направлении  $j$ -

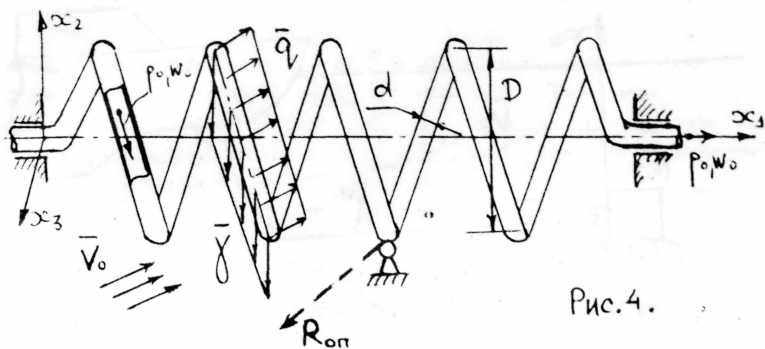


Рис.4.

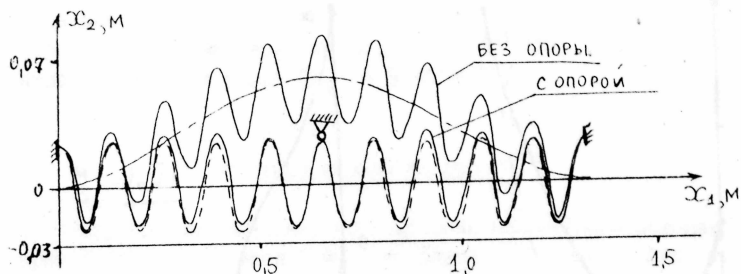


Рис.5.

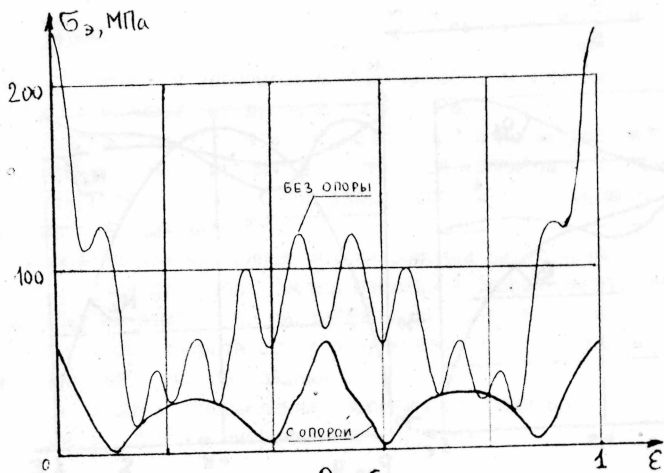
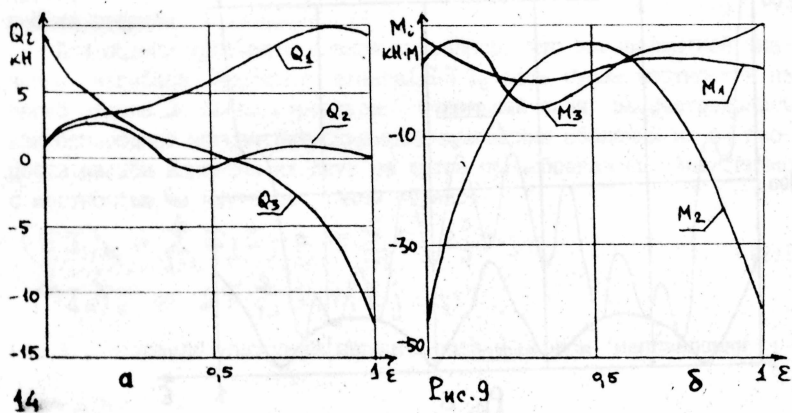
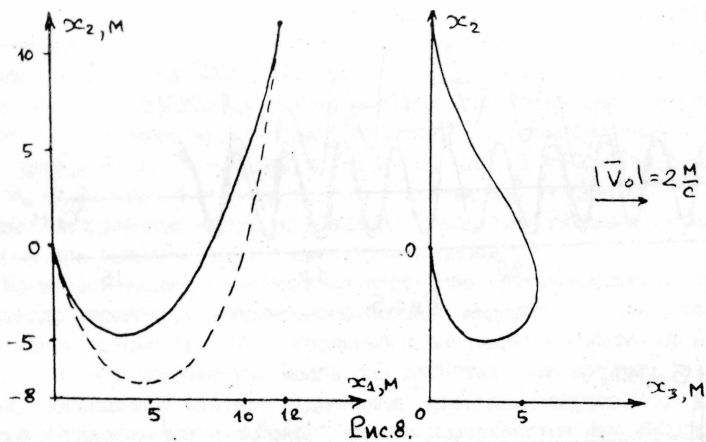
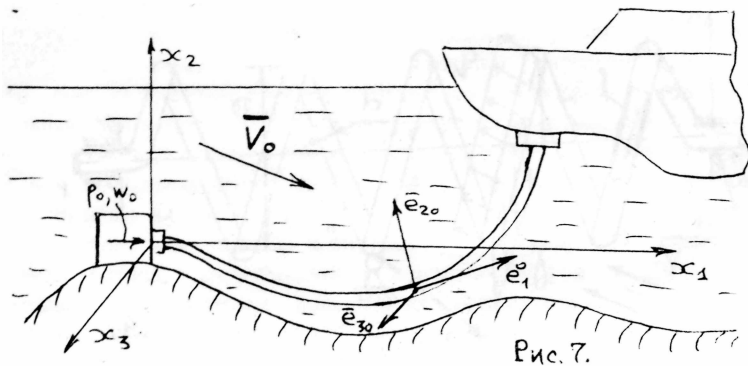


Рис.6.



- ого слоя ( в случае упрочняющего слоя - это величина модуля, характеризующего структуру слоя в осевом направлении),  $G_j$  - модуль упругости второго рода  $j$  -ого слоя,  $I_j$  - момент инерции поперечного сечения  $j$  -ого слоя,  $t_j$  - толщина  $j$  -ого слоя. Начальная геометрия провисающего трубопровода всилу его малой жесткости представляет собой цепную линию.

На рис. 8 и рис. 9а и 9б приведены соответственно форма равновесия и внутренние силы и моменты трубопровода со следующими характеристиками: длина  $l = 30$  м, диаметр среднего слоя резины  $D_p = 0,28$  м, средний диаметр корда  $D_k = 0,28$  м, толщина слоя резины  $t_p = 0,03$  м, толщина слоя корда  $t_k = 0,009$  м, модуль упругости первого рода для резины:  $E_p = 10$  МПа; модуль упругости второго рода для резины:  $G_p = 3,4$  МПа; модуль упругости первого рода для корда в осевом направлении:  $E_k = 2,8 \cdot 10^3$  МПа, модуль упругости второго рода для корда  $G_k = 4,6 \cdot 10^2$  МПа.

#### Основные выводы по работе.

- 1). Разработана методика исследования нелинейного деформирования пространственно-криволинейных стержней при больших перемещениях, вызванных распределенными силами произвольного направления.
- 2). Изложен алгоритм исследования напряженно-деформированного состояния пространственно-криволинейных стержней под действием "мертвой" инерционной нагрузки с определением проекций вектора распределенной нагрузки на оси координат, связанные с осевой линией стержня, и элементов матриц преобразования единичных векторов в зависимости от дуговой координаты.
- 3). Разработаны методы исследования НДС и новых равновесных форм пространственно-криволинейных стержней (шлангов с учетом изгибной и крутильной жесткости) при взаимодействии их с внешним и внутренним потоками жидкости.
- 4). Изложены два численных метода решения двухточечной краевой задачи статики стержней: метод последовательных нагружений и метод продолжения решения по параметру в дискретной постановке.
- 5). На основе теоретических результатов и разработанных численных методов решен ряд прикладных задач:
  - а) задача определения погрешности показаний акселерометра, вызванных учетом инерционности пружины;

б) задача определения НДС цилиндрической винтовой пружины с переменным углом подъема витков при действии на нее "мертвой" инерционной распределенной нагрузки и при принудительном поджатии;

в) задача о взаимодействии винтового цилиндрического трубопровода (змеевика) с внешним и внутренним потоками жидкости (с учетом и без учета промежуточной шарнирной опоры);

г) задача исследования поведения резинокордного трубопровода, провисающего в потоке жидкости и взаимодействующего с внутренним потоком и определение новых равновесных форм при различных характеристиках внешнего потока.

По теме диссертации опубликованы следующие работы:

1. Светлицкий В. А., Наумов А. М. Определение напряженно-деформированного состояния цилиндрической пружины, нагруженной распределенными силами произвольного направления // Расчеты на прочность (М.). -1990. -Вып. 29. -С. 50-55.

2. Наумов А. М. Нелинейная задача статики винтовых стержней при произвольных нагрузках // Вестник МГТУ. Машиностроение. -1991. -№1. -С. 21-29.

3. Наумов А. М. Определение напряженно-деформированного состояния винтового трубопровода, находящегося в потоке жидкости или воздуха // ИВУЗ. Машиностроение. -1993. -№3-5. -С. 18-23.

---

Тип. МГТУ им. Н.Э. Баумана

Тираж 100 экз.

Объем 1 п. л.

Заказ 270

Подписано в печать 28.10.96