

На правах рукописи
УДК 517.71

ТКАЧЕВ Сергей Борисович

**НЕЛИНЕЙНЫЕ ДВОЙСТВЕННЫЕ СИСТЕМЫ
И ПОСТРОЕНИЕ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ**

05.13.16 — Применение вычислительной техники,
математического моделирования и
математических методов
в научных исследованиях

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

С.Ткачев

Москва – 1998

Работа выполнена в Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор
А. П. Крищенко

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор
Н. А. Бобылев
кандидат физико-математических наук,
А. П. Носов

Ведущая организация: Вычислительный центр РАН

Защита состоится *"12" МАЯ* 1998 года в *11* часов *00* мин. на заседании специализированного Ученого Совета Д 053.15.12 при Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана по адресу: 107005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Автореферат разослан *"10" апреля* 1998 г.

Ученый секретарь специализированного
Совета, д.ф.м.н., профессор



Волков И.К.

Подписано к печати 07.04.98 г. Заказ 69. Объем 1.0 п.л. Тираж 100 экз.
Типография МГТУ им. Н.Э. Баумана. 107005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5.

Актуальность проблемы.

Важным инструментом в исследовании свойств линейных динамических систем с управлением и с выходом является приведение их к различным каноническим видам. Под приведением к каноническому виду понимается поиск такой невырожденной замены переменных, при которой в новых координатах динамическая система имеет заданный вид.

Для нелинейных систем приведение к каноническим видам также является важным инструментом исследования. Так, например, для аффинных динамических систем с управлением приведение к каноническому виду позволяет исследовать их управляемость, синтезировать терминальное управление, решать задачи стабилизации, декомпозиции и факторизации. Для динамических систем с выходом исследование условий (локальной) наблюдаемости практически является исследованием возможности (локального) приведения к каноническому виду, знание которого даст возможность судить о приводимости динамической системы к каноническому виду для построения наблюдателя с линеаризуемой динамикой ошибки.

Линейную стационарную систему с выходом $\dot{x} = Ax, y = Cx, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$, где A — матрица размером $n \times n$, C — матрица размером $m \times n$, и систему с управлением $\dot{\xi} = A^T \xi + C^T u, \xi \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$, называют двойственными. Если первая система наблюдаема, то двойственная к ней управляема, и наоборот. Между линейными двойственными системами есть связь на уровне приводимости к каноническим видам: если система с выходом приводится к каноническому виду, то и двойственная к ней система с управлением приводится к каноническому виду. Верно и обратное.

Для аффинных динамических систем с управлением приводимость к каноническому виду исследовали Brockett R. W., Hunt L.R., Su R., Meyer G., Жевнин А.А., Крищенко А.П., Елкин В.И. Различные подходы к управляемости и наблюдаемости нелинейных систем рассматривали Neftci R., Krener A.J., Ковалев А.М., Жевнин А.А., Крищенко А.П. Для нелинейных систем представляется интересным выделить класс аффинных динамических систем с управлением и систем с выходом, таких, что их свойства связаны между собой также, как и у линейных двойственных систем: во-первых, должна быть связь между приводимостью к каноническим видам и во-вторых — между управляемостью и наблюдаемостью.

Для нелинейной динамической системы с выходом актуальной является задача оценивания вектора состояния. Эту проблему рассматривали Bestle D., Zeitz M., Krener A.J., Isidori A., Respondek W., Li C.W., Tao

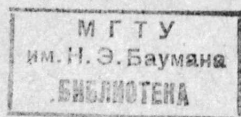
НТБ МГТУ им. Н. Э. Баумана



1557968

Ткачев С. Б. Нелинейные дв

1



L.W., Xia X., Gao W., Старков К.Е. и другие исследователи. Один из подходов заключается в построении специальной динамической системы — наблюдателя. В качестве системы канонического вида для построения наблюдателя удобно рассматривать систему, все нелинейные слагаемые которой зависят только от выхода. Условия приводимости системы к такому виду являются достаточно громоздкими. Поэтому представляет интерес возможность перехода к двойственной задаче и замене проверки условий приводимости эвристикой свойств некоторой системы с управлением.

Работа поддерживалась грантом "Разработка методов исследования двойственных нелинейных систем" по программе "Университеты России" в 1994-1995 гг. и грантом РФФИ №96-01-01094.

Целью работы является установление взаимосвязи управляемости и наблюдаемости нелинейных систем с входом и выходом, приводимости их к различным каноническим видам, развитие аналитических методов построения наблюдателей и исследование их свойств методами математического моделирования.

Научная новизна.

Предложены условия $k(x)$ -двойственности для нелинейной динамической системы с выходом и нелинейной аффинной динамической системы с управлением. Для линейных систем показана связь между двойственностью и $k(x)$ -двойственностью. Получены необходимые и достаточные условия $k(x)$ -двойственности пары нелинейных динамических систем. Получены условия существования $k(x)$ -двойственных пар, установлена связь между приводимостью к каноническим видам, управляемостью и наблюдаемостью.

Предложен подход к построению наблюдателей на основе $k(x)$ -двойственности. Введен расширенный канонический вид для построения наблюдателя, получены условия приводимости к нему динамической системы с выходом. Предложены методы построения наблюдателя по части переменных и наблюдателя для АУДС с выходом.

На основе $k(x)$ -двойственности построены наблюдатели для систем Рёсслера и Лоренца, а также для угловых скоростей вращения твердого тела вокруг центра масс. Методами математического моделирования показана их работоспособность.

Для системы Рёсслера методами математического моделирования показана возможность стабилизации положений равновесия с использованием оценки вектора состояния, получаемой наблюдателем.

Все полученные результаты являются новыми.

Практическая и теоретическая ценность.

Результаты, полученные в диссертации, позволяют проводить совместный анализ свойств $k(x)$ -двойственных аффинной динамической системы с управлением (приводимость к каноническому виду, управляемость) и динамической системы с выходом (наблюдаемость, возможность построения наблюдателя), строить наблюдатели для динамических систем с выходом и аффинных систем с управлением и выходом.

На защиту выносятся следующие положения.

1. Условия $k(x)$ -двойственности нелинейных систем и связь между существованием канонических видов, управляемостью и наблюдаемостью $k(x)$ -двойственных систем.

2. Расширенный канонический вид для построения наблюдателя, необходимые и достаточные условия его существования.

3. Методы построения наблюдателя для аффинной динамической системы с управлением и выходом.

4. Построенные наблюдатели для систем Гёсслера, Лоренца и угловых скоростей твердого тела, вращающегося вокруг центра масс, результаты их анализа методами математического моделирования.

5. Решение задачи стабилизации положения равновесия системы Рёсслера с управлением с использованием наблюдателя.

Апробация результатов работы.

Результаты диссертационной работы докладывались автором в Киеве в 1991 г. на научно-технической конференции "Проблемы управления и навигации авиационно-космических систем", на второй международной научно-технической конференции "Актуальные проблемы фундаментальных наук" в 1994 г. в МГТУ и на научно-технической конференции, посвященной 165-летию МГТУ им. Н.Э. Баумана, в 1995 г., на 4-м международном семинаре "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления" в ИПУ РАН в 1996 г., в Москве, на международной научно-практической конференции "Управление большими системами" в ИПУ РАН в 1997 г., на научных семинарах ВМК МГУ и в ВЦ РАН.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 9 работ.

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на 147 страницах и включает 12 рисунков. Библиография содержит 72 наименования.

Во введении обсуждается принцип двойственности для линейных стационарных систем и возможности обобщения этого принципа на нелинейные системы. Приведен обзор по проблеме построения наблюдателя для нелинейных динамических систем с выходом. Обоснована актуальность установления связи между приводимостью нелинейных систем различным каноническим видам, их управляемостью и наблюдаемостью.

Первая глава носит в основном справочный характер. В ней приводятся основные понятия дифференциальной геометрии, используемые при анализе нелинейных динамических систем с управлением и с выходом. Нелинейную стационарную динамическую систему (ДС)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(x), \quad y = h(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad h(x) \in C^\infty(\Omega), \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \\ A(x) &= (a_1(x), \dots, a_n(x))^T, \quad a_i(\cdot) \in C^\infty(\Omega), \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (1)$$

где Ω — открытое множество, со скалярным выходом y ассоциируют с векторным полем $A = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$, действующим в области Ω фазового пространства системы. С выходом системы связывают точную 1-форму $dh = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} dx_i$.

Аффинную динамическую систему с управлением (АУДС)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(x) + B(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^1, \\ A(x) &= (a_1(x), \dots, a_n(x))^T, \quad B(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x))^T, \\ a_i(\cdot), b_i(\cdot) &\in C^\infty(\Omega), \quad i = 1, \dots, n, \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (2)$$

со скалярным управлением ассоциируют с парой векторных полей $A = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ и $B = \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ в Ω . Эти векторные поля и 1-форма $dh(x)$ являются гладкими, поскольку гладкими являются коэффициенты $a_i(x)$, $b_i(x)$ и функция $h(x)$. Применение методов дифференциальной геометрии для исследования свойств динамических систем (1), (2) связано с анализом векторных полей A , B и 1-формы dh .

Векторное поле можно интерпретировать как дифференциальный оператор. Тогда производная функции $f(x) \in C^\infty(\Omega)$ по векторному полю, например, A , называемая производной Ли, есть гладкая функция $L_A f(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Производные более высоких порядков задают соотношениями $L_A^k f(x) = L_A(L_A^{k-1} f(x))$, $k \geq 1$, $L_A^0 f(x) = f(x)$.

Коммутатором (скобкой Ли) $[A, B]$ двух векторных полей A и B является векторное поле

$$[A, B] = \sum_{i,j=1}^n \left(a_j(x) \frac{\partial b_i(x)}{\partial x_j} - b_j(x) \frac{\partial a_i(x)}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Для него используют обозначение $\text{ad}_A B$. Коммутаторы более высоких порядков задают рекуррентными соотношениями $\text{ad}_A^k B = [A, \text{ad}_A^{k-1} B]$, $k > 1$, и полагают $\text{ad}_A^0 B = B$.

Наблюдаемое кораспределение dO порождается 1-формами семейства $H = \{dh, dL_A h, \dots, dL_A^k h, \dots\}$. Если в некоторой окрестности точки $x_0 \in \Omega$ выполнено условие $\dim dO = n$, где n — размерность пространства состояний ДС (1), то говорят, что в точке x_0 ДС (1) удовлетворяет ранговому условию наблюдаемости. В дальнейшем, говоря о локальной наблюдаемости ДС, будем подразумевать, что выполнено ранговое условие наблюдаемости. Если система локально наблюдаема в каждой точке $x \in \Omega$, то система называется локально наблюдаемой в Ω . Для исследования наблюдаемости ДС (1) в координатной форме используют матрицу наблюдаемости $W(x) = \frac{\partial \omega(x)}{\partial x}$, где $\frac{\partial \omega(x)}{\partial x}$ — матрица Якоби отображения

$$\omega: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \omega(x) = (L_A^0 h(x), L_A^1 h(x), \dots, L_A^{n-1} h(x))^T. \quad (3)$$

По строкам матрицы W записаны координаты 1-форм $dh(x)$, $dL_A^1 h(x), \dots, dL_A^{n-1} h(x)$ в базисе dx_i , $i = 1, \dots, n$. Если система (1) локально наблюдаема в Ω и отображение (3) инъективно, то (1) будет наблюдаемой в Ω .

АУДС (2) называют управляемой в области $\Omega \in \mathbb{R}^n$, если для любых двух точек $x_0, x_1 \in \Omega$ существует отрезок времени $[0, t_1]$ и определенное на нем управление $u(t)$, такое, что соответствующее ему решение $x(t, x_0)$ системы (2) удовлетворяет условиям: $x(t) \in \Omega$ для $t \in [0, t_1]$, $x(t_1, x_0) = x_1$.

Обозначим через $V(x)$ матрицу управляемости АУДС (2)

$$V(x) = (B^0, -B^1, \dots, (-1)^{n-1} B^{n-1}),$$

где $B^0(x) = B(x)$, $B^k(x) = \frac{\partial B^{k-1}}{\partial x} A(x) - \frac{\partial A}{\partial x} B^{k-1}(x)$, $k > 1$, а $\frac{\partial B^{k-1}(x)}{\partial x}$, $\frac{\partial A(x)}{\partial x}$ — матрицы Якоби. Из определения коммутатора $\text{ad}_A^k B$ следует, что k -й столбец матрицы управляемости является столбцом координат векторного поля $(-1)^{k-1} \text{ad}_A^{k-1} B$ в базисе $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$.

Если ДС (1) является (локально) наблюдаемой, то существует (локальная) система координат, в которой (1) имеет вид

$$\dot{z}_1 = z_2, \dot{z}_2 = z_3, \dots, \dot{z}_{n-1} = z_n, \dot{z}_n = f(z), \quad y = z_1 \quad (4)$$

называемый каноническим (наблюдаемым) видом. Замена переменных $z_k = L_A^{k-1} h(x)$, $k = 1, \dots, n$, приводит ДС (1) к каноническому виду.

Для АУДС (2) каноническим называют вид

$$\dot{z}_1 = z_2, \dot{z}_2 = z_3, \dots, \dot{z}_{n-1} = z_n, \dot{z}_n = f(z) + g(z)u, \quad (5)$$

где $z = (z_1, \dots, z_n)$. Для того, чтобы в области Ω АУДС (2) приводилась к каноническому виду (5), необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $\varphi(x) \in C^\infty(\Omega)$, удовлетворяющая в Ω системе уравнений

$$\text{ad}_A^k B \varphi(x) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-2, \quad (6)$$

причем соотношения

$$z_k = L_A^{k-1} \varphi(x), \quad k = 1, \dots, n, \quad (7)$$

являлись бы невырожденной заменой переменных в Ω . Для каждого решения $\varphi(x)$ системы (6) можно вычислить функцию $\beta(x) = \text{ad}_A^{n-1} B \varphi(x)$. Эта функция характеризует решение системы уравнений (6) и определяет функцию $g(z)$ в каноническом виде (5): $g(z) = (-1)^{n-1} \text{ad}_A^{n-1} \varphi(x)|_{x=\Phi^{-1}(z)}$, где $z = \Phi(x)$ — замена переменных (7).

Во второй главе рассматривается связь свойств ДС (1) и АУДС (2) в скалярном случае ($u \in \mathbb{R}^1$). В разделе 2.1 вводится понятие $k(x)$ -двойственности для ДС (1) и АУДС (2), где $k(x) \in C^\infty(\Omega)$ — скалярная функция.

Определение 1. Системы (1) и (2) называются $k(x)$ -двойственными в области Ω , если в Ω выполнены условия

$$L_B L_A^r h(x) = 0, \quad r = 0, 1, \dots, n-2, \quad L_B L_A^{n-1} h(x) = k(x).$$

В координатной форме условия $k(x)$ -двойственности можно выразить через матрицу наблюдаемости W , матрицу управляемости V и матрицу Якоби $\frac{\partial h}{\partial x}$ отображения $y = h(x)$. Для того, чтобы ДС (1) и АУДС (2) были $k(x)$ -двойственными в области Ω , необходимо и достаточно выполнения в Ω одного из двух эквивалентных условий:

$$\text{а) } W(x)B(x) = (0, \dots, 0, k(x))^T; \quad \text{б) } \frac{\partial h}{\partial x} V(x) = (0, \dots, 0, k(x)).$$

В разделе 2.2 установлена связь между двойственностью и $k(x)$ -двойственностью для линейных систем. Показано, что ДС

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \dots & -\alpha_1 \end{pmatrix} z = Az \\ y &= (1, 0, \dots, 0)z = Cz \end{aligned} \quad (8)$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — коэффициенты характеристического многочлена $\lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n$ матрицы A , с одной стороны является двойственной, а с другой — 1-двойственной в смысле определения 1 к АУДС $\dot{\xi} = A^T \xi + C^T u$.

В разделе 2.3 получены условия существования $k(x)$ -двойственной АУДС, ее приводимости к каноническому виду и управляемости. Показано, что если ДС (1) (локально) наблюдаема в Ω , то для любой функции $k(x) \in C^\infty(\Omega)$ $k(x)$ -двойственная АУДС (2) в Ω существует, однозначно определена и в Ω (локально) существует система координат, в которой АУДС (2) имеет канонический вид. При этом матрица наблюдаемости $W(x)$ (локально) наблюдаемой ДС (1) совпадает с матрицей Якоби одного из преобразований любой $k(x)$ -двойственной АУДС к каноническому виду. Установлено, что если динамическая система (1) наблюдаема в области Ω , $\text{Im}(\omega) = \mathbb{R}^n$, где ω — отображение (3), и $k(x) \neq 0$ в Ω , то $k(x)$ -двойственная АУДС управляема в Ω .

В разделе 2.4 приведены условия существования $k(x)$ -двойственной ДС и ее наблюдаемости. Показано, что если в области Ω существует система координат, в которой АУДС (2) запишется в каноническом виде, то для любой функции $k_1(\tau) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ для АУДС (2) в Ω существует $k(x)$ -двойственная ДС (1), где $k(x) = (-1)^{n-1} k_1(\varphi(x)) \beta(x)$, $\beta(x) = \text{ad}_A^{n-1} B \varphi(x)$, а функция $\varphi(x)$ определяет приведение АУДС к каноническому виду. Если в некоторой окрестности точки x_0 АУДС (2) приводится к каноническому виду, то для любой функции $k_1(\tau) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ $k(x)$ -двойственная ДС, где $k(x) = (-1)^{n-1} k_1(\varphi(x)) \beta(x)$, при $k_1(\varphi(x_0)) \neq 0$ является локально наблюдаемой в окрестности точки x_0 и приводится к каноническому виду. Если указанные условия выполнены для всех точек из Ω и отображение $\omega^\gamma: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\omega^\gamma(x) = (L_A^0 \gamma(\varphi(x)), \dots, L_A^{n-1} \gamma(\varphi(x)))^T$, где $\frac{\partial \gamma(\tau)}{\partial \tau} = k_1(\tau)$, инъективно, то $k(x)$ -двойственная ДС является наблюдаемой в Ω .

В разделе 2.5 полученные для стационарного случая результаты обобщаются на нестационарный случай. Нестационарной АУДС $\dot{x} = A(x, t) +$

$B(x, t)u$, рассматриваемой в области $\Omega \times T$, взаимно однозначно соответствуют гладкие векторные поля $A = \sum_{i=1}^n a_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial t}$ и $B = \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i}$. Отметим, что поле B не содержит компоненты $\frac{\partial}{\partial t}$. Не стационарной ДС $\dot{x} = A(x, t)$, $y = h(x, t)$, соответствует векторное поле A и 1-форма $dh = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h(x, t)}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} dt$. Матрицу наблюдаемости $W(x, t) = \frac{\partial \omega(x, t)}{\partial x}$, где $\frac{\partial \omega(x, t)}{\partial x}$ — матрица Якоби относительно x отображения

$$\omega : \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \omega(x, t) = (L_A^0 h(x, t), L_A^1 h(x, t), \dots, L_A^{n-1} h(x, t))^T,$$

и матрицу управляемости

$$V(x, t) = (B^0(x, t), -B^1(x, t), \dots, (-1)^{n-1} B^{n-1}(x, t)),$$

где $B^0(x, t) = B(x, t)$,

$$B^k(x, t) = \frac{\partial B^{k-1}(x, t)}{\partial(x, t)} \begin{pmatrix} A(x, t) \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\partial A(x, t)}{\partial x} B^{k-1}(x, t),$$

можно рассматривать как t -параметрические. Для приведения нестационарных систем к различным каноническим видам использовались только отображения, сохраняющие время: $x = Q(z, t)$, $t = t$. С учетом указанных особенностей понятие $k(x, t)$ -двойственности, условия $k(x, t)$ -двойственности в координатах, условиях существования нестационарной АУДС, $k(x, t)$ -двойственной к ДС, приводимости нестационарной АУДС к каноническому виду и ее управляемости, а также условия существования нестационарной ДС, $k(x, t)$ -двойственной к АУДС, ее наблюдаемости (приводимости к каноническому виду) практически повторяют соответствующие понятия и условия для стационарных систем.

Раздел 2.6 посвящен частично $k(x)$ -двойственным системам со скалярным входом и выходом. Введение таких систем связано с тем, что если ранговое условие наблюдаемости не выполнено, то привести ДС к каноническому виду не удастся. При этом, если в некоторой окрестности точки x_0 $\text{rank } W(x) = m < n$, то можно оценить m независимых функций от x : $L_A^0 h(x)$, $L_A^1 h(x)$, $\dots$, $L_A^{m-1} h(x)$. Будем говорить, что система (1) локально наблюдаема по m обобщенным переменным. Канонический вид для АУДС (2) также существует не всегда, однако возможен случай, когда выделяется подсистема канонического вида. В этом случае говорят о приведении АУДС к квазиканоническому виду.

Для ДС и АУДС с указанными особенностями введено понятие частичной $k(x)$ -двойственности, получены необходимые и достаточные условия частичной $k(x)$ -двойственности, условия существования АУДС, частично $k(x)$ -двойственной к ДС, ее приводимости к квазиканоническому виду и управляемости по части переменных. Доказаны условия существования ДС, частично $k(x)$ -двойственной к АУДС, ее наблюдаемости по части переменных (приводимости к квазиканоническому виду). Доказаны вспомогательные утверждения о декомпозируемости динамических систем, наблюдаемых по части переменных.

В третьей главе изучается векторный случай, т.е. вводится ДС с векторным выходом:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(x), \quad y = h(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, \\ A(x) &= (a_1(x), \dots, a_n(x))^T, \quad a_i(x) \in C^\infty(\Omega), \\ h(x) &= (h_1(x), \dots, h_m(x)), \quad h_j(x) \in C^\infty(\Omega), \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n.\end{aligned}\quad (9)$$

и АУДС с векторным управлением:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(x) + \sum_{j=1}^m B_j(x)u_j, \quad x \in \mathbb{R}^n, u_j \in \mathbb{R}^1, \\ A(x) &= (a_1(x), \dots, a_n(x))^T, \quad B_j(x) = (b_{1j}(x), \dots, b_{nj}(x))^T, \\ a_i(x), b_{ij}(x) &\in C^\infty(\Omega), \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n.\end{aligned}\quad (10)$$

Количество входов и выходов у ДС и АУДС одинаково. Предполагается, что все выходы ДС функционально независимы, а векторные поля $B_j, j = 1, \dots, m$, линейно независимы над $C^\infty(\Omega)$.

В разделе 3.1 приведены основные сведения о ранговых условиях наблюдаемости, рассмотрена матрица наблюдаемости $W(x)$ в векторном случае и определен мультииндекс наблюдаемости. Приведена матрица $V(x)$ управляемости АУДС (10). В разделе 3.2 приведены известные сведения о приводимости ДС (9) и АУДС (10) к каноническим видам.

В разделе 3.3 рассматривается $K(x)$ -двойственность систем с векторным входом и выходом. Пусть в области Ω задана квадратная матрица $K(x)$ порядка m , элементами которой $k_{ij}(x)$ являются гладкие в Ω функции. Нелинейная система (9) с выходом и АУДС (10) называются $K(x)$ -двойственными в области Ω , если в Ω выполнены условия

$$\begin{aligned}L_{B_j} L_A^r h_i(x) &= 0, \quad r = 0, 1, \dots, n_i - 2, \quad L_{B_j} L_A^{n_i-1} h_i(x) = k_{ij}(x), \\ i, j &= 1, \dots, m, \quad n_1 + n_2 + \dots + n_m = n.\end{aligned}$$

Получены условия существования матрицы $K(x)$ для ДС (9) и АУДС (10), при которой они будут $K(x)$ -двойственными и алгоритм ее нахождения. Приведены условия $K(x)$ -двойственности в матричном виде.

Они являются прямым обобщением на векторный случай условий, полученных для скалярного случая.

В разделе 3.4 получены условия существования $K(x)$ -двойственной АУДС, ее приводимости к каноническому виду и управляемости. Показано, что если ДС (9) локально наблюдаема в точке $x \in \Omega$, то в некоторой окрестности U точки x для любой матрицы $K(x) \in C^\infty(U)$ $K(x)$ -двойственная АУДС вида (10) существует, однозначно определена и в U существует локальная система координат, в которой эта АУДС имеет канонический вид. Если ДС (9) наблюдаема в Ω , то этот результат для АУДС будет глобальным. Доказано, что если ДС (9) наблюдаема в Ω , $\text{Im}(\omega^l) = \mathbb{R}^n$, $\det(K(x)) \neq 0$ в Ω , то $K(x)$ -двойственная АУДС управляема в Ω . Указана подматрица матрицы наблюдаемости $W(x)$ ДС, совпадающая с матрицей Якоби одного из (локальных) преобразований любой $K(x)$ -двойственной АУДС к каноническому виду.

В разделе 3.5 получены условия существования $K(x)$ -двойственной ДС и ее локальной наблюдаемости. Из работ Крищенко А.П. известно, что приведение АУДС к каноническому виду определяется набором функций $\varphi_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, и мультииндексом приводимости $n = (n_1, \dots, n_m)$. Описано множество допустимых преобразований $\gamma(\varphi)$, таких, что набор функций $\gamma_i(\varphi(x))$, $i = 1, \dots, m$, определяет приведение АУДС к каноническому виду с сохранением мультииндекса приводимости. Пусть K_1 — множество матриц Якоби $\frac{\partial \gamma}{\partial \varphi}$ таких преобразований, а

β — матрица размера $m \times m$, элементы которой $\beta_{ij}(x) = \text{ad}_A^{n_i-1} B_j \varphi_i(x)$. Установлено, что если в некоторой окрестности точки x_0 существует система координат, в которой АУДС (10) запишется в каноническом виде, то для любой матрицы $K_1(\varphi) \in K_1$ для АУДС (10) существует и однозначно определена $K(x)$ -двойственная ДС вида (9), где $k_{ij}(x) = (-1)^{n_i-1} k_i^j(\varphi(x)) \beta^j(x)$, $k_i^j(\varphi(x))$ — i -я строка матрицы K_1 , $\beta^j(x)$ — j -й столбец матрицы β . Доказано, что при $\det(K_1(\varphi)) \neq 0$ $K(x)$ -двойственная ДС локально наблюдаема в точке x_0 и в некоторой ее окрестности приводится к каноническому виду.

В четвертой главе предлагается подход к построению наблюдателей на основе $k(x)$ -двойственности для скалярного и векторного случаев.

В работах Bestle D., Zeitz M., Krener A.J. и Isidori A. для ДС

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} \psi_1(y) \\ \psi_2(y) \\ \dots \\ \psi_n(y) \end{pmatrix} = D\xi + \Psi(y) \\ y &= (0, \dots, 0, 1)\xi = C\xi \end{aligned} \quad (11)$$

введен канонический вид наблюдателя с нелинейной добавкой $\Psi(y)$, зависящей от выхода: $\dot{\eta} = D\eta + G(C\eta - y) + \Psi(y)$, где G — вектор-столбец. Ошибка $e = \eta - \xi$ этого наблюдателя удовлетворяет линейному уравнению $\dot{e} = (D + GC)e$. Динамика ошибки задается выбором вектора G .

С АУДС (2) связывается алгебра Ли A_n , порожденная векторными полями $\text{ad}_A^k B$, $k = 0, \dots, n-1$. Показано, что известные (Kronecker A.J., Isidori A.) условия эквивалентности ДС (1) и (11) в терминах 1-двойственности имеют следующий вид: для того, чтобы локально наблюдаемая ДС (1) в некоторой окрестности точки x_0 приводилась к виду (11), необходимо и достаточно, чтобы в окрестности точки x_0 1-двойственная АУДС имела коммутативную алгебру Ли A_n .

В разделе 4.2 расширен класс систем, для которых возможно построение наблюдателя. Для локально наблюдаемой ДС существует только одна 1-двойственная система. Если у этой АУДС алгебра Ли A_n не является коммутативной, то ДС не приводится к каноническому виду (11). В то же время для любой функции $k(x) \in C^\infty(\Omega)$ для ДС (1) существует $k(x)$ -двойственная АУДС. Может оказаться, что существует такая функция $k(x)$, для которой алгебра Ли A_n $k(x)$ -двойственной АУДС коммутативна. Возникает вопрос, не приводит ли это к возможности преобразования ДС (1) к такому каноническому виду, который при $k(x) = 1$ совпадал бы с (11)? Ответ на этот вопрос положителен. Для этого вводится динамическая система

$$\dot{\xi} = D\xi + \Psi(\xi_n), \quad y = H(\xi_n). \quad (12)$$

— расширенный канонический вид для построения наблюдателя. Если для $H(\xi_n)$ существует обратная функция $\xi_n = H^{-1}(y)$, то для (12) строится наблюдатель

$$\dot{\eta} = D\eta + G(\eta_n - H^{-1}(y)) + \Psi(H^{-1}(y)). \quad (13)$$

Показано, что локально наблюдаемая ДС (1) в окрестности точки x_0 допускает построение наблюдателя (13), если и только если существует такая гладкая функция одной переменной $P(\tau)$, $P(\tau) > 0$ (или $P(\tau) < 0$), что для $k(x) = P(h(x))$ алгебра Ли A_n $k(x)$ -двойственной АУДС коммутативна. Установлено, что если отображение $\xi = S(x)$ преобразует ДС к виду (12), то матрица Якоби обратного отображения $x = T(\xi)$, записанная в переменных x , совпадает с матрицей управляемости $V(x)$ $P(h(x))$ -двойственной АУДС.

Для АУДС с коммутативной алгеброй Ли A_n , приводящейся к в некоторой окрестности точки x_0 к каноническому виду, описан класс $k(x)$ -двойственных ДС, допускающих построение наблюдателя.

В разделе 4.3 аналитически решена задача о приведении системы второго порядка к расширенному виду наблюдателя.

В разделе 4.4 показана связь полученных результатов с известными результатами (Krener A.J., Respondek W.) о приводимости ДС к виду (11) парой преобразований в пространстве выходов и в пространстве состояний.

В разделе 4.5 на нестационарный случай обобщаются результаты, полученные для стационарного.

В разделе 4.6 рассмотрено построение наблюдателя для стационарной ДС с векторным выходом. Если индексы наблюдаемости всех выходов равны между собой, утверждения в векторном случае являются прямым обобщением соответствующих утверждений для случая скалярного. Приведен пример, показывающий невозможность обобщения утверждений скалярного случая на векторный при различных индексах наблюдаемости. Для частного случая двух выходов, индексы наблюдаемости которых различаются на 1, получены условия существования наблюдателя и разработан метод поиска выходов ДС, по которым строится наблюдатель, базирующийся на переходе к $k(x)$ -двойственной АУДС с коммутативной алгеброй Ли A_n .

В разделе 4.7 для скалярного случая получены условия существования наблюдателя по части переменных.

В разделе 4.8 установлено, что АУДС $\dot{x} = A(x) + Bu, y = h(x)$ со скалярным выходом и управлением в окрестности точки x_0 допускает построение наблюдателя, если динамическая система $\dot{x} = A(x), y = h(x)$ допускает построение наблюдателя и векторное поле B АУДС (2) удовлетворяет соотношениям $[B, (-1)^{i-1} \text{ad}_A^{i-1} \tilde{B}] = 0, i = 1, \dots, n-1$, где $\tilde{B}$ — векторное поле $K(h(x))$ -двойственной АУДС с коммутативной алгеброй Ли A_n . Предложен подход к построению наблюдателя для АУДС, основанный на поиске такой системы координат, в которой векторное поле B АУДС является постоянным и не влияет на динамику ошибки наблюдателя.

В разделе 4.9 на основе $k(x)$ -двойственности для системы Рёсслера найден выход, по которому построен наблюдатель. В разделе 4.10 найдена пара выходов, по которым построен наблюдатель для системы Лоренца. В разделе 4.11 построен наблюдатель для угловых скоростей вращения твердого тела вокруг центра масс. Измеряемыми величинами являются две угловые скорости, а оцениваемой величиной — третья.

В пятой главе приведены результаты численного моделирования работы наблюдателей для систем Рёсслера и Лоренца с хаотической динамикой, а также наблюдателя для угловых скоростей вращения твердого тела.

В разделе 5.1 приведены результаты моделирования работы наблюдателя для системы Рёсслера:

$$\dot{x}_1 = -x_2 - x_3, \quad \dot{x}_2 = x_1 + ax_2, \quad \dot{x}_3 = c + x_3(x_1 - b), \quad y = x_3.$$

При выбранных $a = 0.32$, $b = 4.5$, $c = 0.3$ имеет место хаотическая динамика. Рассматривались различные точки старта системы и наблюдателя. Например, точка старта системы выбиралась в узлах сетки со следующими параметрами: x_1 менялось от -4 до 4 с шагом 2; x_2 — от -4 до 4 с шагом 2; x_3 — от -4 до 4 с шагом 2. Для каждого узла сетки моделировалось пять вариантов работы наблюдателя. Сначала точки старта наблюдателя и системы брались совпадающими. В этом случае наблюдатель должен обладать свойством "тождественности", т.е. траектории системы и наблюдателя должны совпадать в пределах точности расчета. Затем в качестве точек старта наблюдателя последовательно брались $(x_1 - 10, x_2 - 10)$, $(x_1 - 10, x_2 + 10)$, $(x_1 + 10, x_2 - 10)$ и $(x_1 + 10, x_2 + 10)$. Собственные числа, определяющие динамику ошибки, были приняты одинаковыми и равными -1. Интегрирование велось в течении 10 секунд. Если ошибка оценки по x_1 и x_2 при $t = 10$ не превосходила по абсолютной величине 0.1, работа наблюдателя признавалась удовлетворительной.

При моделировании были обнаружены 7 узлов сетки, таких, что начинающиеся в них траектории системы Рёсслера являются "жесткими" и быстро удаляются от области притяжения аттрактора, что вызывало трудности численного интегрирования. Для нежестких траекторий установлено, что построенный наблюдатель, во-первых, обладает свойством "тождественности", и, во-вторых, при всех рассмотренных точках старта наблюдателя абсолютная ошибка оценки в момент $t = 10$ по абсолютной величине не превосходит 0.1.

Исследовалась область допустимых отклонений начальных оценок по x_1 и x_2 при фиксированной точке старта системы (2.0, 2.0, 2.0). Точка старта наблюдателя выбиралась в узлах сетки со следующими параметрами: $\hat{x}_1$ менялось от -98.0 до 92.0 с шагом 10.0; $\hat{x}_2$ — от -98.0 до 92.0 с шагом 10. Величина $\hat{x}_3$ была взята равной 2. Установлено, что при всех рассмотренных точках старта наблюдателя к моменту $t = 50$ ошибки наблюдателя становились меньше 0.1. Более широкий диапазон точек старта наблюдателя не рассматривался, поскольку при значительном удалении от области притяжения аттрактора для траекторий наблюдателя возникали трудности численного интегрирования.

Приведены результаты моделирования работы алгоритмов стабилизации положений равновесия системы Рёсслера с управлением во втором и в третьем уравнениях с использованием нелинейной обратной связи по

состоянию, где для получения оценки вектора состояния использовался построенный наблюдатель. Показано, что при отсутствии ограничений на управление задача стабилизации с использованием наблюдателя решается при всех рассмотренных начальных данных. Исследованы свойства алгоритмов стабилизации при ограничениях на управление.

Например, пусть точка старта системы $(2, 2, 2)$, управление — во втором уравнении, ограничение на управление — $|u| \leq 10$. Собственные числа наблюдателя взяты одинаковыми и равными -4 , собственные числа, определяющие динамику замкнутой системы — равными -3 . Точка старта наблюдателя бралась в узлах сетки: $\hat{x}_1$ — от -3.0 до 6.5 с шагом 0.5 ; $\hat{x}_2$ — от -3.0 до 6.5 с шагом 0.5 . Величина $\hat{x}_3$ была взята равной 2 . Интегрирование велось до 20 секунд. Задача стабилизации считалась решенной, если к моменту $t = 20$ траектория системы приходила в положение равновесия. Расчеты показали, что система стабилизируется при всех рассмотренных точках старта наблюдателя. При более жестком ограничении на управление — $|u| \leq 1$, задача стабилизации гарантированно решается для всех точек сетки при $t = 100$.

В разделе 5.2 приведены результаты моделирования наблюдателя для системы Лоренца, записанной в виде

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -px_1 + px_2, & \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 - rx_3 - x_1x_2, \\ \dot{x}_3 &= r(x_1 + x_2) - x_3 + x_1x_2 + u, & y_1 &= x_1, y_2 = x_2.\end{aligned}$$

При $p = 10$ и $r = 5.1961$ система обладает хаотической динамикой. Например, исследовалась область допустимых отклонений начальных оценок по x_3 при фиксированной точке старта системы. Была взята точка старта $(2.0, 2.0, 2.0)$. Точка старта наблюдателя выбиралась в узлах сетки по $\hat{x}_3$ от -3.0 до 7.0 с шагом 0.5 . Собственные числа, определяющие динамику наблюдателя, были приняты одинаковыми и равными -1 . Интегрирование велось в течении 10 секунд. Установлено, что при всех рассмотренных точках старта наблюдателя к моменту $t = 10$ ошибки наблюдателя становились меньше 0.1 .

В разделе 5.3 моделировалась работа наблюдателя для угловой скорости вращения твердого тела вокруг центра масс. Рассматривалась система

$$\dot{x}_1 = a_1x_2x_3, \quad \dot{x}_2 = a_2x_1x_3, \quad \dot{x}_3 = a_3x_1x_2, \quad y_1 = x_1, y_2 = x_3,$$

где $a_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_1}$, $a_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_2}$, $a_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_3}$, I_1, I_2, I_3 — моменты инерции, $I_1 > I_2 > I_3$. Для исследования области допустимых отклонений точки старта наблюдателя от точки старта системы были проведены следующие расчеты. Точка старта системы — $(-3.00, 5.00, 0.90)$. Собственные

числа, определяющие динамику наблюдателя, были приняты одинаковыми и равными -3 . Интегрирование велось до 10 секунд. Точка старта наблюдателя по переменной x_2 изменялась от 0.0 до 10.0 с шагом 0.5. Для всех проведенных расчетов к моменту $t = 10$ ошибка оценки для x_2 была меньше 0.01.

ВЫВОДЫ

1. В диссертации для нелинейных динамических систем с выходом (ДС) и аффинных динамических систем с управлением (АУДС) установлен класс систем, у которых связаны свойства приводимости к каноническим видам, наблюдаемости и управляемости. Показана связь с двойственностью линейных систем.

2. Особенностью нелинейного случая является наличие гладкой функции $k(x)$, относительно которой определяются двойственные пары систем, поэтому был введен термин " $k(x)$ -двойственность". Для линейных систем двойственность может рассматриваться как 1-двойственность в смысле введенного в работе определения. В нелинейном случае возникает необходимость рассматривать отдельно приводимость к каноническим видам и взаимосвязь управляемости и наблюдаемости нелинейных $k(x)$ -двойственных систем.

3. Результаты, в отличие от линейного случая, не вполне симметричны и в основном являются локальными, хотя при дополнительных требованиях обобщаются в области. Так, для (локально) наблюдаемой ДС получены условия существования $k(x)$ -двойственной АУДС, приводимости её к каноническому виду и управляемости, а для АУДС, (локально) приводимой к каноническому виду, получены условия существования $k(x)$ -двойственной ДС и её (локальной) наблюдаемости.

Результаты, полученные для скалярного стационарного случая, удалось обобщить на нестационарный случай ($k(x, t)$ -двойственность) и на случай частичной $k(x)$ -двойственности пары динамических систем, а также на векторный случай. В векторном случае вместо функции $k(x)$ в определении двойственности появляется квадратная матрица $K(x)$, элементами которой являются гладкие функции.

4. Между двойственными системами найдена новая взаимосвязь: на основе $k(x)$ -двойственности для скалярного и векторного случаев предложен новый подход к построению наблюдателей для нелинейных ДС.

Использование подхода, основанного на построении для ДС $k(x)$ -двойственной АУДС с коммутативной алгеброй Ли A_n , позволяет находить выходы и строить по ним наблюдатели для нелинейных систем.

5. Получаемая наблюдателем оценка вектора состояния системы может быть использована в алгоритмах стабилизации положений равновесия. При этом оказывается, что несмотря на локальный характер некоторых утверждений, на основе которых строились наблюдатели и алгоритмы стабилизации, для конкретных систем они могут работать в большом или даже глобально.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Численные методы дифференциально-геометрического подхода к проблемам нелинейной теории управления / А.П. Крищенко, В.П. Кушнарев, А.Н. Назаренко, С. Б. Ткачев // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1991. – № 1. – С. 24-34.

2. Ткачев С. Б. Численная процедура построения нелинейного наблюдателя // Проблемы управления и навигации авиационно-космических систем: Тезисы докладов научно-технической конференции. – Киев, 1991. – С. 12-15.

3. Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Двойственные нелинейные системы // Доклады РАН. – 1993. – Т. 333, № 5. – С. 598-599.

4. Ткачев С. Б. Расширенная форма наблюдателя для нелинейных систем // Актуальные проблемы фундаментальных наук: Труды Второй Международной научно-технической конференции. В 2-х т. – М., 1994. – Т. 1. – С. 66.

5. Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Нелинейные $k(x)$ -двойственные системы // Автоматика и телемеханика. – 1995. – № 2. – С. 21-34.

6. Ткачев С. Б. Нелинейные частично $k(x)$ -двойственные системы // Научно-техническая конференция, посвященная 165-летию МГТУ им. Н.Э. Баумана: Тезисы докладов. В 2-х ч. – М., 1995. – Ч.1. – С. 171.

7. Ткачев С. Б. Построение нелинейных наблюдателей на основе концепции $k(x)$ -двойственности // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Тезисы докладов IV международного семинара. – М., 1996. – С. 58-59.

8. Ткачев С. Б. Построение канонического наблюдателя для системы Рёсслера // Дифференциальные уравнения. – 1996. – Т.32, №8. – С. 1147.

9. Ткачев С. Б. Построение нелинейных наблюдателей по части переменных // Управление большими системами: Материалы международной научно-практической конференции. – М., 1997. – С. 318.