

15676
На правах рукописи

Буда-Красновский Святослав Владимирович

УДК 531.22.8

РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ
ЭЛЕМЕНТОВ ПРИБОРОВ И КОНСТРУКЦИЙ ПРИ
КИНЕМАТИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

01.02.06 – Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата технических наук

Москва

1999

Работа выполнена в Московском государственном техническом университете имени Н.Э.Баумана

Научный руководитель - доктор технических наук,
профессор Светлицкий В.А.
Официальные оппоненты - доктор технических наук,
профессор Шклярчук Ф.Н.
- доктор технических наук,
профессор Чирков В.П.
Ведущая организация - ГосМКБ "Вымпел"

НТБ МГТУ им. Н.Э.Баумана



1564763

Буда-Красовский С.В. Разр.

Защита состоится "23" декабря 1999 г. в 14³⁰ час. на заседании диссертационного совета Д.053.15.08 в Московском университете им. Н.Э.Баумана по _____ ул., д.5.

_____ся в библиотеке МГТУ им.

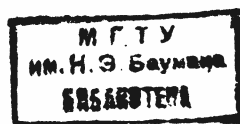
1999 г.

1564763

Дронг В.И.

Общая характеристика работы.

Актуальность темы. Стержневые элементы имеют очень широкое распространение в различных отраслях промышленности (приборостроение, машиностроение, авиация и т.д.). Они используются в качестве чувствительных элементов в системах автоматического управления наземной и космической техники, в акселерометрах, низкочастотных механических фильтрах, в мехатронных системах. Например, основными элементами большинства приборов времени являются стержни, которые могут иметь очень сложную геометрию осевой линии. К упругим стержневым элементам относятся и трубопроводы, которые используются в системах питания двигателей (например, авиационных двигателей), в системах подъема конкреций со дна морей. Высоконадежная работа машин и конструкций, использующих упругие стержневые элементы, в большой степени зависит от точности расчета стержневых элементов. Несмотря на различные области техники, где используются стержневые элементы, все они относятся к одному из разделов механики твердого деформируемого тела — механике стержней. Это позволяет рассматривать (и рассчитывать) упругие стержневые элементы, используя единые математические методы. В реальных условиях стержневые элементы нагружаются статическими и динамическими силами, в том числе и силами, которые возникают при эксплуатации конструкций. Например, силами, возникающими при принудительных смещениях (линейных и угловых) основания, на котором находится упругий стержневой элемент при линейных и угловых принудительных смещениях дискретных сечений стержня. Возникающие при этом колебания упругих элементов принято называть кинематически возбуждаемыми колебаниями. К кинематически возбуждаемым колебаниям относятся: колебания транспортных средств, движущихся по дороге с неровностями, когда действующие на машину возмущения зависят от вертикальных перемещений точек контакта колес, вызванных профилем дороги; колебания сооружений, вызванные смещением основания при сейсмических воздействиях; колебания трубопроводов, используемых в системах подъема конкреций со дна морей, вызванные колебанием корабля. Причем возможны кинематические возбуждения, как детерминированные, так и случайные. В диссертации рассматриваются только детерминированные кинематические возмущения. Несмотря на то, что кинематически возбуждаемые колебания имеют очень широкое распространение в технике, теория и методы численного анализа этих колебаний разработаны недостаточно. Мало уделено внимания кинематически возбуждаемым колебаниям систем с распределенными параметрами, к которым относятся, например, стержневые элементы конструкций. Наибольшие трудности при анализе установившихся колебаний связаны со случаями, когда кинематическое возбуждение



397.1951

(линейное или угловое) имеет место в дискретных сечениях стержня. В зависимости от частоты кинематического возмущения и спектра частот стержневого элемента возможны очень интенсивные вибрации. Поэтому возникает проблема снижения уровня вибраций, которую решают путем введения в систему локальных систем амортизации с последующим определением оптимальных параметров. Эти задачи практически не рассматривались. Поэтому разработка теории и численных методов исследования колебаний криволинейных стержней при локальном кинематическом возбуждении является актуальной проблемой.

Целью диссертации, выполненной в соответствии с планом работ по госбюджетным темам "Динамика" и "Механика", является разработка теории и основанных на этой теории общих численных методов, которые дают возможность получать числовые характеристики напряженно-деформированного состояния упругих пространственно-криволинейных стержневых элементов при установившихся кинематически возбуждаемых колебаниях как при произвольных направлениях принудительных смещений (линейных и угловых) локальных сечений стержня, так и при принудительных смещениях основания, с которым связан стержень. Для реализации сформулированной цели исследований потребовалось получить: уравнения равновесия пространственно-криволинейного стержня с учетом локальных связей с последующим их решением (определением статического напряженно-деформированного состояния); уравнения малых свободных колебаний относительно состояния равновесия (с определением собственных значений и собственных векторов); уравнения вынужденных колебаний учитывающих кинематическое возбуждение (с последующим их приближенным решением).

Методы исследования. При решении дифференциальных уравнений используются:

- метод дискретного продолжения по параметру для решения нелинейных уравнений равновесия;
- метод приближенного решения системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных, использующий обобщенный принцип возможных перемещений.

Научная новизна результатов, полученных в диссертации, заключается в следующем:

- разработаны методы численного определения статического напряженно-деформированного состояния плоских и пространственно-криволинейных стержней, имеющих промежуточные локальные связи, нагруженных сосредоточенными и распределенными силами; получен алгоритм численного решения задачи о статической устойчивости плоской спирали при нелинейных докритических деформациях;
- получены уравнения малых колебаний пространственно-криволинейных стержней с локальными связями при кинематическом возбуждении;

- разработан метод численного приближенного решения уравнений малых колебаний (системы уравнений в частных производных), позволяющий определять напряженно-деформированное состояние при линейном, угловом и смешанном кинематическом возбуждении в локальных сечениях стержня;
- разработан метод численного исследования влияния локальной системы виброзащиты на уровень вибраций трубопровода.

Практическая ценность результатов, полученных в диссертации, заключается:

- в разработке численных методов определения критических изгибающих моментов, при которых может произойти потеря устойчивости спиральной пружины с выходом из плоскости;
- в изложенном численном методе исследования системы пассивной виброзащиты участков трубопровода при их кинематическом возбуждении.

Внедрение. Результаты, полученные в диссертации, используются в учебном процессе в дисциплинах профессиональной подготовки инженеров-механиков-исследователей (специальность 071100).

Апробация работы. Основные результаты работы обсуждались:

- на научных семинарах кафедры РК-5 (Прикладная механика) МГТУ им. Н.Э.Баумана;
- на V Международном симпозиуме «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред», Россия, Ярнолец, 16 февраля 1999г.;
- на научно технической конференции аспирантов и молодых ученых кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э.Баумана 19 февраля 1999г.

Публикации. Основное содержание диссертации опубликовано в трех печатных работах.

Объем работы. Диссертация состоит из предисловия, пяти глав, заключения, списка литературы из 32 наименований. Работа содержит 132 страницы компьютерного текста, 125 рисунков, 2 таблицы.

Основное содержание работы.

В первой главе дается краткий обзор литературы и обоснование необходимости проведения исследований кинематически возбуждаемых колебаний упругих стержневых элементов.

Вторая глава диссертации посвящена нелинейным уравнениям равновесия пространственно-криволинейных стержней и численному их решению для частных случаев с определением статического напряженно-деформированного состояния, которое необходимо знать при исследовании колебаний. Рассматривается пустотелый упругий стержень (трубопровод), заполненный потоком идеальной несжимаемой жидкости. Как частный

случай при нулевой скорости потока и давлении получаются уравнения равновесия упругих элементов приборов, например, спирали. Нелинейные уравнения пространственно-криволинейного стержня в связанных осях имеют следующий вид (в безразмерной форме записи):

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{Q}_0^{(1)}}{d\eta} + \bar{\alpha}_0 \times \bar{Q}_0^{(1)} + \bar{P}_0 &= 0; \quad \frac{d\bar{M}_0}{d\eta} + \bar{\alpha}_0 \times \bar{M}_0 + \bar{e}_1 \times \bar{Q}_0^{(1)} + \bar{T}_0 = 0; \\ \frac{d\bar{\vartheta}_0}{d\eta} + L_1^{-1} L \bar{\alpha}_{00}^{(1)} - L_1^{-1} \bar{\alpha}_0 &= 0; \quad \bar{M}_0 = A(\bar{\alpha}_0 - \bar{\alpha}_{00}^{(1)}); \\ \frac{d\bar{u}_0}{d\eta} + \bar{\alpha}_0 \times \bar{u}_0 + (I_{11} - 1)\bar{e}_{10} + I_{21}\bar{e}_{20} + I_{31}\bar{e}_{30} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\bar{Q}^{(1)} = \bar{Q} - (P + n_{11}w^2)\bar{e}_1$; P – безразмерное давление ($P = pF_2 l^2 / A_{33}$); w – скорость жидкости внутри стержня; n_{11} – безразмерная масса жидкости ($n_{11} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$); $\bar{Q}$ – вектор внутренних сил; $\bar{M}$ – вектор внутренних

моментов; $\bar{u}$ – вектор перемещений осевой линии стержня; $\bar{\vartheta}$ – вектор, компонентами которого являются углы поворота главных осей сечения; $\bar{\alpha}$ – вектор кривизн деформированной осевой линии стержня; $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ – единичные вектора базиса связанных осей; $\bar{\alpha}_{00}^{(1)}$ – вектор, компонентами которого являются кривизны стержня в ненагруженном состоянии; A – диагональная матрица, элементами которой соответственно являются: A_{11} – жесткость на кручение, A_{22} и A_{33} – изгибные жесткости; η – безразмерная дуговая координата; p – давление жидкости внутри стержня; l – длина стержня; F_2 – площадь поперечного сечения потока жидкости.

Входящие в уравнения матрицы равны

$$L_1^{-1} = \frac{1}{\cos \vartheta_3} \begin{bmatrix} \cos \vartheta_2 & 0 & \sin \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_3 \cos \vartheta_2 & \cos \vartheta_3 & \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \\ -\sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 & 0 & \cos \vartheta_2 \cos \vartheta_3 \end{bmatrix}; \quad (2)$$

$$L = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_2 \cos \vartheta_3 & \cos \vartheta_2 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_3 + \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_3 - \\ & + \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_1 & - \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_1 \\ -\sin \vartheta_3 & \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_3 & \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_3 \\ \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 & \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_3 - \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_3 + \\ & - \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_1 & + \cos \vartheta_2 \cos \vartheta_1 \end{bmatrix}; \quad (3)$$

Под векторами $\bar{P}_0$ и $\bar{T}_0$ в уравнении (1) понимается соответственно сумма всех внешних сил и сумма всех внешних моментов:

$$\bar{P}_0 = \bar{q}_0 + \sum_{k=1}^p \bar{P}_0^{(k)} \delta(\eta - \eta_k); \quad \bar{T}_0 = \bar{\mu}_0 + \sum_{i=1}^m \bar{T}_0^{(i)} \delta(\eta - \eta_i), \quad (4)$$

где $\bar{q}_0$ и $\bar{\mu}_0$ - распределенные сила и момент; $\bar{P}_0^{(k)}$ и $\bar{T}_0^{(i)}$ - сосредоточенные сила и момент; $\delta(\eta - \eta_k)$ - Дельта-функция Дирака. При наличии дополнительных локальных связей и сосредоточенных масс (рис.1), получим, например, выражение для силы $\bar{P}_0$:

$$\bar{P}_0 = -g_0 \bar{i}_2 - \gamma_0 \bar{i}_2 \delta(\eta - \eta_3) - c_0 \bar{u}_0 \delta(\eta - \eta_1) + \bar{R}_0 \delta(\eta - \eta_2) + \sum_{k=1}^p \bar{P}_0^{(k)} \delta(\eta - \eta_k), \quad (5)$$

где $g_0 = \frac{g}{l p_0^2}$; $\gamma_0 = \frac{mg l}{A_{33}}$; $c_0 = \frac{cl^3}{A_{33}}$; $p_0 = \sqrt{\frac{A_{33}}{(m_1 + m_2) l^4}}$.

Или в скалярной форме записи, когда внешние силы заданы в декартовых осях

$$P_{j0} = \{ -g_0 - \gamma_0 \delta(\eta - \eta_3) \} (\bar{e}_{j0} \cdot \bar{i}_2) - c_0 u_{j0} \delta(\eta - \eta_1) + R_{j0} \delta(\eta - \eta_2) + \sum_{k=1}^p \{ P_{j0}^{(k)} (\bar{e}_{j0} \cdot \bar{i}_v) \delta(\eta - \eta_k) \}; \quad (6)$$

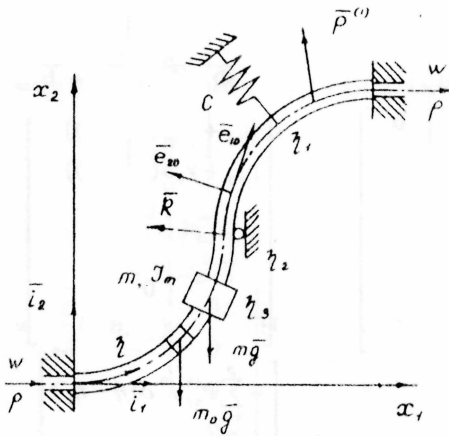


Рис. 1

уравнений (2.1) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{Q}_0^{(1)}}{d\eta} + \bar{\alpha}_{00} \times \bar{Q}_0^{(1)} + \bar{P}_0 &= 0; & \frac{d\bar{Q}_0}{d\eta} + \bar{\alpha}_{00} \times \bar{Q}_0 - A^{-1} \bar{M}_0 &= 0; \\ \frac{d\bar{M}_0}{d\eta} + \bar{\alpha}_{00} \times \bar{M}_0 + \bar{e}_{10} \times \bar{Q}_0^{(1)} + \bar{T}_0 &= 0; & \frac{d\bar{u}_0}{d\eta} + \bar{\alpha}_{00} \times \bar{u}_0 - \mathcal{G}_{30} \bar{e}_{20} + \mathcal{G}_{20} \bar{e}_{30} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Будем считать, что изменения кривизн осевой линии трубопровода при статическом нагружении малы, т.е. можно положить

$$\bar{\alpha}_0 = \bar{\alpha}_{00} + \Delta \bar{\alpha}, \quad (7)$$

где вектор $\Delta \bar{\alpha}$ характеризует малые изменения кривизн осевой линии стержня. При малых отклонениях осевой линии стержня от ее ненагруженного состояния можно положить $\bar{e}_i \approx \bar{e}_{j0}$. В силу малости линейных и угловых перемещений имеем

$$L \bar{\alpha}_{00} - \bar{\alpha}_0 = -\Delta \bar{\alpha} - \bar{G}_0 \times \bar{\alpha}_{00}; \quad L_1 = E. \text{ После этого система}$$

Для плоского стержня, осевая линия которого при нагружении остается плоской кривой, имеем $\alpha_{10} = \alpha_{20} = 0$; $Q_{30} = 0$; $M_{10} = M_{20} = 0$; $\mathcal{Q}_{10} = \mathcal{Q}_{20} = 0$; $u_{30} = 0$. Поэтому из системы (8) получаем

$$\begin{aligned} \frac{dQ_{10}^{(1)}}{d\eta} - \alpha_{300}Q_{20} + P_{10} &= 0; & \frac{dM_{30}}{d\eta} + Q_{20} + T_{30} &= 0; & \frac{du_{10}}{d\eta} - \alpha_{300}u_{20} &= 0; \\ \frac{dQ_{20}}{d\eta} + \alpha_{300}Q_{10}^{(1)} + P_{20} &= 0; & \frac{d\mathcal{Q}_{30}}{d\eta} - \frac{M_{30}}{A_{33}} &= 0; & \frac{du_{20}}{d\eta} + \alpha_{300}u_{10} - \mathcal{Q}_{30} &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{где } P_{10} = \{ -g_0 - \gamma_0 \delta(\eta - \eta_3) \} l_{12}^0 - c_0 u_{10} \delta(\eta - \eta_1) + \sum_{k=1}^p (P_{x1}^{(k)} l_{11}^0 + P_{x2}^{(k)} l_{12}^0) \delta(\eta - \eta_k);$$

$$\begin{aligned} P_{20} &= \{ -g_0 - \gamma_0 \delta(\eta - \eta_3) \} l_{22}^0 - c_0 u_{20} \delta(\eta - \eta_1) + R_{20} \delta(\eta - \eta_2) + \\ &+ \sum_{k=1}^p (P_{x1}^{(k)} l_{21}^0 + P_{x2}^{(k)} l_{22}^0) \delta(\eta - \eta_k) \end{aligned}$$

$\{l_{\nu}^0\}$ - матрица перехода от базиса $\bar{i}_{\nu}$ к базису $\bar{e}_{j_0}$.

Для численного решения представим систему (9) в виде векторного уравнения

$$\frac{d\bar{Z}}{d\eta} + A\bar{Z} = \bar{\Phi}, \quad (10)$$

$$\text{где } \bar{Z} = \{Q_{10}^{(1)}; Q_{20}; M_{30}; \mathcal{Q}_{30}; u_{10}; u_{20}\}^T;$$

$$\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_g + \bar{\Phi}_R + \bar{\Phi}_P;$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_{300} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{300} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{A_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{300} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \alpha_{300} & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{\Phi}_g = \begin{bmatrix} \{g_0 + \gamma_0 \delta(\eta - \eta_3)\} l_{12}^0 \\ \{g_0 + \gamma_0 \delta(\eta - \eta_3)\} l_{22}^0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\bar{\Phi}_R = \begin{bmatrix} c_0 u_{10} \delta(\eta - \eta_1) \\ c_0 u_{20} \delta(\eta - \eta_1) - R_{20} \delta(\eta - \eta_2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{\Phi}_P = \begin{bmatrix} -\sum_{k=1}^p P_{x\nu}^{(k)} l_{\nu}^0 \delta(\eta - \eta_k) \\ -\sum_{k=1}^p P_{x\nu}^{(k)} l_{2\nu}^0 \delta(\eta - \eta_k) \\ -\sum_{i=1}^m T_{30}^{(i)} \delta(\eta - \eta_i) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Решение уравнения (10) ищем в виде

$$\bar{Z}(\eta) = K(\eta)\bar{C} + \int_0^\eta G(\eta, \xi) \bar{\Phi}(\xi) d\xi, \quad (K(0) = E) \quad (11)$$

где $K(\eta)$ - фундаментальная матрица решений, $G(\eta, \xi) = K(\eta)K^{-1}(\xi)$ - матрица Грина, $\bar{C}$ - вектор констант. Рассмотрим частное решение уравнения (11) и запишем его более подробно

$$\int_0^\eta G(\eta, \xi) \bar{\Phi}(\xi) d\xi = \bar{Z}_g + \bar{Z}_R + \bar{Z}_p, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{Z}_g &= g_0 \int_0^\eta G(\eta, \xi) \begin{bmatrix} l_{12}^0(\xi) \\ l_{22}^0(\xi) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d\xi + \gamma_0 G(\eta, \eta_3) \begin{bmatrix} l_{12}^0(\eta_3) \\ l_{22}^0(\eta_3) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} H(\eta - \eta_3); \\ \bar{Z}_R &= G(\eta, \eta_2) \begin{bmatrix} 0 \\ -R_{20} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} H(\eta - \eta_2) + G(\eta, \eta_1) \begin{bmatrix} c_0 u_{10}(\eta_1) \\ c_0 u_{20}(\eta_1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} H(\eta - \eta_1); \\ \bar{Z}_p &= - \sum_{k=1}^p G(\eta, \eta_k) \begin{bmatrix} p_{x\nu}^{(k)} l_{1\nu}^0 \\ p_{x\nu}^{(k)} l_{2\nu}^0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} H(\eta - \eta_k) - \sum_{i=1}^m G(\eta, \eta_i) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_{30}^{(i)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} H(\eta - \eta_i), \end{aligned}$$

$H(\eta)$ - функция Хевисайда. Для определения компонент вектора $\bar{C}$ имеем 6 краевых условий (по 3 на каждом конце стержня). Из краевых условий (рис.1) при $\eta=0$ (заделка) получаем $C_4 = C_5 = C_6 = 0$. Из краевых условий при $\eta=1$ (заделка) $Z_4(1) = Z_5(1) = Z_6(1) = 0$ и дополнительного условия $Z_6(\eta_2) = 0$ получаем систему четырех линейных неоднородных алгебраических уравнений, из которой находим $O_4; C_5; C_6; R_{20}$. На рис.2 и рис.3 представлены графики некоторых компонент статического напряженно-деформированного состояния.

Из системы уравнений (1) как частный случай получены уравнения равновесия плоской спирали при критическом состоянии и уравнения равновесия спирали после потери устойчивости с выходом из плоскости (более подробно рассмотрено в пятой главе). Основная особенность задачи об устойчивости плоской спирали заключается в том, что ее критическое состояние определяется из нелинейных уравнений равновесия. Приводится алгоритм численного решения, и определяются критические значения момента T .

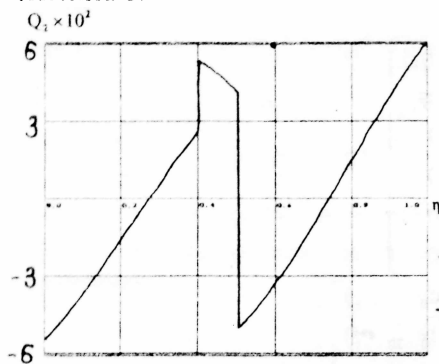


Рис.2

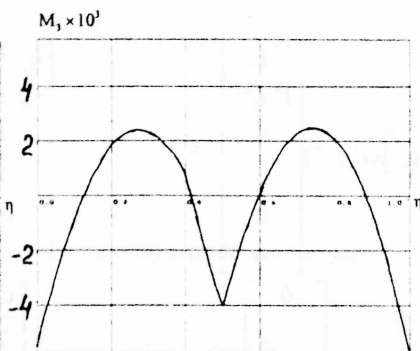


Рис.3

Третья глава диссертации посвящена выводу линеаризованных уравнений колебаний упругого стержня (с учетом внутреннего потока жидкости). Нелинейные уравнения движения стержня в связанных осях имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau} + \bar{\omega} \times \bar{v} + 2n_{11}w(\bar{\omega} \times \bar{e}_1) - \frac{\partial \bar{Q}^{(1)}}{\partial \eta} - \bar{\alpha} \times \bar{Q}^{(1)} - \bar{P} &= 0; \\ \frac{\partial \bar{M}}{\partial \eta} + \bar{\alpha} \times \bar{M} + \bar{e}_1 \times \bar{Q}^{(1)} + \bar{T} &= 0; \quad L_1 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \eta} + L\bar{\alpha}_{00}^{(1)} - \bar{\alpha} = 0; \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + \bar{\alpha} \times \bar{u} + (l_{11} - 1)\bar{e}_1 + l_{21}\bar{e}_2 + l_{31}\bar{e}_3 &= 0; \quad L_1 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \tau} - \bar{\omega} = 0; \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} + \bar{\omega} \times \bar{u} - \bar{v} &= 0; \quad \bar{M} = A(\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_{00}^{(1)}), \end{aligned} \quad (13)$$

где $\bar{\omega}$ - вектор угловой скорости; τ - безразмерное время; $\bar{v}$ - вектор линейной скорости; $\bar{u}$ - вектор динамических перемещений; матрица L_1 равна

$$L_1 = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_2 \cos \vartheta_3 & 0 & -\sin \vartheta_2 \\ -\sin \vartheta_3 & 1 & 0 \\ \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 & 0 & \cos \vartheta_2 \end{bmatrix}.$$

Из системы уравнений (13) (полагая $\bar{Q}^{(1)} = \bar{Q}_0^{(1)} + \Delta\bar{Q}$; $\bar{M} = \bar{M}_0 + \Delta\bar{M}$; $\bar{P} = \bar{P}_0 + \Delta\bar{P}$; $\bar{T} = \bar{T}_0 + \Delta\bar{T}$; $\bar{x} = \bar{x}_0 + \Delta\bar{x}$; $\bar{v} = \Delta\bar{v}$; $\bar{u} = \Delta\bar{u}$; $\bar{\omega} = \Delta\bar{\omega}$; $\bar{\vartheta} = \Delta\bar{\vartheta}$) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \tau^2} + A_w \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \tau} + \alpha_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} - \frac{\partial \Delta\bar{Q}}{\partial \eta} - A_Q A^{-1} \Delta\bar{M} - A_* \Delta\bar{Q} - \Delta\bar{P} &= 0; \\ \frac{\partial \Delta\bar{M}}{\partial \eta} + A_M A^{-1} \Delta\bar{M} + A_* \Delta\bar{M} + A_1 \Delta\bar{Q} + \Delta\bar{T} &= 0; \quad \Delta\bar{M} = A \Delta\bar{x}; \\ \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \eta} + A_* \bar{\vartheta} - A^{-1} \Delta\bar{M} &= 0; \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + A_* \bar{u} + A_1 \bar{\vartheta} = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где α_0 - безразмерный коэффициент силы вязкого сопротивления;

$$\begin{aligned} A_Q &= \begin{bmatrix} 0 & Q_{30} & -Q_{20} \\ -Q_{30} & 0 & Q_{10}^{(1)} \\ Q_{20} & -Q_{10}^{(1)} & 0 \end{bmatrix}; \quad A_M = \begin{bmatrix} 0 & M_{30} & -M_{20} \\ -M_{30} & 0 & M_{10} \\ M_{20} & -M_{10} & 0 \end{bmatrix}; \\ A_* &= \begin{bmatrix} 0 & -x_{30} & x_{20} \\ x_{30} & 0 & -x_{10} \\ -x_{20} & x_{10} & 0 \end{bmatrix}; \quad A_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2n_{11}w \\ 0 & -2n_{11}w & 0 \end{bmatrix}; \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Систему (14) можно представить в виде векторного уравнения

$$\bar{L}(\bar{Z}) = A^{(1)} \frac{\partial^2 \bar{Z}}{\partial \tau^2} + A^{(3)} \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \eta} + A^{(2)} \bar{Z} - \Delta\bar{\Phi} = 0, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -E \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} A_* & A_Q A^{-1} & 0 & 0 \\ A_1 & A_* + A_M A^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -A^{-1} & A_* & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & A_* \end{bmatrix}; \\ A^{(3)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -A_w & -\alpha_0 E \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{Z} = \begin{bmatrix} \Delta\bar{Q} \\ \Delta\bar{M} \\ \bar{\vartheta} \\ \bar{u} \end{bmatrix}; \quad \Delta\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} -\Delta\bar{P} \\ -\Delta\bar{T} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta\bar{P} &= -c_0 \bar{u} \delta(\eta - \eta_1) - m_s \ddot{\bar{u}} \delta(\eta - \eta_3) + \Delta\bar{R} \delta(\eta - \eta_2) + \\ &+ \sum_{k=1}^n (P_{x\nu}^{(k)} \Delta l_{\mu\nu}^0 \bar{e}_j + \Delta\bar{P}^{(k)}) \delta(\eta - \eta_k) - \{g_0 + \gamma_0 \delta(\eta - \eta_3)\} \Delta l_{\mu\nu}^0 \bar{e}_j; \\ \Delta\bar{T} &= \sum_{i=1}^m (T_{x\nu}^{(i)} \Delta l_{\mu\nu}^0 \bar{e}_j + \Delta\bar{T}^{(i)}) \delta(\eta - \eta_i) - J_0 \ddot{\bar{\vartheta}} \delta(\eta - \eta_3), \end{aligned}$$

где m_δ, J_0 - безразмерные параметры: $m_\delta = \frac{m}{(m_1 + m_2)l}$, $J_0 = \frac{J_m}{(m_1 + m_2)l^3}$,

ΔJ_{ij} - элементы матрицы ΔL :

$$\Delta L = \begin{bmatrix} 0 & \Delta \vartheta_3 & -\Delta \vartheta_2 \\ -\Delta \vartheta_3 & 0 & \Delta \vartheta_1 \\ \Delta \vartheta_2 & -\Delta \vartheta_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для определения собственных значений и собственных векторов полагаем $A^{(1)} = 0$, $\Delta \bar{P}^{(k)} = 0$, $\Delta \bar{T}^{(i)} = 0$, $\bar{Z} = \bar{Z}_0 e^{i\theta r}$, $\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_0 e^{i\theta r}$ и из уравнения (15) получаем

$$\frac{d\bar{Z}_0}{d\eta} + (A^{(2)} - \beta^2 A^{(1)})\bar{Z}_0 = \Delta \bar{\Phi}_0, \quad (16)$$

где $\Delta \bar{\Phi}_0 = \{\Delta \bar{P}_0; \Delta \bar{T}_0; 0; 0\}^T$; $\bar{Z}_0 = \{\Delta \bar{Q}_0; \Delta \bar{M}_0; \bar{\vartheta}_0; \bar{u}_0\}^T$;

$$\Delta \bar{P}_0 = c_0 \bar{u}_0 \delta(\eta - \eta_1) - \beta^2 m_\delta \bar{u}_0 \delta(\eta - \eta_3) - \Delta \bar{R}_0 \delta(\eta - \eta_2) + \\ + \{g_0 + \gamma_0 \delta(\eta - \eta_3)\} \Delta J_{12}^0 \bar{e} - \sum_{k=1}^p \Delta L L^0 \bar{P}_x^{(k)} \delta(\eta - \eta_k);$$

$$\Delta \bar{T}_0 = -\beta^2 J_0 \bar{\vartheta}_0 \delta(\eta - \eta_3) - \sum_{i=1}^m \Delta L L^0 \bar{T}_x^{(i)} \delta(\eta - \eta_i).$$

Решение уравнения (16)

$$\bar{Z}_0(\eta) = K(\eta) \bar{C} + \int_0^\eta G(\eta, \xi) \Delta \bar{\Phi}_0(\xi) d\xi. \quad (17)$$

Рассмотрим в (17) слагаемое, зависящее от правой части, которое можно представить в виде

$$\int_0^\eta G(\eta, \xi) \Delta \bar{\Phi}_0(\xi) d\xi = \bar{Z}_{0g} + \bar{Z}_{0R} + \bar{Z}_{0P} + \bar{Z}_{0m}, \quad (18)$$

$$\text{где } \bar{Z}_{0g} = g_0 \int_0^\eta G(\eta, \xi) D_1(\xi) \bar{Z}_0(\xi) d\xi + \gamma_0 G(\eta, \eta_3) D_1(\eta_3) \bar{Z}_0(\eta_3) H(\eta - \eta_3);$$

$$\bar{Z}_{0R} = G(\eta, \eta_2) D_6(\eta_2) H(\eta - \eta_2) + G(\eta, \eta_1) D_5(\eta_1) \bar{Z}_0(\eta_1) H(\eta - \eta_1);$$

$$\bar{Z}_{0m} = -\beta^2 G(\eta, \eta_3) D_2(\eta_3) \bar{Z}_0(\eta_3) H(\eta - \eta_3);$$

$$\bar{Z}_{0P} = -\sum_{k=1}^p G(\eta, \eta_k) D_3(\eta_k) \bar{Z}_0(\eta_k) H(\eta - \eta_k) - \sum_{i=1}^m G(\eta, \eta_i) D_4(\eta_i) \bar{Z}_0(\eta_i) H(\eta - \eta_i).$$

В зависимости от краевых и дополнительных условий в точках, где расположены локальные связи, получаем однородные уравнения, из которых определяются β_i и соответствующие им собственные векторы $\bar{Z}_0^{(i)}$

в том числе и для частного случая - плоского трубопровода (колебания плоского трубопровода в плоскости его осевой линии). На рис.4 и рис.5 представлены компоненты ΔQ_2 и ΔM_3 первых трех собственных векторов при колебаниях трубопровода в своей плоскости.

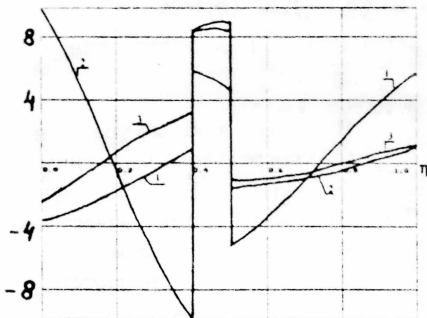
$\Delta Q_2 \times 10$ 

Рис.4

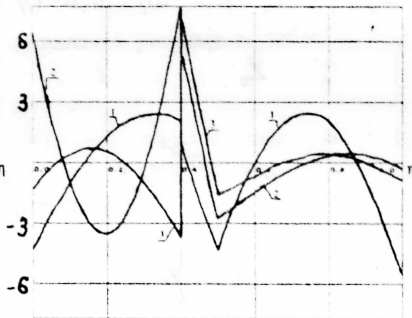
 $\Delta M_1 \times 10^2$ 

Рис.5

В четвертой главе рассматриваются вынужденные колебания стержневых элементов, вызванные кинематическим возбуждением. Приближенное решение уравнения (15) ищем в виде

$$\tilde{\tilde{Z}}(\tau, \eta) = \sum_{j=1}^n \bar{Z}_0^{(j)}(\eta) f^{(j)}(\tau) \quad (19)$$

где $f^{(j)}(\tau)$ - неизвестные функции времени; $\bar{Z}_0^{(j)}(\eta)$ - собственные вектора, удовлетворяющие всем краевым условиям. Подставив (19) в (15), будем иметь:

$$\begin{aligned} \bar{L}(\tilde{\tilde{Z}}) = & A^{(1)} \sum_{j=1}^n \bar{Z}_0^{(j)}(\eta) \dot{f}^{(j)}(\tau) + A^{(3)} \sum_{j=1}^n \bar{Z}_0^{(j)}(\eta) \ddot{f}^{(j)}(\tau) + \sum_{j=1}^n \bar{Z}_0^{(j)}(\eta) f^{(j)}(\tau) + \\ & + A^{(2)} \sum_{j=1}^n \bar{Z}_0^{(j)}(\eta) f^{(j)}(\tau) - \Delta \bar{\Phi} = \delta \bar{\Phi}, \end{aligned} \quad (20)$$

где $\delta \bar{\Phi}$ - невязка, характеризующая погрешность приближенного решения. Для минимизации невязки согласно обобщенному принципу возможных перемещений потребуем, чтобы выполнялись условия

$$\int_0^1 \bar{L}(\tilde{\tilde{Z}}) \cdot E_0 \bar{Z}_0^{(i)} d\eta = 0 \quad (i=1..n), \quad (21)$$

$$\text{где } E_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

После преобразований с учетом $\bar{u}(\eta_2)=0$ и (16) получаем систему уравнений пространственных колебаний стержня для наиболее общего случая, когда кинематические возбуждения и углы произвольны

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} \ddot{f}^{(j)} + b_{ij} \dot{f}^{(j)} + c_{ij} f^{(j)}) = - \sum_{k=1}^3 \Delta P_v^{(k)} u_{0v}^{(i)}(\eta_k) - \sum_{k=1}^3 \Delta T_v^{(k)} g_{0v}^{(i)}(\eta_k), \quad (22)$$

где $a_{ij} = \int_0^1 A^{(i)} \bar{Z}_0^{(j)} \cdot E_0 \bar{Z}_0^{(i)} d\eta - m_s \bar{u}_0^{(j)}(\eta_3) \cdot \bar{u}_0^{(i)}(\eta_3) - J_0 \bar{g}_0^{(j)}(\eta_3) \cdot \bar{g}_0^{(i)}(\eta_3);$

$$b_{ij} = \int_0^1 A^{(3)} \bar{Z}_0^{(j)} \cdot E_0 \bar{Z}_0^{(i)} d\eta; \quad c_{ij} = \beta_j^2 a_{ij}.$$

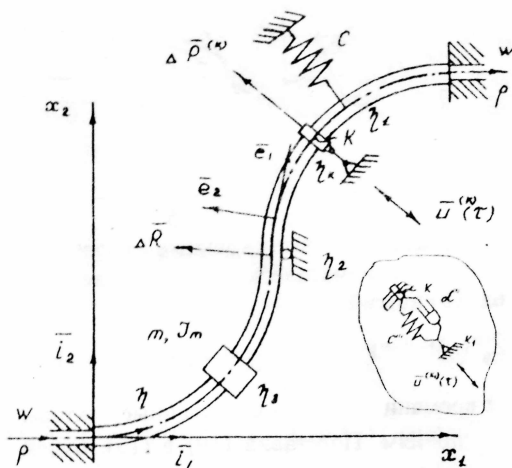


Рис.6

Входящие в общие уравнения (15) сосредоточенные силы и моменты $\Delta \bar{P}^{(k)}$ и $\Delta \bar{T}^{(i)}$ содержат кроме известных внешних сил и моментов и неизвестные сосредоточенные силы и моменты, которые вводятся в уравнения в сечениях, где имеет место принудительное перемещение локальных точек осевой линии стержня и принудительные повороты сечений. В главе изложен алгоритм определения этих неизвестных сил и моментов при известных кинематических законах перемещений локальных

точек осевой линии стержня и углов поворота сечений, что является решением задачи о колебаниях стержневой конструкции при кинематическом возбуждении. Рассмотрим частный случай, когда имеется линейное принудительное смещение в точке K с координатой η_k (рис.6). В диссертации рассмотрен случай углового принудительного поворота сечения и общий случай, когда кинематически возбуждаемые колебания вызваны линейными и угловыми смещениями дискретных точек стержня. Систему уравнений (22) представим в виде

$$A \ddot{\bar{f}} + B \dot{\bar{f}} + C \bar{f} = -D \bar{P}^{(k)}, \quad (23)$$

где $d_{iv} = u_{0v}^{(i)}(\eta_k); \quad \bar{f} = [f^{(1)}; f^{(2)}; \dots; f^{(n)}]^T.$

Сила $\bar{P}^{(k)}$, входящая в уравнение (23), есть неизвестная сила, которая введена в точке K, где имеет место кинематическое возбуждение. В дальнейшем рассматриваются установившиеся колебания стержней при $\bar{u}^{(k)} = \bar{u}_0^{(k)} \cos \omega \tau$. Поэтому неизвестную силу $\bar{P}^{(k)}$ представляем в виде

$$\bar{P}^{(k)}(\tau) = \bar{P}_{10}^{(k)} \cos \omega \tau + \bar{P}_{20}^{(k)} \sin \omega \tau. \quad (24)$$

Компоненты вектора $\bar{u}^{(k)}(\tau)$ в соответствии с (19) запишутся как

$$u_v^{(k)} = \sum_{j=1}^n u_{0v}^{(j)}(\eta_k) f^{(j)} = \sum_{j=1}^n d_{jv} f^{(j)},$$

что эквивалентно записи в векторной форме

$$\bar{u}^{(k)} = D^T \bar{f}. \quad (25)$$

Решение уравнения (23) при установившемся режиме колебаний ищем в виде

$$\bar{f}(\tau) = \bar{f}_{10} \cos \omega \tau + \bar{f}_{20} \sin \omega \tau. \quad (26)$$

Подставив (26) и (24) в (23) и сгруппировав члены с $\sin(\omega \tau)$ и $\cos(\omega \tau)$, получим два векторных уравнения

$$\begin{aligned} -\omega^2 A \bar{f}_{10} + \omega B \bar{f}_{20} + C \bar{f}_{10} &= -D \bar{P}_{10}^{(k)}; \\ -\omega^2 A \bar{f}_{20} - \omega B \bar{f}_{10} + C \bar{f}_{20} &= -D \bar{P}_{20}^{(k)}. \end{aligned} \quad (27)$$

Подставив (26) в (25) и проведя аналогичные преобразования, получим еще два уравнения

$$\begin{aligned} D^T \bar{f}_{10} &= \bar{u}_0^{(k)}; \\ D^T \bar{f}_{20} &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Система уравнений (27) и (28) позволяет определить амплитудные значения всех неизвестных векторов. Из уравнений пространственных колебаний стержня при кинематическом возбуждении получены уравнения колебаний плоского стержня (трубопровода) (рис.6). Знание амплитудных значений внутренних сил и изгибающего момента позволяет определить эквивалентное напряжение, что необходимо при оценке возможного наступления предельного состояния стержня ($\sigma_{\text{экв}} < \sigma_T / n_T$) в сечениях, где эквивалентное напряжение достигает максимальных значений и для оценки усталостной долговечности. В четвертой главе рассмотрена также задача о пассивной виброзащите трубопровода при кинематическом возбуждении. В месте (точка К рис.4), где на стержень передается принудительное смещение, для снижения уровня вибраций стержня вводится система амортизации, которую можно рассматривать как упруго-вязкий демпфер. Поэтому неизвестная сила $\bar{P}^{(k)}$, действующая на стержень, равна

$$\bar{P}^{(k)} = C^{(k)}(\bar{u}^{(k)} - \bar{u}^{(k)}) + B^{(k)}(\dot{\bar{u}}^{(k)} - \dot{\bar{u}}^{(k)}), \quad (29)$$

где $\bar{u}^{(k)}$ - заданное перемещение точки K_i ; $C^{(k)}$ и $B^{(k)}$ - матрицы, соответственно зависящие от жесткости и вязких свойств амортизатора. Подставляя (29) в уравнение (23) и принимая во внимание (25), получаем уравнение

$$A^0 \ddot{\bar{f}} + B^0 \dot{\bar{f}} + C^0 \bar{f} = -D C^{(k)} \bar{u}^{(k)} - D B^{(k)} \dot{\bar{u}}^{(k)}, \quad (30)$$

где $A^0 = A$; $B^0 = B - D B^{(k)} D^T$; $C^0 = C - D C^{(k)} D^T$.

Решение уравнения при установившихся колебаниях дает возможность определить амплитудные значения компонент вектора состояния $\bar{Z}$, а также числовые значения критериев качества в зависимости от числовых значений параметров упруго-вязкого амортизатора, что позволяет определить оптимальные параметры системы пассивной виброзащиты. В качестве критериев, характеризующих эффективность работы системы амортизации,

использовались: интеграл по длине стержня от амплитудных значений эквивалентного напряжения

$$S = \int_0^l \sigma_A |d\eta|, \quad (31)$$

интеграл по длине стержня от амплитудных значений динамических перемещений

$$J = \int_0^l \sqrt{u_{1A}^2(\eta) + u_{2A}^2(\eta)} d\eta. \quad (32)$$

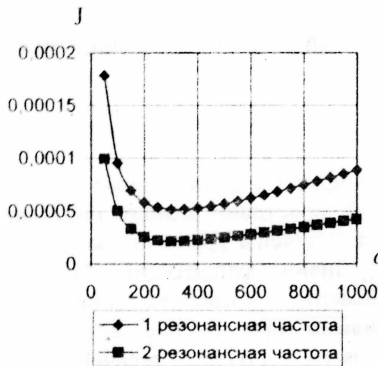


Рис.7

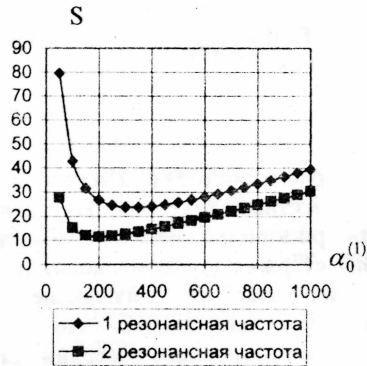


Рис.8

На рис.7 и рис.8 приведены графики изменения S и J в зависимости от коэффициента $\alpha_0^{(1)} \left(\alpha_0^{(1)} = \frac{\alpha^{(1)} p_0 l^3}{A_{33}} \right)$ силы вязкого сопротивления системы

пассивной виброзащиты. Из графика следует, что значение α_0^* , при котором критерий S (или J) достигает минимального значения можно считать оптимальным.

В пятой главе диссертации рассмотрены кинематически возбуждаемые колебания спиральной пружины относительно состояния равновесия. Спираль связана с вибрирующим основанием, поэтому нагружается распределенными силами инерции. Так как рассматриваются колебания относительно нагруженного состояния, то предварительно определяется статическое напряженно-деформированное состояние (спираль нагружается моментом T , приложенным к втулке, рис.9). При нормальной работе спираль должна оставаться в плоскости, поэтому необходимо, чтобы параметры спирали были такими, при которых момент Γ был бы меньше критического (иначе спираль выйдет из плоскости). В главе определяется статическое напряженно-деформированное состояние спирали и исследуются ее колебания при кинематическом возбуждении в

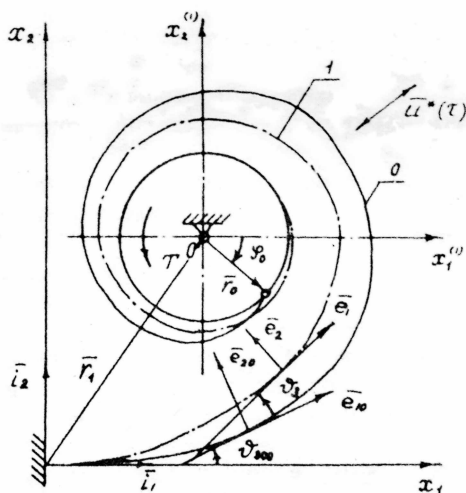


Рис. 9

плоскости осевой линии. Определены частоты и амплитуды установившихся кинематически возбуждаемых колебаний в зависимости от момента T . В таблице 1 представлены значения критического крутящего момента T , в зависимости от отношения радиусов r_1/r_0 , отношения жесткостей A_{22}/A_{33} и числа витков спирали n . На рис. 10 приведены графики значений первых трех собственных частот свободных колебаний спирали в зависимости от момента T .

Таблица 1

		$n=6$			$n=12$			$n=16$		
		r_1/r_0	A_{22}/A_{33}		r_1/r_0	A_{22}/A_{33}		r_1/r_0	A_{22}/A_{33}	
T	0,25	2,4	2,2	2,2	2,3	2,2	2	2,3	2,3	2
	0,5	4,5	3,9	3,7	4,1	3,9	3,9	4	3,9	3,89
	1	—	6,8	6,4	—	6,5	6,4	6,9	6,5	6,24
	2	—	—	—	—	9,1	8,7	—	11	10,7

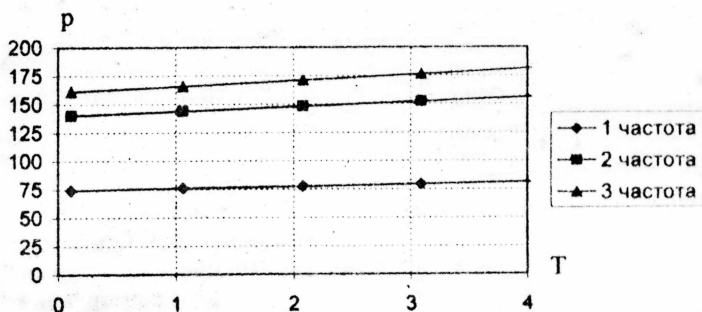


Рис. 10

Основные выводы.

1. Разработаны методы численного решения уравнений равновесия криволинейных стержней, имеющих локальные связи.

2. Получены уравнения равновесия плоского криволинейного стержня (спирали) при критическом состоянии и после потери устойчивости. Изложен алгоритм определения критического момента, при котором спираль теряет устойчивость с выходом из плоскости. Особенность этой задачи заключается в том, что критическое состояние спирали определяется из нелинейных уравнений равновесия.
3. Разработан алгоритм численного определения собственных значений и собственных векторов при свободных колебаниях криволинейного стержня, имеющего локальные связи.
4. Получены уравнения малых колебаний стержня (трубопровода) при локальном кинематическом возбуждении (при принудительных линейных или угловых смещениях сечений стержня).
5. Разработан приближенный метод решения уравнений (системы уравнений в частных производных) установившихся колебаний при кинематическом возбуждении. Численным решением уравнений вынужденных колебаний определено динамическое напряженно-деформированное состояние стержня, которое необходимо знать при оценке прочности и долговечности трубопровода.
6. Получены уравнения и разработан численный метод анализа влияния локальной пассивной виброизоляции при кинематическом возбуждении на уровень вибраций. Определены оптимальные параметры системы амортизации (коэффициент силы вязкого сопротивления), при которых введенный критерий качества (интеграл по длине трубопровода от амплитудных значений эквивалентного напряжения) достигает минимального значения при заданной частоте кинематического возбуждения.
7. Получены уравнения и разработан численный метод исследования колебаний спирали при кинематических смещениях основания.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. Буда-Красновский С.В., Лагозинский С.А., Светлицкий В.А. Устойчивость плоской спирали // Вестник МГТУ. Сер.Машиностроение. – 1999г. – N1. – С.84-91.
2. Буда-Красновский С.В. Определение собственных значений и собственных векторов криволинейного трубопровода, заполненного потоком жидкости // Деп. рук. ВИНИТИ. – 1999. - №1529-В99. – 14с.
3. Буда-Красновский С.В., Лагозинский С.А., Светлицкий В.А. Статическая и динамическая устойчивость плоских криволинейных стержней // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: Тезисы докладов V Международного симпозиума. – М., 1999. – С.26-27.

Подписано к печати 12.11.99 Зак. № 154/ Объем 1,0 п.л. Тираж 100 экз.
 Типография МГТУ им. Н.Э.Баумана.