

На правах рукописи

Скуев Михаил Валерьевич

УДК 531.22.8

**РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ МАЧТЫ
С АНТЕННОЙ В ПОТОКЕ ВОЗДУХА**

01.02.06 — Динамика, прочность машин,
приборов и аппаратуры

Автореферат

М. Скуев

диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Работа выполнена в Московском государственном техническом университете имени Н. Э. Баумана

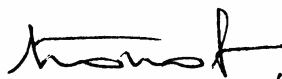
- Научный руководитель — доктор технических наук,
профессор Светлицкий В. А.
- Официальные оппоненты — доктор технических наук,
профессор Чирков В. П. (МЭИ)
— доктор технических наук,
доцент Аринчев С. В. (МГТУ)
- Ведущая организация — ГосМКБ «Вымпел»

Защита состоится " 17 " мая 1998 г. в 10⁰⁰ час. на заседании Специализированного совета К 053.15.11 в Московском государственном техническом университете имени Н. Э. Баумана по адресу: 107005, Москва,

закончить в библиотеке МГТУ

1558498

май 1998 г.

 , Попов П. К.



1558498

Скуев М. В. Расчет нестационарности темы.

Общая характеристика работы

1558498

Нестационарность темы. Задачи расчета конструкций или их элементов, взаимодействующих с потоком воздуха, встречаются во многих областях техники. К этим задачам, в частности, относится расчет высотных сооружений (мачтовых и башенных конструкций) в условиях нагружения аэродинамическими силами. Мачтовые конструкции, являющиеся опорами для антенн в системах радиорелейной связи, при эксплуатации нагружаются аэродинамическими силами, вызванными потоком воздуха, скорость которого может очень сильно изменяться, в том числе и случайно. Аэродинамические силы вызывают колебания мачты с антенной, что может привести к нарушению нормального режима ее работы из-за недопустимого отклонения фокальной оси направленной антенны. Несмотря на большое число публикаций, посвященных расчету мачтовых конструкций, развитие техники предъявляет новые требования, среди которых основным является увеличение точности расчетов и, как следствие этого, увеличение точности работы и надежности системы мачта – антенна, особенно в экстремальных условиях, когда система нагружается внезапно приложенными или импульсными аэродинамическими силами (детерминированными или случайными). Внезапное воздействие на систему мачта – антенна аэродинамических сил вызывает нестационарные колебания, которые могут привести к появлению опасных напряжений в мачте и большим линейным и угловым отклонениям антенны. Увеличение точности расчетов требует как применения новых численных математических методов, так и уточнения математических моделей с максимальным учетом физических особенностей работы мачты с антенной в реальных условиях. Эти задачи существовали и раньше, но рассматривались в упрощенной постановке из-за отсутствия быстродействующей вычислительной техники. Поэтому разработка новых математических моделей и высокоточных численных методов исследования нестационарных колебаний мачтовых конструкций является актуальной проблемой.

Целью диссертации, выполненной в соответствии с планом государственной научно-исследовательской тематики МГТУ им. Н. Э. Баумана, и посвященной исследованию мобильных мачтовых опор антенн, является:

- разработка математической модели и соответствующих численных методов расчета мачты с антенной и локальными связями (оттяжками), находящейся в потоке воздуха;
- разработка численного метода решения нелинейных уравнений равновесия при статических нагрузках с определением напряженно-деформированного состояния мачты;
- определение и анализ напряженно-деформированного состояния мачты с антенной при нестационарных колебаниях, вызванных детерминирован-

ными и случайными аэродинамическими силами;

- разработка численного алгоритма определения максимально возможного отклонения луча антенны при нестационарном, стационарном и импульсном случайном нагружении системы мачта – антенна.

Методом исследования в диссертации является компьютерное моделирование, при котором в зависимости от поставленных задач используются следующие адекватные подходы:

- для нелинейного статического расчета реализован вариант метода дискретного продолжения по параметру с уточнением касательной матрицы по Бройдену;
- дискретизация системы по пространству при решении динамических уравнений в частных производных осуществлена методом, использующим обобщенный принцип возможных перемещений;
- вероятностные расчеты выполнены на основе корреляционной теории случайных процессов.

Научная новизна результатов, полученных в диссертации, состоит в следующем:

- разработан общий алгоритм численного анализа статического и динамического напряженно-деформированного состояния стержня, имеющего сосредоточенные не точечные массы и локальные связи и нагруженного гравитационными и аэродинамическими детерминированными силами;
- установлено влияние нелинейных слагаемых на точность численных результатов при решении уравнений равновесия, что позволяет для аналогичных конструкций обосновать возможность использования линейных уравнений;
- разработан алгоритм численного решения системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных при вынужденных колебаниях мачты с антенной, позволяющий получать решения с требуемой точностью;
- разработана методика определения вероятностных характеристик напряженно-деформированного состояния ствола мачты при нестационарных колебаниях, вызванных внезапным нагружением конструкции случайным ветровым потоком;
- разработан метод численного определения максимальных перемещений и углов поворота антенны при действии случайных аэродинамических сил, имеющих случайное направление, что дает возможность определять максимально возможные отклонения луча антенны от заданного направления.

Практическая ценность работы состоит в разработке прикладных программ расчета, в которые входят:

- программы численного определения статического напряженно-деформированного состояния мачты с оттяжками с учетом гравитационных и

детерминированных аэродинамических сил для линейной и нелинейной математических моделей;

– программа численного определения критических гравитационных нагрузок;

– программа определения собственных значений и собственных векторов при пространственных колебаниях мачты с антенной;

– программа редукции системы линейных уравнений в частных производных (уравнений колебаний мачты с антенной) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений;

– программа численного решения уравнений малых нестационарных колебаний, вызванных случайными стационарными и нестационарными (импульсными) аэродинамическими силами, с определением вероятностных характеристик компонент вектора состояния системы;

– программа определения максимально возможного отклонения луча антенны (фокальной оси) при нестационарных случайных колебаниях системы.

Внедрение. Результаты, полученные в диссертации используются в учебном процессе в специальных дисциплинах: теория колебаний, статистическая механика.

Апробация работы. Основные результаты работы были изложены:

– на научно-технической конференции аспирантов и молодых ученых кафедры прикладной механики МГТУ им. Н. Э. Баумана, состоявшейся 20 февраля 1997 г.;

– на научном семинаре кафедры прикладной механики МГТУ им. Н. Э. Баумана 25 декабря 1997 г.

Публикации. Основное содержание диссертации опубликовано в четырех печатных работах.

Объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы из 113 наименований. Работа содержит 180 страниц компьютерного текста, 75 рисунков, 4 таблицы.

Основное содержание работы

В первой главе диссертации дан краткий обзор научно-технической литературы по следующим направлениям:

– устойчивость мачт с оттяжками;

– статика мачтовых и башенных сооружений в потоке воздуха;

– детерминистский и вероятностный динамический анализ стержневых конструкций при ветровой нагрузке.

Обширная научно-техническая литература, посвященная теории и методам расчета мачтовых конструкций содержит результаты фундаментальных и прикладных исследований ученых, работы которых с

успехом используются в настоящее время. Однако возникают новые проблемы, требующие для решения новых математических моделей и методов. К числу таких проблем относится анализ нестационарных колебаний мачты с антенной, вызванных случайными аэродинамическими силами.

Во второй главе рассматривается статическая устойчивость мачты с оттяжками и с закрепленной на ней радиорелейной антенной, достигающей 30 и более процентов от массы всего сооружения.

Расчетная схема приведена на рис. 1. Силы, действующие на мачту со стороны оттяжек, считаются следящими за соответствующими точками закрепления оттяжек на земле, из приращение при потере устойчивости после линеаризации имеет вид:

$$\Delta \vec{P}_x^{(k)} = \left(\frac{N_{0k}}{l_{0k}} - \lambda_k \right) (\Delta \vec{u}_x(s_k) \vec{\gamma}_k) \vec{\gamma}_k - \frac{N_{0k}}{l_{0k}} \Delta \vec{u}_x(s_k). \quad (1)$$

где N_{0k} – сила начального натяжения оттяжки; $l_{0k} = |\vec{B_k C_k}|$ – длина пролета оттяжки в недеформированном состоянии; $\Delta \vec{u}_x(s_k)$ – бифуркационное перемещение точки крепления оттяжки на стволе; $\vec{\gamma}_k = \vec{B_k C_k} / |\vec{B_k C_k}|$; λ_k – эффективная жесткость оттяжки. Величина λ_k получена путем линеаризации кубического уравнения равновесия пологой растяжимой нити и равна

$$\lambda_k = \frac{N_{0k}^3}{N_{0k}^3 + E_k F_k D_{0k} / l_{0k}} \cdot \frac{E_k F_k}{l_{0k}}. \quad (2)$$

где $D_{0k} = (m_k g \sin \psi_k)^2 l_{0k}^3 / 12$; E_k – модуль упругости каната на растяжение; F_k – площадь поперечного сечения каната; m_k – погонная масса;

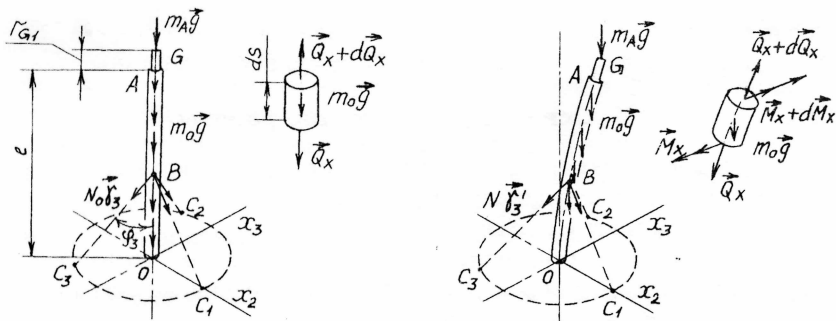


Рис. 1.

ψ_k – угол между осью ствола мачты и хордой оттяжки.

Линеаризованные уравнения равновесия стержня после потери устойчивости в проекциях на декартовы оси имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta Q_{x2}}{ds} - c_{22}\Delta u_{x2} - c_{23}\Delta u_{x3} &= 0; & \frac{d\Delta Q_{x3}}{ds} - c_{32}\Delta u_{x2} - c_{33}\Delta u_{x3} &= 0; \\ \frac{d\Delta M_{x2}}{ds} - \Delta Q_{x3} - Q_{x1}^*\Delta\vartheta_2 &= 0; & \frac{d\Delta M_{x3}}{ds} + \Delta Q_{x2} - Q_{x1}^*\Delta\vartheta_3 &= 0; \\ \frac{d\Delta\vartheta_2}{ds} - \frac{1}{A_{22}}\Delta M_{x2} &= 0; & \frac{d\Delta\vartheta_3}{ds} - \frac{1}{A_{33}}\Delta M_{x3} &= 0; \\ \frac{d\Delta u_{x2}}{ds} - \Delta\vartheta_3 &= 0; & \frac{d\Delta u_{x3}}{ds} + \Delta\vartheta_2 &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где ΔQ_{x2} , ΔQ_{x3} , ΔM_{x2} , ΔM_{x3} – приращения проекций поперечных сил и моментов; Δu_{x2} , Δu_{x3} – проекции вектора перемещений осевой линии стержня; $\Delta\vartheta_2$, $\Delta\vartheta_3$ – углы поворота поперечного сечения стержня; $A_{22} = EI_{x2}$, $A_{33} = EI_{x3}$ – изгибные жесткости стержня;

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^{n_{\text{от}}} [(\lambda_k - N_{0k}/l_{0k})\gamma_{k2}^2 + N_{0k}/l_{0k}] \delta(s - s_k) \quad (i = 2, 3);$$

$$c_{23} = c_{32} = \sum_{k=1}^{n_{\text{от}}} (\lambda_k - N_{0k}/l_{0k}) \gamma_{k2} \gamma_{k3} \delta(s - s_k);$$

$$Q_{x1}^* = -m_A g + \sum_{k=1}^{n_{\text{от}}} [1 - H(s - s_k)] N_{0k} \gamma_{k1} - g \int_s^l m_0(s') ds';$$

Q_{x1}^* – критическая продольная сила в стержне; H и δ – соответственно функции Хевисайда и Дирака; m_A – масса оборудования, устанавливаемого на мачте; $m_0(s)$ – погонная масса стержня. Решение системы уравнений (3) должно удовлетворять следующим краевым условиям:

1) при $s = 0$ $\Delta u_{x2} = \Delta u_{x3} = 0$, $\Delta\vartheta_2 = \Delta\vartheta_3 = 0$;

2) при $s = l$ $\Delta Q_{x2} = \Delta Q_{x3} = 0$,

$$\Delta M_{x2} - r_{G1} m_A g \Delta\vartheta_2 = 0, \quad \Delta M_{x3} - r_{G1} m_A g \Delta\vartheta_3 = 0.$$

Результаты расчета ствола мачты переменного сечения, составленного из пяти алюминиевых труб (сплав В95Т2) с суммарной длиной 33 м приведены на графиках рис. 2 и 3, где показана зависимость критического веса антенны $P^* = (m_A g)^*$ от силы начального натяжения оттяжек. Рис. 2 соответствует расчету мачты с одним ярусом оттяжек с координатами точек закрепления 11, 22 и 33 м (кривые 1, 2, 3). Рис. 3 относится к расчету мачты с двумя ярусами оттяжек при высоте их закрепления 20 и 33 м.

Результаты второй главы дают возможность оценить устойчивость

мачты и определить максимально возможный вес антенны в зависимости от числа ярусов оттяжек и их натяжения.

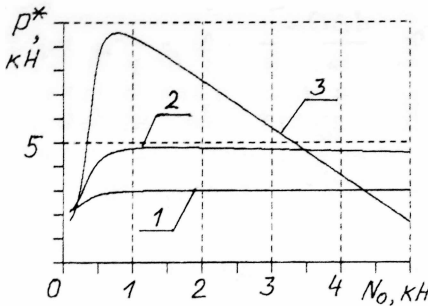


Рис. 2.

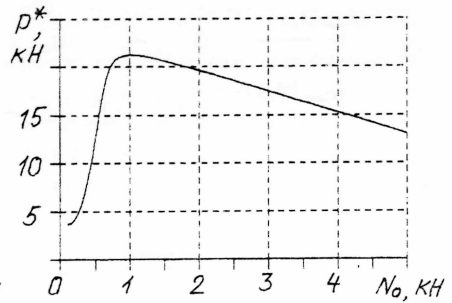


Рис. 3.

Третья глава посвящена определению напряженно-деформированного состояния мачты при статическом нагружении.

Нелинейные векторные уравнения равновесия мачты в связанных осях имеют вид

$$\frac{d\vec{Q}}{ds} + \vec{\alpha} \times \vec{Q} + \vec{q}^{(r)} + \vec{q}^{(a)} + (\vec{P}^{(r)} + \vec{P}^{(a)})\delta(s-l) + \sum_{k=1}^{n_{от}} \vec{P}^{(k)}\delta(s-s_k) = 0; \quad (4)$$

$$\frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{\alpha} \times \vec{M} + \vec{e}_1 \times \vec{Q} + (\vec{r}_G \times \vec{P}^{(r)} + \vec{r}_D \times \vec{P}^{(a)})\delta(s-l) = 0; \quad (5)$$

$$\frac{d\vec{\vartheta}}{ds} - L_1^{-1}\vec{\alpha} = 0; \quad (6)$$

$$\frac{d\vec{u}}{ds} + \vec{\alpha} \times \vec{u} + (l_{11} - 1)\vec{e}_1 + l_{21}\vec{e}_2 + l_{31}\vec{e}_3 = 0; \quad (7)$$

$$\vec{M} = \mathbf{A}\vec{\alpha}, \quad (8)$$

где $\vec{Q}$ и $\vec{M}$ – соответственно вектора внутренних сил и моментов; $\mathbf{A} = \text{diag}(A_{11}, A_{22}, A_{33})$; A_{11} – жесткость при кручении, A_{22} и A_{33} – жесткости при изгибе; $\vec{u}$ – вектор перемещений точек осевой линии стержня; $\vec{\vartheta}$ – вектор углов поворота связанных осей; $\vec{\alpha}$ – вектор кривизн деформированной осевой линии стержня; $\vec{e}_j$ – единичные вектора базиса связанных осей; $\vec{q}^{(a)}$, $\vec{P}^{(a)}$ – аэродинамическая нагрузка; $\vec{q}^{(r)}$, $\vec{P}^{(r)}$ – силы тяжести; $\vec{P}^{(k)}$ – сила, действующая на мачту со стороны k -ой оттяжки; $\vec{r}_D$ – вектор, соединяющий точку крепления антенны с точкой

приложения силы $\vec{P}^{(a)}$; $\vec{r}_G$ – вектор, соединяющий точку крепления антенны с точкой приложения силы $\vec{P}^{(r)}$; l_{11} , l_{21} , l_{31} – элементы матрицы

$$L(s) = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_2 \cos \vartheta_3 & \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_3 + \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_3 - & \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_3 - \\ - \sin \vartheta_3 & \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 & - \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 & \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_3 & \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_3 \\ \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 & \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 - & \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 + \\ & - \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 & + \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \end{bmatrix};$$

$$L_1^{-1} = \frac{1}{\cos \vartheta_3} \begin{bmatrix} \cos \vartheta_2 & 0 & \sin \vartheta_2 \\ \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_3 & \cos \vartheta_3 & \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \\ - \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 & 0 & \cos \vartheta_2 \cos \vartheta_3 \end{bmatrix};$$

$$\vec{q}^{(r)} = -m_0(s) g (l_{11} \vec{e}_1 + l_{21} \vec{e}_2 + l_{31} \vec{e}_3); \vec{P}^{(r)} = -m_A g (l_{11} \vec{e}_1 + l_{21} \vec{e}_1 + l_{31} \vec{e}_1) \Big|_{s=l};$$

$$\vec{q}^{(a)} = k_0 v_0 |\sin \varphi_a| [(l_{22} \cos \alpha + l_{23} \sin \alpha) \vec{e}_2 + (l_{32} \cos \alpha + l_{33} \sin \alpha) \vec{e}_3],$$

$$\vec{P}^{(a)} = k_A v_0 |\sin \varphi_a| \sum_{j=1}^3 (l_{j2} \cos \alpha + l_{j3} \sin \alpha) \vec{e}_j \Big|_{s=l},$$

где α – угол, определяющий направление потока воздуха ($\vec{v}_0 = v_0 \cos \alpha \vec{e}_1 + v_0 \sin \alpha \vec{e}_2$), $\cos \varphi_a = (\vec{v}_0 \vec{e}_1) / |\vec{v}_0| = l_{12} \cos \alpha + l_{13} \sin \alpha$, $k_0 = 0,5 c_n \rho_b d_0$, $k_A = \frac{\pi}{8} c_x \rho_b d_A$, c_n , c_x – аэродинамические коэффициенты, ρ_b – плотность воздуха;

$$\vec{P}^{(k)} = [N_{0k} + \lambda_k (l_{1k} - l_{0k})] \vec{\gamma}'_k,$$

$$l_{1k} = |l_{0k} L(s_k) \vec{\gamma}_k - \vec{u}(s_k)|, \quad \vec{\gamma}'_k = (l_{0k} L(s_k) \vec{\gamma}_k - \vec{u}(s_k)) / l_{1k}.$$

Граничные условия: при $s = 0$ $\vec{u} = 0$, $\vec{v} = 0$; при $s = l$ $\vec{Q} = 0$, $\vec{M} = 0$.

Для численного решения нелинейных уравнений равновесия (4)–(8) был использован метод дискретного продолжения по параметру.

В третьей главе получены нелинейные и линеаризованные уравнения, характеризующие статическое состояние мачты с учетом эксцентриситета сосредоточенной массы и аэродинамической нагрузки. Разработаны и реализованы алгоритмы численного решения нелинейных уравнений методом дискретного продолжения по параметру и решения линеаризованных уравнений методом начальных параметров.

Четвертая глава диссертации посвящена выводу уравнений малых колебаний мачты с антенной и определению собственных значений и собственных векторов.

Полагая $\vec{Q}_n = \vec{Q}_0 + \vec{Q}$, $\vec{M}_n = \vec{M}_0 + \vec{M}$, где $\vec{Q}_0$, $\vec{M}_0$ – соответственно вектора внутренних сил и моментов при статическом нагружении, $\vec{Q}$, $\vec{M}$ – динамические составляющие, получаем линейные уравнения колебаний мачты с антенной в потоке воздуха

$$m_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + N \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{Q}}{\partial s} - A_Q A^{-1} \vec{M} = \vec{q}; \quad (9)$$

$$\mathbf{J} \frac{\partial^2 \vec{\vartheta}}{\partial t^2} - \frac{\partial \vec{M}}{\partial s} - \mathbf{A}_M \mathbf{A}^{-1} \vec{M} - \mathbf{A}_1 \vec{Q} = \vec{\mu}; \quad (10)$$

$$\frac{\partial \vec{\vartheta}}{\partial s} - \mathbf{A}^{-1} \vec{M} = 0; \quad (11)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial s} + \mathbf{A}_1 \vec{\vartheta} = 0; \quad (12)$$

где $\mathbf{N}$ – диагональная матрица, элементами которой являются коэффициенты вязкого сопротивления; $\mathbf{J}$ – диагональная матрица физических моментов инерции поперечного сечения стержня;

$$\mathbf{A}_Q = \begin{bmatrix} 0 & Q_{03} & -Q_{02} \\ -Q_{03} & 0 & Q_{01} \\ Q_{02} & -Q_{01} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_M = \begin{bmatrix} 0 & M_{03} & -M_{02} \\ -M_{03} & 0 & M_{01} \\ M_{02} & -M_{01} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

В уравнениях (9)–(10)

$$\vec{q} = \vec{q}^{(a)} + \vec{q}^{(r)} + (\vec{P}^{(u)} + \vec{P}^{(r)} + \vec{P}^{(a)})\delta(s-l) + \sum_{k=1}^{n_{от}} \vec{P}^{(k)}\delta(s-s_k), \quad (13)$$

$$\vec{\mu} = (\vec{T}^{(u)} + \vec{T}^{(r)} + \vec{T}^{(a)})\delta(s-l), \quad (14)$$

$\vec{q}^{(a)}$ – динамическая ветровая нагрузка, полученная с учетом аэродинамического демпфирования и представления модуля скорости ветра в виде суммы средней и пульсационной составляющих $v = v_0 + v_{сл}$,

$$\vec{q}^{(a)} = k_0 v_0^2 \vec{a}_\alpha + 2k_0 v_0 v_{сл} \vec{a}_\alpha + k_0 v_0^2 \mathbf{A}_{\alpha 0} \vec{\vartheta} - k_0 v_0 \mathbf{A}_\alpha \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \quad (15)$$

где $\vec{a}_\alpha = (0, \cos \alpha, \sin \alpha)^T$; $\mathbf{A}_{\alpha 0}$ и $\mathbf{A}_\alpha$ – матрицы, элементы которых зависят от угла α ;

$\vec{q}^{(r)}$ – нагрузка, обусловленная поворотом связанных осей при колебаниях стержня в поле силы тяжести,

$$\vec{q}^{(r)} = -m_0(s) g \mathbf{A}_1 \vec{\vartheta}; \quad (16)$$

$\vec{P}^{(u)}$ – сила инерции поступательного движения сосредоточенной массы,

$$\vec{P}^{(u)} = -m_A \left(\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - \mathbf{A}_G \frac{\partial^2 \vec{\vartheta}}{\partial t^2} \right) \Big|_{s=l}, \quad \mathbf{A}_G = \begin{bmatrix} 0 & -r_{G3} & r_{G2} \\ r_{G3} & 0 & -r_{G1} \\ -r_{G2} & r_{G1} & 0 \end{bmatrix}; \quad (17)$$

$\vec{P}^{(r)}$ – нагрузка, обусловленная поворотом связанных осей при колебаниях тела в поле силы тяжести,

$$\vec{P}^{(r)} = -m_A g \mathbf{A}_1 \vec{\vartheta}_A \Big|_{s=l}; \quad (18)$$

$\vec{P}^{(a)}$ – динамическая ветровая нагрузка, действующая на антенну,

$$\begin{aligned} \vec{P}^{(a)} = & k_A v_0^2 \vec{a}_\alpha + 2k_A v_0 v_{cл} \vec{a}_\alpha + k_A v_0^2 \mathbf{A}_{\alpha 2} \vec{\vartheta} - k_A v_0 \mathbf{A}_{\alpha 1} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \\ & + k_A v_0 \mathbf{A}_{\alpha 1} \mathbf{A}_D \frac{\partial \vec{\vartheta}}{\partial t}, \quad (s = l); \end{aligned} \quad (19)$$

$\vec{P}^{(k)}$ – приращение реакции k -ой оттяжки при колебаниях ($s = s_k$),

$$\vec{P}^{(k)} = \mathbf{\Lambda}_{1k} \vec{\vartheta} + \mathbf{\Lambda}_{2k} \vec{u}, \quad \mathbf{\Lambda}_{1k} = N_{0k} \mathbf{\Gamma}_{1k}, \quad \mathbf{\Lambda}_{2k} = \left(\frac{N_{0k}}{l_{0k}} - \lambda_k \right) \mathbf{\Gamma}_{1k} - \frac{N_{0k}}{l_{0k}} \mathbf{E}, \quad (20)$$

$\mathbf{\Gamma}_{1k}$, $\mathbf{\Gamma}_{2k}$ – матрицы, элементы которых зависят от компонент $\vec{\gamma}_k$;

$\vec{T}^{(u)}$ – момент инерции антенны относительно точки закрепления на стволе,

$$\vec{T}^{(u)} = -(\mathbf{J}_A - m_A \mathbf{A}_G^2) \frac{\partial^2 \vec{\vartheta}}{\partial t^2} - m_A \mathbf{A}_G \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (s = l); \quad (21)$$

$\vec{T}^{(r)}$, $\vec{T}^{(a)}$ – моменты от сил $\vec{P}^{(r)}$, $\vec{P}^{(a)}$,

$$\vec{T}^{(r)} = \mathbf{A}_G \vec{P}^{(r)}, \quad \vec{T}^{(a)} = \mathbf{A}_D \vec{P}^{(a)}. \quad (22)$$

Граничные условия: при $s = 0$ $\vec{u} = 0$, $\vec{\vartheta} = 0$; при $s = l$ $\vec{Q} = 0$, $\vec{M} = 0$.

Систему уравнений (9)–(10) можно записать в виде

$$\vec{L}(\vec{z}) = \mathbf{A}^{(1)} \frac{\partial^2 \vec{z}}{\partial t^2} + \mathbf{A}^{(2)} \frac{\partial \vec{z}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{z}}{\partial s} + \mathbf{A}^{(3)} \vec{z} - \vec{b}^{(1)} - v_{cл} \vec{b}^{(2)} = 0, \quad (23)$$

где $\vec{z} = (\vec{Q}, \vec{M}, \vec{\vartheta}, \vec{u})^T$, матрицы $\mathbf{A}^{(1)}$, $\mathbf{A}^{(2)}$, $\mathbf{A}^{(3)}$ имеют размерность 12×12 , вектора $\vec{b}^{(1)}$ и $\vec{b}^{(2)}$ содержат по 12 компонент. В диссертации разработан метод определения собственных значений и собственных векторов для общего случая пространственных свободных колебаний мачты, позволяющий учитывать инерционные свойства антенного оборудования.

Собственные вектора в дальнейшем используются для приближенного решения уравнения малых вынужденных колебаний системы в частных производных (23), которое ищется в виде

$$\vec{Z}(t, s) = \sum_{k=1}^{\nu} f_k(t) \vec{Z}^{(k)}(s), \quad (24)$$

где $\vec{Z}^{(k)}(s)$ – собственные вектора, $f_k(t)$ – неизвестные функции времени, для которых после преобразований, выполненных с использованием обобщенного принципа возможных перемещений, предложенного в

монографии В.А. Светлицкого «Механика стержней» (том 2), получена следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\mathbf{A}\ddot{\vec{f}} + \mathbf{B}\dot{\vec{f}} + \mathbf{C}\vec{f} = \vec{d}^{(1)} + v_{\text{сд}}\vec{d}^{(2)}. \quad (25)$$

где элементы матриц $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ и векторов $\vec{d}^{(i)}$ ($i = 1, 2$) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} a_{jk} &= \int_0^l (\mathbf{A}^{(1)} \vec{Z}^{(k)} \cdot \mathbf{E}_0 \vec{Z}^{(j)}) ds, \quad b_{jk} = \int_0^l (\mathbf{A}^{(2)} \vec{Z}^{(k)} \cdot \mathbf{E}_0 \vec{Z}^{(j)}) ds, \\ c_{jk} &= \int_0^l ((-d\vec{Z}^{(k)}/ds + \mathbf{A}^{(3)} \vec{Z}^{(k)}) \cdot \mathbf{E}_0 \vec{Z}^{(j)}) ds, \quad d_{jk}^{(i)} = \int_0^l (\vec{b} \cdot \mathbf{E}_0 \vec{Z}^{(j)}) ds, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\mathbf{E}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{E} \\ 0 & 0 & \mathbf{E} & 0 \\ 0 & \mathbf{E} & 0 & 0 \\ \mathbf{E} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Изложенный алгоритм численного приближенного решения уравнения (23) позволяет исследовать нестационарные и стационарные колебания, вызванные детерминированными и случайными нагрузками. Разработана программа для вычисления элементов матриц $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ и компонент векторов $\vec{d}^{(1)}$, $\vec{d}^{(2)}$, позволяющая учитывать до 50 собственных векторов в приближенном решении, что дает возможность получать результаты практически с любой точностью.

Пятая глава посвящена численному решению уравнений нестационарных и стационарных колебаний мачты с антенной при случайных аэродинамических нагрузках. Рассмотрены случаи внезапного нагружения конструкции воздушным потоком, модуль скорости которого представлен в виде суммы постоянной и случайной составляющих

$$v = v_0 + v_{\text{сл}} \quad (v_0 = \text{const}), \quad (27)$$

и импульсного нагружения, когда время действия аэродинамической нагрузки можно считать малым. Внезапное нагружение приводит к нестационарным колебаниям системы, что представляет наибольшую опасность для ее нормальной работы. В диссертации для проведения расчетов выбрана функция, имеющая табличное косинус-преобразование Фурье, близкая по своим свойствам к энергетическому спектру Давенпорта:

$$S_v(\omega) = D_v \frac{2\tau_1\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \left(\frac{1}{1 + \tau_1^2\omega^2} - \frac{1}{1 + \tau_2^2\omega^2} \right), \quad (28)$$

$$K_v(\tau) = \frac{D_v}{\tau_2 - \tau_1} [\tau_2 \exp(-|\tau|/\tau_1) - \tau_1 \exp(-|\tau|/\tau_2)], \quad (29)$$

где $\tau_1 = 0,4979 a$, $\tau_2 = 3,347 a$, $a = \frac{1200}{2\pi v_{10}}$, $D_v = 6 k_c v_{10}^2$, v_{10} – средняя скорость ветра на высоте 10 м, k_c – коэффициент сопротивления подстилающей поверхности ($k_c \approx 0,01$).

Векторное уравнение (23) можно представить в виде

$$\dot{\vec{y}} + A_0 \vec{y} = \vec{b}_1 + v_{cl} \vec{b}_2 \quad (\vec{y} = (\vec{f}^i, \vec{f}^T)^T). \quad (30)$$

Решение уравнения (30) представлено как сумма детерминированного и случайного векторов

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_0(t) + \vec{y}_c(t),$$

где $\vec{y}_0(t) = \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(t) \vec{b}_1 dt'$, $\vec{y}_c = \Phi(t) \int_0^t v_{cl} \vec{d} dt'$, $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица решений ($\Phi(0) = E$), $\vec{d}(t) = \Phi^{-1}(t) \vec{b}_2$ – неслучайный вектор.

Взаимнокорреляционные функции компонент $\vec{y}$ равны

$$k_{y_i y_m}(t_1, t_2) = \sum_{j=1}^{2\nu} \sum_{l=1}^{2\nu} \varphi_{ij}(t_1) \varphi_{ml}(t_2) \int_0^{t_1} d_j(t'_1) \int_0^{t_2} d_l(t'_2) K_v(t'_1 - t'_2) dt'_2 dt'_1.$$

Математическое ожидание и дисперсия i -ой компоненты вектора состояния при нестационарных колебаниях вычисляются по формулам:

$$m_{z_i}(t, s) = \sum_{j=1}^{\nu} z_i^{(j)}(s) f_{0j}(t), \quad (31)$$

$$D_{z_i}(t, s) = \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} z_i^{(j)}(s) z_i^{(k)}(s) k_{f_j f_k}(t, t), \quad (32)$$

где $z_i^{(j)}$, $z_i^{(k)}$ – i -ые элементы собственных векторов $\vec{Z}^{(j)}$ и $\vec{Z}^{(k)}$, $f_{0j} = y_{0j+\nu}$, $k_{f_j f_k} = k_{y_{i+\nu} y_{m+\nu}}$.

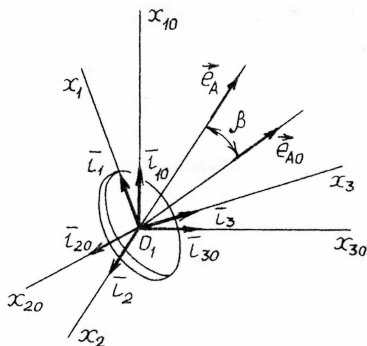


Рис. 4

Одна из основных целей анализа нестационарных колебаний мачты, заключается в определении максимально возможных угловых отклонений луча антенны от заданного направления. На рис. 4 показан единичный вектор $\vec{e}_{A0}$, совпадающий по направлению с лучом при неподвижной антенне в системе $Ox_1x_2x_3$. При колебаниях антенны направление луча характеризуется вектором $\vec{e}_A$.

Угол между векторами $\vec{e}_{A0}$ и $\vec{e}_A$, определяющий отклонение луча антенны, приближенно равен

$$\beta \approx |\vec{e}_{A0} \times \vec{e}_A|. \quad (33)$$

При малых углах ϑ_{Aj} поворота координатных осей

$$\vec{e}_{A0} = \vec{e}_A - \vec{\vartheta}_A \times \vec{e}_A \quad (\vec{\vartheta}_A = \sum_{j=1}^3 \vartheta_{Aj} \vec{e}_j), \quad (34)$$

где ϑ_{Aj} равны углам поворота поперечного сечения стержня при $s = l$. Из (33) и (34) получаем $\beta = \sqrt{(\vec{\vartheta}_A)^2 - (\vec{e}_A \vec{\vartheta}_A)^2}$. Так как направление луча антенны может быть произвольным, то для оценки максимально возможного значения угла отклонения луча антенны принято выражение

$$\beta(t) = \sqrt{(\vec{\vartheta}_A)^2}. \quad (35)$$

Согласно (24), $\beta = \sqrt{\sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\nu} (a_i a_j + b_i b_j + c_i c_j) f_i f_j}$, где $a_i = z_7^{(i)}(l)$, $b_i = z_8^{(i)}(l)$, $c_i = z_9^{(i)}(l)$ – соответствующие значения собственных векторов. Рассматриваются малые колебания, поэтому угол β можно считать малым, что позволяет воспользоваться методом линеаризации выражения (36) и получить вероятностные характеристики угла β :

$$m_\beta = \sqrt{\sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\nu} (a_i a_j + b_i b_j + c_i c_j) m_{f_i} m_{f_j}}, \quad (36)$$

$$\sigma_\beta^2 = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\nu} \left(\frac{\partial \beta}{\partial f_i} \right)_m \left(\frac{\partial \beta}{\partial f_j} \right)_m k_{f_i f_j}. \quad (37)$$

Принято, что $|\beta|$ имеет распределение модуля случайной величины, распределенной по нормальному закону:

$$f(|\beta|) = \frac{1}{\sigma_\beta \sqrt{2\pi}} \left[\exp \left(-\frac{(|\beta| - m_\beta)^2}{2 \sigma_\beta^2} \right) + \exp \left(-\frac{(|\beta| + m_\beta)^2}{2 \sigma_\beta^2} \right) \right]. \quad (38)$$

Тогда математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение $|\beta|$ равны:

$$m_{|\beta|} = 2 [m_\beta \Phi_0(m_\beta/\sigma_\beta) + \sigma_\beta \varphi(m_\beta/\sigma_\beta)], \quad \sigma_{|\beta|} = \sqrt{\sigma_\beta^2 + m_\beta^2 - m_{|\beta|}^2}, \quad (39)$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$, $\Phi_0(x) = \int_0^x \varphi(x') dx'$. Максимально возможное значение $|\beta|$ находится из условия $\int_0^{\beta_{\max}} f(x) dx = \hat{P}$. При получении

численных значений было задано $\hat{P} = 0,9973$. Разработан алгоритм численного определения вероятностных характеристик эквивалентных напряжений в мачте.

Далее в пятой главе получены вероятностные характеристики вектора состояния при стационарных колебаниях мачты с антенной с целью сравнения с результатами расчета при нестационарных колебаниях. Математическое ожидание вектора $\vec{f}$ определено из системы линейных алгебраических уравнений

$$C \vec{f}_0 = \vec{d}^{(1)}. \quad (40)$$

Спектральная плотность k -ой компоненты $\vec{f}$ равна

$$S_{f_k}(\omega) = |\Psi_k|^2 S_v = (\Psi_{1k}^2 + \Psi_{2k}^2) S_v(\omega). \quad (41)$$

где Ψ_k – частотная функция. Дисперсия k -ой компоненты вектора $\vec{f}$

$$D_{f_k} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_{f_k}(\omega) d\omega. \quad (42)$$

Интеграл в выражении (42) получается численно при конечном верхнем пределе, устанавливаемом требованиями к точности решения.

Математическое ожидание и дисперсия i -ой компоненты вектора состояния стержня в сечении с координатой s вычисляются по следующим формулам:

$$m_{z_i}(s) = \sum_{j=1}^{\nu} f_{0j} z_i^{(j)}(s), \quad D_{z_i}(s) = \sum_{j=1}^{\nu} D_{f_j} (z_i^{(j)}(s))^2. \quad (43)$$

В диссертации разработана методика расчета стержневой конструкции при нестационарных колебаниях, возбуждаемых импульсным действием порыва ветра или ударной волны. Решение поставленной задачи при случайном модуле и случайном направлении импульса скоростного напора воздушного потока осложняется тем, что, как правило, отсутствует статистическая информация о параметрах потока, воздействующего на типовые мачтовые конструкции, предназначенные для использования в различных географических регионах и в экстремальных условиях. Изложен алгоритм определения максимально возможного значения углового отклонения луча антенны при произвольном направлении вектора скорости потока. Получено выражение для модуля максимального угла отклонения луча антенны в виде

$$\beta^* = |I_{10}| \sqrt{F_{\max}(t)}, \quad (44)$$

где $|I_{10}|$ — модуль импульса скоростного напора воздуха, $F_{\max}(t) = \max[F(\alpha, t)]$ — функция, зависящая от углов поворота связанных осей стержня в месте крепления антенны. Для случайной величины $|I_{10}|$ было принято распределение модуля случайной величины, распределенной по нормальному закону

$$f(|I_{10}|) = \frac{1}{\sigma_{I_{10}} \sqrt{2\pi}} \left[\exp \left(-\frac{(|I_{10}| - m_{I_{10}})^2}{2 \sigma_{I_{10}}^2} \right) + \exp \left(-\frac{(|I_{10}| + m_{I_{10}})^2}{2 \sigma_{I_{10}}^2} \right) \right].$$

Воспользовавшись алгоритмом определения законов распределения функций случайных аргументов, получаем

$$f(|\beta^*|) = \frac{1}{\sigma_{\beta^*} \sqrt{2\pi}} \left[\exp \left(-\frac{(|\beta^*| - m_{\beta^*})^2}{2 \sigma_{\beta^*}^2} \right) + \exp \left(-\frac{(|\beta^*| + m_{\beta^*})^2}{2 \sigma_{\beta^*}^2} \right) \right]; \quad (45)$$

где $m_{\beta^*} = m_{I_{10}} \sqrt{F_{\max}}$, $\sigma_{\beta^*} = \sigma_{I_{10}} \sqrt{F_{\max}}$. Тогда математическое ожидание и стандарт $|\beta^*|$ равны

$$m_{|\beta^*|} = 2 [m_{\beta^*} \Phi_0(m_{\beta^*}/\sigma_{\beta^*}) + \sigma_{\beta^*} \varphi(m_{\beta^*}/\sigma_{\beta^*})], \quad \sigma_{|\beta^*|} = \sqrt{\sigma_{\beta^*}^2 + m_{\beta^*}^2 - m_{|\beta^*|}^2},$$

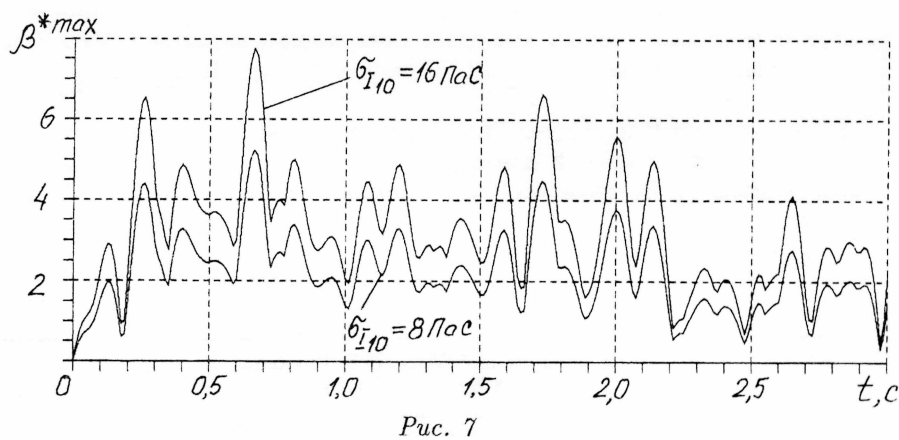
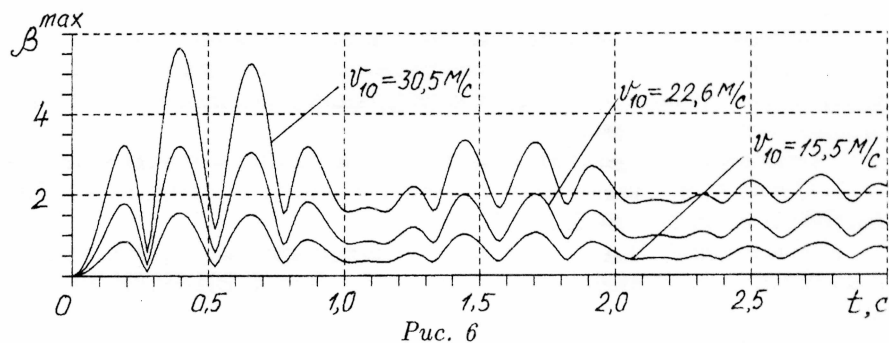
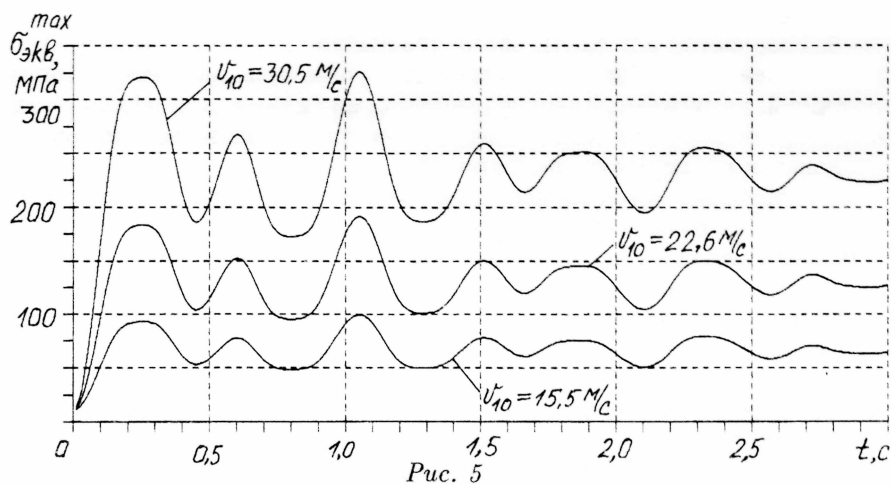
где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$, $\Phi_0(x) = \int_0^x \varphi(x') dx'$. Максимально возможное значение $|\beta^*|$ находится из условия $\int_0^{\beta_{\max}^*} f(x) dx = \hat{P}$. При получении численных значений было задано $\hat{P} = 0,9973$.

На рис. 5, 6, 7 приведены, для примера, результаты расчета нестационарных случайных колебаний мачты высотой 33 м с двумя ярусами оттяжек и антенной, масса которой равна 100 кг. На рис. 5 показано изменение во времени наибольшего эквивалентного напряжения в заделке при внезапном нагружении конструкции аэродинамическими силами при различных скоростях ветра (указана средняя скорость потока на высоте 10 м). Изменение наибольшего угла поворота антенны при тех же условиях нагружения показано на рис. 6. На рис. 7 представлены графики изменения во времени наибольшего угла отклонения луча антенны при импульсном нагружении аэродинамическими силами для различных значений среднего квадратического отклонения импульса скоростного напора, математическое ожидание которого $m_{I_{10}} = 24$ Па·с.

Основные выводы

1. Разработана методика расчета мачты с антенной, находящейся в потоке воздуха, имеющего как детерминированные, так и случайные характеристики.

2. Изложен алгоритм расчета на статическую устойчивость мачтовой опоры с целью определения предельного веса устанавливаемого антенного оборудования.



3. Разработан алгоритм, обеспечивающий высокую точность численного решения линейных и нелинейных уравнений равновесия мачты с антенной, нагруженной аэродинамическими силами, для наиболее общего случая, когда осевая линия мачты из-за несимметричного нагружения становится пространственной кривой.

4. Разработан метод определения собственных значений и собственных векторов для общего случая пространственных колебаний мачты, позволяющий учитывать инерционные свойства антенного оборудования.

5. Исследованы стационарные колебания мачты с антенной при стационарных аэродинамических нагрузках с определением вероятностных характеристик вектора состояния системы.

6. Разработан метод расчета нестационарных случайных колебаний мачты с антенной, позволяющий определить вероятностные характеристики напряженно-деформированного состояния мачты и угла отклонения фокальной оси направленного антенного устройства при действии:

- внезапно приложенной случайной аэродинамической нагрузки;
- случайной по модулю и направлению импульсной нагрузки.

7. На основе теоретических результатов, численных методов и алгоритмов выполнены расчеты трех конструкций мачт, подверженных аэродинамическому воздействию.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. Скуев М.В. Статическая устойчивость мачт с оттяжками / Деп. в ВИНТИ 07.05.97 г. №1522-B97.

2. Светлицкий В.А., Скуев М.В. Нестационарные колебания мачты с антенной при импульсном нагружении / Деп. в ВИНТИ 29.07.97 г. №2528-B97.

3. Скуев М.В. Расчет радиорелейных мачт при случайных аэродинамических нагрузках / Тезисы научно-технической конференции аспирантов и молодых ученых кафедры прикладной механики МГТУ им. Н.Э.Баумана 20 февраля 1997 г. // Известия вузов. Машиностроение. — 1997. — № 1-3. — С. 143.

4. Светлицкий В.А., Скуев М.В. Нестационарные колебания стержня со сосредоточенной массой при случайном импульсном нагружении потоком воздуха // Вестник МГТУ. Машиностроение. — 1998. — № 1. — С. 3-17.

Типография МГТУ им. Н.Э. Баумана

Заказ № 92, тираж 100 экз.

Подписано к печати

Объем 1 п.л.