

1551263

Государственный комитет Российской Федерации
по высшему образованию
Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана

На правах рукописи

Сазгаран Моҳаммед

УДК 531.22.8

УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЛЕБАНИЯ СЖАТО-СКРУЧЕННЫХ
ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ С УЧЕТОМ КОНЕЧНОЙ
ЖЕСТКОСТИ НА КРУЧЕНИЕ.

02.02.06 - Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры.

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Москва - 1996



1551263

Сазгаран М.

Работа выполнена в Московском Государственном техническом университете имени Н. Э. Баумана.

Научный руководитель - доктор технических наук,
профессор Светлицкий В. А.

Официальные оппоненты - д.т.н., профессор Н.А.Алфутов (МГТУ),

- д.ф. - м.н., вед. сотрудник А.П.Сейранян (МГУ)

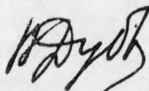
Ведущая организация - МАИ

Защита состоится "20" сентября 1996 г. в 14³⁰ час.
на заседании Специализированного совета Д.053.15.08 при Московском
Государственном техническом университете имени Н. Э. Баумана
по адресу: 107005, Москва, 2-я Бауманская ул., д.5.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МГТУ имени
Н.Э. Баумана.

Автореферат разослан " " _____ 1996 г.

Ученый секретарь
Специализированного совета
к.т.н., доцент



В.В. Дубинин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Элементы конструкций, сводящиеся к расчетной схеме упругого стержня, имеют очень широкое применение в машиностроении и приборостроении. Диапазон их использования очень широк: от буровых установок (штанги) и глубокого сверления отверстий в технологии (сверла) до медицинского инструмента (магнитно-стрикционные пилы). Они используются в качестве упругих элементов приборов (частотные датчики, низкочастотные фильтры, аккумуляторы механической энергии, в системах управления наземной и космической техникой) в механотронных системах. Высоконадежная работа машин и конструкций, а также точность показаний приборов, использующих упругие стержневые элементы в большой степени зависит от точности расчета упругих элементов с учетом условий их работы и реальных механических свойств. Упругие стержневые элементы могут находиться в различных силовых полях, например, в поле силы тяжести; на ускоренно движущемся объекте; на вибрирующем основании; в электромагнитном поле и т.д., что может привести к существенному изменению статических и динамических характеристик упругих элементов, и как следствие этого, к отказам конструкции и к погрешностям в показаниях приборов. Одной из возможных причин потери работоспособности конструкций, содержащих стержневые упругие элементы, является статическая и динамическая потеря устойчивости стержней при действии детерминированных нагрузок. Несмотря на большое число публикаций, посвященных устойчивости прямолинейных стержней, многие прикладные задачи в полном объеме не были исследованы.

При исследовании устойчивости сжатого-скрученного прямолинейного стержня, как правило, не учитывается начальное (до потери устойчивости) кручение стержня. Обычно принимаемое допущение, что кручением стержня можно пренебречь, равносильно условию, что крутильная жесткость стержня равна бесконечности. В то время как крутильная жесткость реального стержня одного порядка с изгибной жесткостью.

Режимы работы упругих стержневых элементов должны быть такими, чтобы при совместном действии сил и крутящего момента их числовые значения не совпадали с критическими значениями. Но для этого надо знать критические значения сил и моментов с высокой степенью точности. Как известно, поведение стержня после потери устойчивости очень сильно зависит от особенностей действующих сил и моментов (имеется в виду "мертвые" и "следящие" силы и моменты или их комбинации).

В зависимости от особенностей внешних нагрузок возможна как

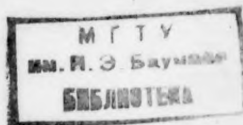
I

НТБ МГТУ им. Н.Э.Баумана



1551263

Сазгаран М. Устойчивость и



статическая потеря устойчивости с переходом в новое равновесное состояние, так и динамическая потеря устойчивости с переходом в режим малых колебаний относительно критического равновесного состояния. С точки зрения практического использования стержней оба эти состояния опасны (так как, как правило, для нормальной работы прибора, машины или конструкции их не должно быть). При статической потере устойчивости, например, сверла при глубоком сверлении, резко ухудшается точность обработки отверстия. При динамической потере устойчивости малые колебания приводят к непрерывному накоплению усталостных повреждений и, в конечном счете, к разрушению сверла. Анализ устойчивости прямолинейных стержней осложняется, если имеются промежуточные опоры, которые могут быть как "жесткими" - шарнирными, так и упругими.

Исследованием влияния конечной (а не бесконечно большой) крутильной жесткости на статическую и динамическую устойчивость прямолинейных сжато-скрученных стержней пока не занимались.

Эта актуальная как для механики стержней, так и для практики проектирования проблема рассматривается в данной диссертации.

Ц е л ь ю д и с с е р т а ц и и является: разработка теории, которая позволяет получать более точные уравнения, характеризующие равновесие и малые колебания стержня до и после потери устойчивости с учетом конечной крутильной жесткости; разработка методов численного определения критических нагрузок при любых вариантах крайних условий и локальных дополнительных связях.

Для реализации сформулированной цели потребовалось получить нелинейные общие уравнения, характеризующие критическое состояние равновесия стержня, и линейные уравнения равновесия и малых колебаний после потери устойчивости с учетом конечной крутильной жесткости; разработать прикладные программы для численного (точного) решения уравнений; определения собственных значений (критических нагрузок и частот) и соответствующих им собственных векторов; разработать прикладные программы для численного исследования устойчивости и малых колебаний прямолинейных сжато-скрученных стержней, имеющих локальные связи.

Н а у ч н а я н о в и з н а результатов, полученных в диссертации, заключается в следующем:

- впервые исследованы задачи статической и динамической устойчивости прямолинейных сжато-скрученных стержней с учетом конечной жесткости на кручение;

- показано, что при точном численном решении линейных уравнений равновесия консольного стержня с разными изгибными жесткостями, нагруженного "мертвой" силой и крутящим моментом ("мертвым" или "следящим") имеют критические силы и моменты, при которых имеет место статическая потеря устойчивости;

- разработан численный метод определения критических значений при мертвой нагрузке для стержней с локальными связями, не требующий стыковки решений для разных участков:

П р а к т и ч е с к а я ц е н н о с т ь результатов, полученных в диссертации, заключается в следующем:

- в разработке прикладных программ, которые дают возможность в практике проектирования получать точные значения критических нагрузок (сжимающей силы и крутящего момента) с учетом конечной жесткости стержня на кручение;

- в разработке прикладных программ численного анализа задач статики (и устойчивости) стержней, имеющих локальные связи, с использованием обобщенных функций;

- в разработке прикладных программ определения действительных и комплексных собственных значений для сжато-скрученных стержней с локальными связями, нагруженных "мертвой" и "следящей" нагрузкой.

В н е д р е н и е. Результаты, полученные в работе, используются в учебном процессе в специальных дисциплинах: 1) Теория колебаний, 2) Устойчивость механических систем.

А п р о б а ц и я р а б о т ы. Основные результаты работы обсуждались на научном семинаре на кафедре "Прикладная механика" (РК-5) МТУ им. Н.Э.Баумана.

П у б л и к а ц и и. По теме диссертации опубликована статья в журнале МТТ (№ 2, 1996). Вторая статья принята к печати в журнале "Вестник МТУ" (серия "Машиностроение").

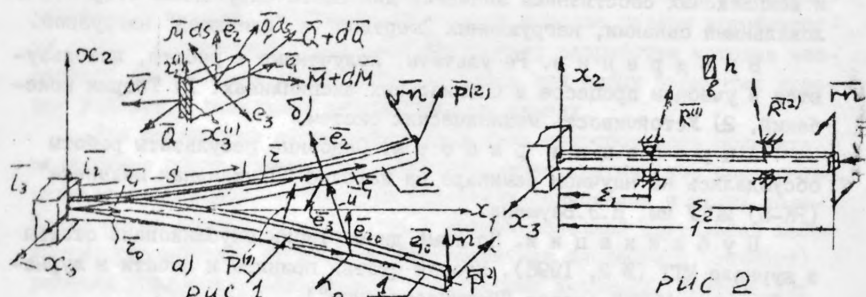
О б ъ е м р а б о т ы. Диссертация состоит из предисловия, введения, четырех глав, заключения, списка литературы и приложений, изложенных на 108 страницах машинописного текста, включая 36 рисунков.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

В предисловии дается обоснование необходимости проведения исследований по статической и динамической устойчивости скато-скрученных прямолинейных стержней.

Первая глава диссертации посвящена конспективному выводу общих нелинейных векторных уравнений равновесия пространственно-криволинейного стержня, которые в последующих главах используются для исследования статической и динамической устойчивости прямолинейных скато-скрученных стержней, имеющих разные изгибные жесткости. При выводе уравнений, необходимых для решения задач, сформулированных в диссертации, приводится краткий вывод общих нелинейных уравнений равновесия и малых колебаний.

На рис. 1а показан стержень до и после нагружения сосредоточенными силами $\vec{P}^{(1)}$ и $\vec{P}^{(2)}$ и сосредоточенным моментом $\vec{M}^{(0)}$. При выводе уравнений используются две системы ортогональных координат: 1) неподвижная (декартова) с базисом $\{\vec{i}_j\}$ и 2) подвижная, связанная с базисом $\{\vec{e}_j\}$.



Рассматривая равновесие элемента стержня (рис. 1б), можно получить следующие уравнения (приведенные к безразмерной форме).

$$\frac{d\vec{Q}_0}{d\varepsilon} + \vec{\alpha}_0 \times \vec{Q}_0 + \vec{P}_0 = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{M}_0}{d\varepsilon} + \vec{\alpha}_0 \times \vec{M}_0 + \vec{e}_1 \times \vec{Q}_0 + \vec{M}^{(0)} = 0, \quad (2)$$

$$L_1 \frac{d\vec{v}_0}{d\varepsilon} + L \vec{\alpha}_0^{(1)} - \vec{\alpha}_0 = 0, \quad (3)$$

$$\frac{d\vec{U}_0}{d\varepsilon} + \vec{\alpha}_0 \times \vec{U}_0 + (\ell_{11} - 1)\vec{e}_1 - \ell_{21}\vec{e}_2 - \ell_{31}\vec{e}_3 = 0, \quad (4)$$

$$\vec{M}_0 = A(\vec{\alpha}_0 - \vec{\alpha}_0^{(1)}), \quad \vec{v}_0 = (v_{01}, v_{02}, v_{03})^T, \quad (5)$$

где $\bar{Q}_0$, $\bar{M}_0$ - вектора внутренних сил и моментов $\bar{Q}_0 = \sum_{j=1}^3 Q_{j0} \bar{e}_j$; $\bar{M}_0 = \sum_{j=1}^3 M_{j0} \bar{e}_j$; Q_{10} - осевая сила, Q_{20} и Q_{30} - перерезывающие силы, M_{10} - крутящий момент, M_{20} и M_{30} - изгибающие моменты, $\bar{x}_{c0}^{(1)}$ - вектор кривизн, компоненты которого характеризуют геометрию осевой линии стержня в ненагруженном состоянии; $\bar{x}_0$ - вектор кривизн, характеризующий геометрию осевой линии в нагруженном состоянии; $\bar{P}$ и $\bar{M}$ соответственно векторы внешних сил и моментов, приложенных к стержню, A - диагональная матрица, элементы которой A_{ii} есть жесткости стержня на кручение A_{11} и изгиб (A_{22} , A_{33}). Моменты M_j связаны с приращениями кривизн соотношениями

$$M_j = A_{jj} (x_{j0} - x_{j00})$$

Входящие в уравнения матрицы L_1 и L равны

$$L_1 = \begin{bmatrix} \cos v_2 \cos v_3 & 0 & -\sin v_2 \\ -\sin v_3 & 1 & 0 \\ \sin v_2 \cos v_3 & 0 & \cos v_2 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$L = \begin{bmatrix} \cos v_2 \cos v_3 - 1 & \cos v_2 \sin v_3 \cos v_1 + \sin v_2 \sin v_1 & \cos v_2 \sin v_3 \sin v_1 - \sin v_2 \cos v_1 \\ -\sin v_3 & \cos v_1 \cos v_2 - 1 & \cos v_2 \sin v_1 \\ \sin v_2 \cos v_3 & \sin v_2 \sin v_3 \cos v_1 - \cos v_2 \sin v_1 & \sin v_2 \sin v_3 \sin v_1 + \cos v_2 \cos v_1 - 1 \end{bmatrix},$$

где v_j - углы поворота связанных осей относительно их положения по нагружения, ℓ_{ij} - элементы матрицы L . В общем случае векторы $\bar{P}$ и $\bar{M}$ равны

$$\bar{P} = \sum_{j=1}^n \bar{P}^{(j)} \delta(\varepsilon - \varepsilon_j) + \bar{q} H(\varepsilon - \varepsilon_j),$$

$$\bar{M} = \sum_{j=1}^n \bar{M}^{(j)} \delta(\varepsilon - \varepsilon_j) + \bar{\mu} H(\varepsilon - \varepsilon_j), \quad (7)$$

где δ - функции Дирака, H - функции Хевисайда, $\bar{P}^{(j)}$, $\bar{M}^{(j)}$ соответственно сосредоточенные силы и моменты, $\bar{q}$ и $\bar{\mu}$ - распределенные силы и распределенные моменты. Система нелинейных уравнений (I)-(5) позволяет исследовать как задачи статики пространственных криволинейных стержней, так и задачи статической устойчивости, когда потеря устойчивости происходит относительно деформированного состояния, которое может весьма сильно отличаться от

естественного (ненагруженного) состояния.

Во второй главе выводятся уравнения равновесия стержня после потери устойчивости для общего случая, когда рассматривается устойчивость пространственно-криволинейного стержня, что позволяет получить наиболее точные уравнения и для частных случаев, например, для рассматриваемого в диссертации прямолинейного стержня.

Получим из системы (I)-(5) уравнения равновесия стержня при критическом состоянии и после потери устойчивости.

После потери устойчивости напряженно-деформированное состояние стержня изменится, поэтому

$$\begin{aligned}\bar{Q}_0 &= \bar{Q}_* + \bar{Q}, \quad \bar{M}_0 = \bar{M}_* + \bar{M}, \quad \bar{x} = \bar{x}_* + \Delta \bar{x}, \\ \bar{U}_0 &= \bar{U}_* + \bar{U}, \quad \bar{\psi}_0 = \bar{\psi}_* + \bar{\psi}_j,\end{aligned}\tag{8}$$

где вектора и углы $(\bar{\psi}_*)$ со звездочкой характеризуют напряженно-деформированное критическое состояние стержня; векторы $\bar{Q}$, $\bar{M}$, $\Delta \bar{x}$, $\bar{U}$, и углы $\bar{\psi}_j$ характеризуют изменение напряженно-деформированного состояния стержня после потери устойчивости. Если новое состояние равновесия близко к критическому, то компоненты векторов $\bar{Q}_j$, $\bar{M}_j$, $\Delta \bar{x}_j$, $\bar{U}_j$ и углы $\bar{\psi}_j$ можно считать малыми величинами, поэтому их произведения являются величинами второго порядка малости и при получении линейных уравнений равновесия ими можно пренебречь.

После преобразований из системы уравнений (I)-(5) получаем две системы уравнений: I) нелинейные уравнения равновесия стержня, соответствующие критическому состоянию

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{Q}_*}{d\bar{\varepsilon}} + \bar{x}_* \times \bar{Q}_* + \bar{P}_* &= 0, \\ \frac{d\bar{M}_*}{d\bar{\varepsilon}} + \bar{x}_* \times \bar{M}_* + \bar{E}_{1*} \times \bar{Q}_* + \bar{H}_{1*} &= 0, \\ L_1 \frac{d\bar{\psi}_*}{d\bar{\varepsilon}} + L_* \bar{x}_0 - \bar{x}_* &= 0, \\ L_1 \frac{d\bar{U}_*}{d\bar{\varepsilon}} + \bar{x}_* \times \bar{U}_* - (l_{11} - 1) \bar{E}_{*1} + l_{21} \bar{E}_{*2} + l_{31} \bar{E}_{*3} &= 0, \\ \bar{M}_* &= A(\bar{x}_* - \bar{x}_{00}^{(1)}),\end{aligned}\tag{9}$$

2) линейные уравнения равновесия стержня после потери устойчивости

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{Q}}{d\varepsilon} + A_{\alpha} \bar{Q} + A_{\alpha_1} A^{-1} \bar{M} + \Delta \bar{P} &= 0, \\ \frac{d\bar{M}}{d\varepsilon} + A_{\alpha} \bar{M} + A_{\alpha_1} A^{-1} \bar{M} + A_1 \bar{Q} + \Delta \bar{M} &= 0, \\ \frac{d\bar{v}}{d\varepsilon} + A_{\alpha} \bar{v} - A^{-1} \bar{M} &= 0, \\ \frac{d\bar{u}}{d\varepsilon} + A_{\alpha} \bar{u} + A_1 \bar{v} &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} A_{\alpha} &= \begin{bmatrix} 0 & Q_{\alpha 3} & -Q_{\alpha 2} \\ -Q_{\alpha 3} & 0 & Q_{\alpha 1} \\ Q_{\alpha 2} & -Q_{\alpha 1} & 0 \end{bmatrix}; & A_{\alpha_1} &= \begin{bmatrix} 0 & M_{\alpha 3} & -M_{\alpha 2} \\ -M_{\alpha 3} & 0 & M_{\alpha 1} \\ M_{\alpha 2} & -M_{\alpha 1} & 0 \end{bmatrix} \\ A_{\alpha} &= \begin{bmatrix} 0 & -x_{\alpha 3} & x_{\alpha 2} \\ x_{\alpha 3} & 0 & -x_{\alpha 1} \\ -x_{\alpha 2} & x_{\alpha 1} & 0 \end{bmatrix}; & A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Входящие в уравнения системы (10) приращения внешних сил и моментов ($\Delta \bar{P}$ и $\Delta \bar{M}$) зависят от поведения приложенных к стержню сил и моментов в процессе его деформирования. Например, если силы и моменты следящие, то в связанных осях их приращения равны нулю. Если "мертвые", то приращения сил и моментов в связанных осях будут отличны от нуля и в общем случае линейно зависят от углов $\bar{v}_j$ и компонент U_j вектора перемещений.

Систему линейных уравнений (10) можно представить в виде

$$\frac{d\bar{z}}{d\varepsilon} + A \bar{z} = \Delta \bar{b}, \quad (\bar{z} = (\bar{Q}, \bar{M}, \bar{v}, \bar{u})^T), \quad (11)$$

$$\text{где} \quad A = \begin{bmatrix} A_{\alpha} & A_{\alpha_1} A^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & A_{\alpha_1} A^{-1} + A_{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & -A^{-1} & A_{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & A_{\alpha} \end{bmatrix} \quad \Delta \bar{b} = \begin{bmatrix} -\Delta \bar{P} \\ -\Delta \bar{M} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Из уравнения (II) можно получить уравнения, позволяющие определить критические силы для практически всех возможных частных случаев, которые возникают при проектировании упругих стержневых элементов приборов и машин.

Уравнения равновесия (до и после потери устойчивости) прямолинейного стержня получаются как частный случай из систем ^(9,10) (10). В этом частном случае имеем

$$\bar{Q}_* = Q_{1*} \bar{e}_1; \quad \bar{M}_* = M_{1*} \bar{e}_1; \quad \bar{U}_* = 0; \\ \bar{x}_* = x_{1*} \bar{e}_1; \quad \bar{Q} = Q_2 \bar{e}_2 + Q_3 \bar{e}_3; \quad \bar{v}_{2*} = \bar{v}_{3*} = 0 \quad (12)$$

$$\bar{M} = M_2 \bar{e}_2 + M_3 \bar{e}_3; \quad \bar{v} = v_2 \bar{e}_2 + v_3 \bar{e}_3; \quad M_j = A_{jj} \Delta x_j, (j=2,3);$$

$$\Delta \bar{x} = \Delta x_2 \bar{e}_2 + \Delta x_3 \bar{e}_3; \quad \bar{U} = U_2 \bar{e}_2 + U_3 \bar{e}_3;$$

В этом случае при наличии промежуточных опор после потери устойчивости появляются две сосредоточенные реакции $\bar{R}^{(1)}$ и $\bar{R}^{(2)}$ (рис.2), поэтому вектора $\Delta \bar{P}$ и $\Delta \bar{M}$ равны

$$\Delta \bar{P} = \bar{R}^{(1)} \delta(\varepsilon - \varepsilon_1) + \bar{R}^{(2)} \delta(\varepsilon - \varepsilon_2), \quad (13) \\ \Delta \bar{M} = 0.$$

После преобразований получаем систему линейных уравнений равновесия прямолинейного стержня после потери устойчивости с учетом возникающих реакций.

$$\bar{Z} + A \bar{Z} = \Delta \bar{b}, \quad (\bar{Z} = (Q_2, Q_3, M_2, M_3, v_2, v_3, U_2, U_3)^T), \quad (14)$$

$$\Delta \bar{b} = [(-R_2^{(1)} \delta_1 - R_2^{(2)} \delta_2), (-R_3^{(1)} \delta_1 - R_3^{(2)} \delta_2), 0, 0, \dots, 0]^T. \quad (15)$$

В третьей главе приводятся и обсуждаются результаты численного определения критических нагрузок для стержней без локальных связей и с локальными связями. Решение системы уравнений (14) для стержня, не имеющего локальных связей (в этом случае в уравнениях (14) полагается $R_2^{(1)} = R_2^{(2)} = R_3^{(1)} = R_3^{(2)} = 0$), имеет вид

$$\bar{Z} = K(\varepsilon) \bar{C}. \quad (16)$$

Для консольного стержня при $\varepsilon = 0$ имеем

$$Z_5(0) = Z_6(0) = Z_7(0) = Z_8(0) = 0,$$

При $\varepsilon = 1$ для мертвой силы $\bar{P}$ и мертвого момента $\bar{M}$ должны выполняться условия:

$$Q_2(1) = -Q_{1*} [\bar{e}_1, \bar{e}_2(1)]; \quad Q_3(1) = Q_{1*} L [\bar{e}_1, \bar{e}_3(1)], \quad (17)$$

$$M_2(1) = M_{1*} [\bar{e}_1, \bar{e}_2(1)]; \quad M_3(1) = M_{1*} L [\bar{e}_1, \bar{e}_3(1)].$$

При малых углах v_j матрица преобразования базисов $\{\bar{e}_j\}, \{e_j\} L$ равна

$$L = \begin{bmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & \mathcal{D}_3 & -\mathcal{D}_2 \\ -\mathcal{D}_3 & 1 & \mathcal{D}_1 \\ \mathcal{D}_2 & -\mathcal{D}_1 & 1 \end{bmatrix}$$

поэтому из (17) получаем

$$\begin{aligned} Q_2(1) &= Q_{1*} \mathcal{D}_3(1), & Q_3(1) &= -Q_{1*} \mathcal{D}_2(1), \\ M_2(1) &= -M_{1*} \mathcal{D}_3(1), & M_3(1) &= M_{1*} \mathcal{D}_2(1). \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 (k_{1j} - Q_{1*} k_{6j}) c_j &= 0, & \sum_{j=1}^4 (k_{2j} + Q_{1*} k_{5j}) c_j &= 0, \\ \sum_{j=1}^4 (k_{3j} + M_{1*} k_{6j}) c_j &= 0, & \sum_{j=1}^4 (k_{4j} - M_{1*} k_{5j}) c_j &= 0, \end{aligned} \quad (19)$$

где k_{ij} — элементы фундаментальной матрицы

Задав численным значением M_{1*} , находим Q_{1*} , при котором определитель системы (19) обращается в нуль. В результате получаем критические значения M_{1*} и Q_{1*} . На рис. 3 приведены графики безразмерных критических значений M_{1*} и Q_{1*} для случая, когда начальное скручивание стержня не учитывается ($\mathcal{D}_{1*} = 0$) (кривая 1) и когда начальное скручивание учитывается ($\mathcal{D}_{1*} \neq 0$) (кривая 2) при $A_{22}/A_{33} = 0,5$.

Крутящий момент, как следует из графиков, увеличивает первое критическое значение сжимающей силы и уменьшает второе. Например, (кривая 1) при значении крутящего момента $M_{1*} = 0,58$, критическое значение силы Q_{1*} равно 1,7, что больше критического значения при $\mathcal{D}_{1*} \neq 0$.

Следует отметить (рис. 3), что возможна потеря статической устойчивости как без учета начального скручивания ($\mathcal{D}_{1*} = 0$) кривая 1, так и с учетом начального скручивания ($\mathcal{D}_{1*} \neq 0$), но числовые значения критических нагрузок (Q_{1*} , M_{1*}) разные, особенно при значениях M_{1*} близких к M_{1*cr} (рис. 3 и 4), что следует иметь в виду при расчете.

Для шарнирного закрепления стержня (шарнирное закрепление в двух плоскостях $\mathcal{X}_1, 0\mathcal{X}_2$ и $\mathcal{X}_1, 0\mathcal{X}_3$ при $\mathcal{E} = 1$ имеем следующие крайние условия (для мертвого момента):

$$M_2(1) = M_{1*} [\bar{L}_1 \bar{E}_2(1)], \quad M_3(1) = M_{1*} [\bar{L}_1 \bar{E}_3(1)];$$

$$U_2(1) = 0, \quad U_3(1) = 0.$$

на рис. 4 ^{16 кассетов примера} приведены графики критических значений M_{1*} и Q_{1*} для шарнирного закрепления стержня (при $\varepsilon = 1$). В этом случае, например, с учетом скручивания ($\alpha_{1*} \neq 0$) при моменте $M_{10}^* = 1,6$ критическое значение первой силы Q_{1*} равно 11,6, в то время как без учета скручивания ($\alpha_{1*} = 0$) значения первой критической силы меньше ($Q_{1*} = 10,2$). Полученные результаты численного анализа устойчивости сжато-скрученных прямолинейных стержней говорят о том, что в общем случае, когда требуется получить высокоточные результаты, необходимо учитывать начальное скручивание стержня.

Для стержней, имеющих промежуточные опоры, из (14), положив

$$\Delta \bar{B} = \bar{B}_1 \delta_1 + \bar{B}_2 \delta_2,$$

где

$$\bar{B}_1 = (-R_2^{(1)}, -R_3^{(1)}, 0, \dots, 0)^T; \quad \bar{B}_2 = (-R_2^{(2)}, -R_3^{(2)}, 0, \dots, 0)^T$$

получаем

$$\bar{Z} = K(\varepsilon) \bar{C} + K^{(1)}(\varepsilon - \varepsilon_1) \bar{B}_1 H_1(\varepsilon - \varepsilon_1) + K^{(2)}(\varepsilon - \varepsilon_2) \bar{B}_2 H_2(\varepsilon - \varepsilon_2) \quad (20)$$

где H_j - функции Хевисайда.

При $\varepsilon = 0$ $\bar{U} = \bar{V} = 0$, поэтому ($C_5 = C_6 = C_7 = C_8 = 0$) вектор $\bar{C}$ равен

$$\bar{C} = (C_1, C_2, C_3, C_4, 0, \dots, 0)^T$$

В скалярной форме записи из (20) имеем

$$Z_{\nu} = \sum_{j=1}^4 k_{\nu j} C_j - k_{\nu 1}^{(1)}(\varepsilon - \varepsilon_1) R_2^{(1)} H_1 - k_{\nu 2}^{(1)}(\varepsilon - \varepsilon_1) R_3^{(1)} H_1 - \\ - k_{\nu 1}^{(2)}(\varepsilon - \varepsilon_2) R_2^{(2)} H_2 - k_{\nu 2}^{(2)}(\varepsilon - \varepsilon_2) R_3^{(2)} H_2 \quad (21)$$

Компоненты Z_{ν} вектора $\bar{Z}$ должны удовлетворять дополнительным условиям: при $\varepsilon = \varepsilon_1$ и при $\varepsilon = \varepsilon_2$

$$U_2(\varepsilon_1) = U_3(\varepsilon_1) = 0, \quad U_2(\varepsilon_2) = U_3(\varepsilon_2) = 0. \quad (22)$$

В более подробной записи имеем (при $\varepsilon = \varepsilon_1$ и $\varepsilon = \varepsilon_2$)

$$Z_7 = U_2(\varepsilon_1) = \sum_{j=1}^4 k_{7j} C_j = 0, \\ Z_8 = U_3(\varepsilon_1) = \sum_{j=1}^4 k_{8j} C_j = 0, \quad (23) \\ Z_7 = U_2(\varepsilon_2) = \sum_{j=1}^4 k_{7j} C_j - k_{71}^{(1)}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) R_2^{(1)} - k_{72}^{(1)}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) R_3^{(1)} = 0$$

$$\bar{z}_8 = U_3(\varepsilon_2) = \sum_{j=1}^4 k_{8j} c_j - k_{81}^{(1)}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) R_2^{(1)} - k_{82}^{(1)}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) R_3^{(1)} = 0$$

Система линейных однородных уравнений (23) содержит восемь неизвестных c_j ($j = 1, 2, 3, 4$) $R_2^{(1)}$, $R_3^{(1)}$, $R_2^{(2)}$, $R_3^{(2)}$. Краевые условия при $\varepsilon = 1$ (их четыре) зависят от характера поведения приложенных силы и момента.

Из краевых условий, например, при мертвой силе и мертвом моменте получаем еще четыре алгебраических уравнения

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 a_{1j} c_j + b_{11} R_2^{(1)} + b_{12} R_3^{(1)} + b_{13} R_2^{(2)} + b_{14} R_3^{(2)} &= 0, \\ \sum_{j=1}^4 a_{2j} c_j + b_{21} R_2^{(1)} + b_{22} R_3^{(1)} + b_{23} R_2^{(2)} + b_{24} R_3^{(2)} &= 0, \\ \sum_{j=1}^4 a_{3j} c_j + b_{31} R_2^{(1)} + b_{32} R_3^{(1)} + b_{33} R_2^{(2)} + b_{34} R_3^{(2)} &= 0, \\ \sum_{j=1}^4 a_{4j} c_j + b_{41} R_2^{(1)} + b_{42} R_3^{(1)} + b_{43} R_2^{(2)} + b_{44} R_3^{(2)} &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

где коэффициенты a_{ij} и b_{ij} линейно зависят от Q_{1*} и M_{1*} , например,

$$\begin{aligned} a_{ij} &= k_{ij}(1) - Q_{1*} k_{6j}(1); \quad a_{3j} = k_{3j}(1) + M_{1*} k_{6j}(1); \\ b_{1k} &= -[k_{1k}^{(1)}(1 - \varepsilon_1) - Q_{1*} k_{6k}^{(1)}(1 - \varepsilon_1)]; \\ b_{3k} &= -[k_{3k}^{(2)}(1 - \varepsilon_2) + M_{1*} k_{6k}^{(2)}(1 - \varepsilon_2)]. \end{aligned}$$

В результате получаем систему восьми однородных уравнений (23), (24). Значения Q_{1*} и M_{1*} , при которых определитель системы уравнений (23), (24) обращается в нуль, являются критическими.

Результаты численного счета в качестве примера, представлены на рисунках (6) и (7) в безразмерной форме. При численном счете были взяты следующие значения безразмерных параметров:

$$A_{22} = \frac{(A_{22})_p}{(A_{33})_p} = 0,5, \quad A_{33} = 1, \quad A_{11} = 0,48,$$

что соответствует следующим числовым значениям размерных параметров $\ell = 70 \text{ см}$, $b = 0,5 \text{ см}$, $h = 0,7 \text{ см}$. $E = 2 \cdot 10^7 \text{ Н/см}^2$, $G = 8 \cdot 10^6 \text{ Н/см}^2$

$$(A_{11})_p = \beta \left(\frac{h}{b} \right)^3 G, \quad (A_{22})_p = \frac{h b^3}{12} E, \quad (A_{33})_p = \frac{b h^3}{12} E.$$

Размерные критические силы и моменты равны

$$(Q_{1*})_p = Q_{1*} \frac{(A_{33})_p}{\ell^2}, \quad (M_{1*})_p = M_{1*} \frac{(A_{33})_p}{\ell}.$$

На рис. 5 приведен график изменения безразмерной критической силы Q_{1*} для ряда фиксированных положений шарнирного закрепления ($\varepsilon_2 = \text{const}$) в зависимости от положения первого шарнирного закрепления ε_1 без учета крутящего момента ($M_{1*} = 0$).

На рис. 6 приведены графики изменения критических сил и моментов (Q_{1*j} , M_{1*j}) для двух случаев: 1) без учета начального скручивания $\varepsilon_{1*} = 0$; и 2) с учетом начального скручивания - $\varepsilon_{1*} \neq 0$, при $\varepsilon_1 = 0,1$, $\varepsilon_2 = 0,9$.

При $M_{1*} = 0$ имеем две критические силы $(Q_{1*})_1$ и $(Q_{1*})_2$ потенциальной устойчивости стержня в разных плоскостях.

Из графиков (рис. 6) следует, что при изменении M_{1*} в интервале $(0; 0,5)$ первая критическая сила Q_{1*} практически не зависит как от M_{1*} , так и от начального скручивания. С увеличением M_{1*} первая критическая сила увеличивается, причем при учете начального скручивания более быстро. При $M_{1*} = 1$ критическая сила почти на 10% больше, чем критическая сила без учета начального скручивания, т.е. при высокоточных расчетах полагать, что $A_{11} = \infty$ ($\varepsilon_{1*} = 0$) использовать нельзя.

Из рис. 6 следует, что предельный крутящий момент, который может выдержать прямолинейный стержень до потери устойчивости с учетом конечной круглой жесткости (при $\varepsilon_{1*} \neq 0$), меньше, чем предельный момент при $\varepsilon_{1*} = 0$ на 25%. Т.е., если нагрузить стержень, например, моментом, равным 1,8, считая, что приближенное решение (при $\varepsilon_{1*} = 0$) справедливо, то реальный стержень потеряет устойчивость и выполнять свои функции в качестве упругого элемента машины или прибора не сможет.

Изложенный метод учета промежуточных локальных связей с использованием δ -функций Дирака позволяет определять критические силы для конечного числа локальных связей (шарнирных и упругих) без стыковки решений для отдельных участков стержня между опорами как это необходимо делать при использовании метода начальных параметров.

В четвертой главе изложен динамический метод исследования статической и динамической устойчивости сжато-скрученных прямолинейных стержней. Основной задачей, рассмотренной в данной главе, являлась задача о устойчивости консольного сжато-скрученного прямолинейного стержня, нагруженного мертвой силой и любым моментом, чтобы проверить динамическим методом полученные в третьей главе результаты, показывающие, что возможна статическая потеря устойчивости.

Как известно, критические нагрузки для консервативных задач можно определить из условия обращения в нуль частот ко-

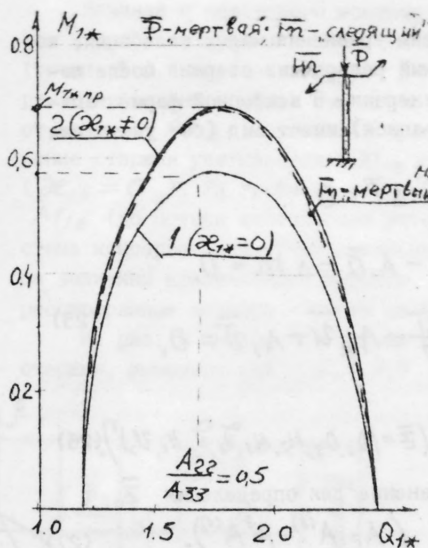


рис. 3

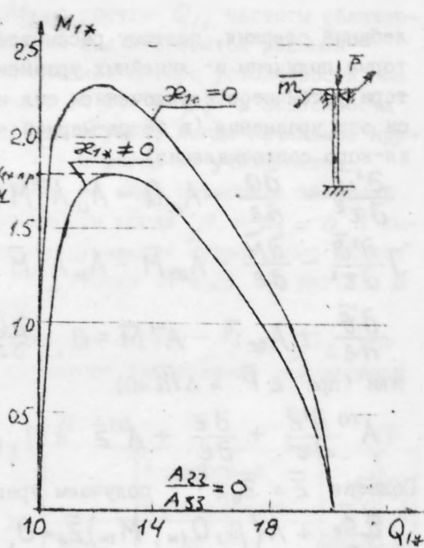


рис. 4

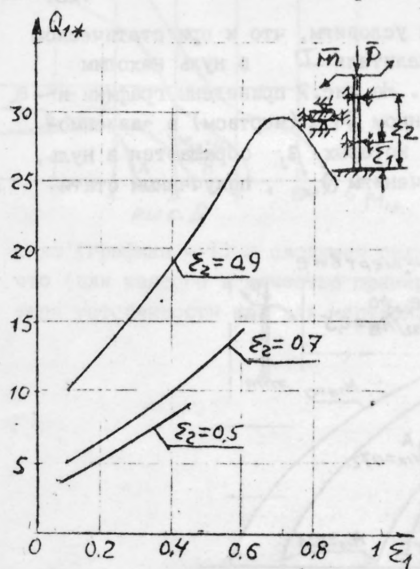


рис. 5

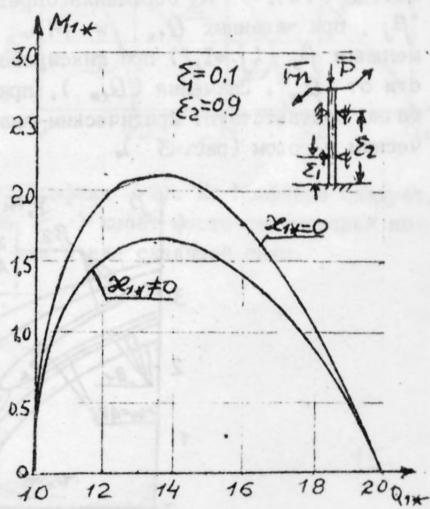


рис. 6

лебаний стержня, поэтому рассмотрены уравнения малых колебаний, которые получены из линейных уравнений равновесия стержня после потери устойчивости включением сил инерции. В векторной форме записи эти уравнения (в безразмерной записи) имеют вид (без учета сил вязкого сопротивления)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \tau^2} - \frac{\partial Q}{\partial \varepsilon} - A_x Q - A_a A^T \bar{M} - \Delta \bar{P} &= 0, \\ J \frac{\partial^2 \bar{\vartheta}}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \bar{M}}{\partial \varepsilon} - A_x \bar{M} - A_m A^T \bar{M} - A_s \bar{Q} - \Delta \bar{M} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \varepsilon} + A_x \bar{\vartheta} - A^T \bar{M} &= 0, \quad \frac{\partial \bar{U}}{\partial \varepsilon} + A_x \bar{U} + A_s \bar{\vartheta} = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

или (при $\Delta \bar{P} = \Delta \bar{M} = 0$)

$$A^{(1)} \frac{\partial^2 \bar{Z}}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \varepsilon} + A^{(2)} \bar{Z} = 0, \quad (\bar{Z} = (\bar{Q}_2, \bar{Q}_3, \bar{M}_2, \bar{M}_3, \bar{\vartheta}_2, \bar{\vartheta}_3, \bar{U}_2, \bar{U}_3)^T) \quad (26)$$

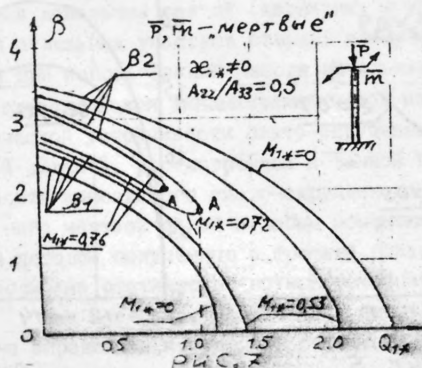
Пологая $\bar{Z} = \bar{Z}_0 e^{i p \tau}$ получаем уравнение для определения $\bar{Z}_0$

$$\frac{d \bar{Z}_0}{d \varepsilon} + A(\beta, Q_{1*}, M_{1*}) \bar{Z}_0 = 0, \quad (A = A^{(2)} - \beta^2 A^{(1)}). \quad (27)$$

Решение уравнения (27)

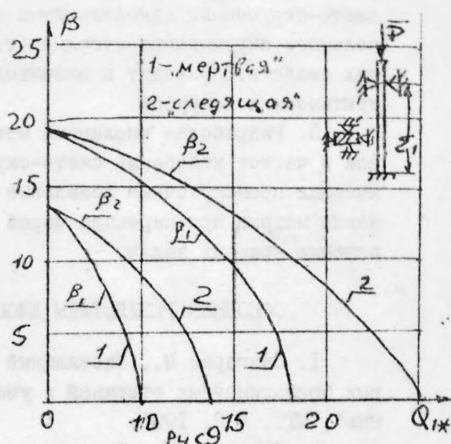
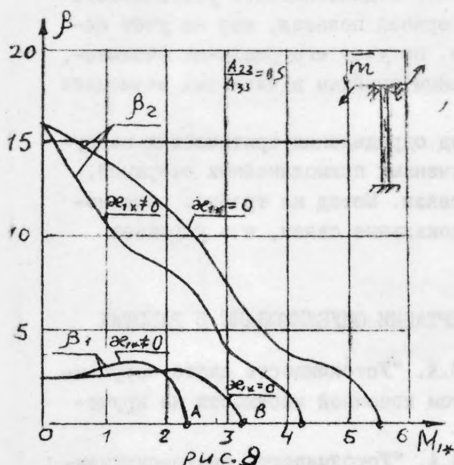
$$\bar{Z}_0 = K(\varepsilon, \beta, Q_{1*}, M_{1*}) \bar{C} \quad (28)$$

должно удовлетворять тем же краевым условиям, что и при статическом методе (18). Из обращения определителя D в нуль находим β_j , при заданных Q_{1*} и M_{1*} . На рис. 7 приведены графики изменения β_j ($j=1,2$) при фиксированном M_{1*} (мертвом) в зависимости от Q_{1*} . Значения (Q_{1*}), при которых β_j обращаются в нуль, точно соответствуют критическим значениям Q_{1*} , полученным статическим методом (рис. 3).



Начиная с некоторого момента M_{1*} с ростом Q_{1*} частоты сближаются и при некоторых значениях сжимающих сил становятся равными (точки А), что соответствует динамической потере устойчивости. На рис. 8 приведены графики изменения частот β_1 и β_2 в зависимости от момента M_{1*} (сила равна нулю) для случая, когда начальное кручение стержня учитывается ($\varphi_{1*} \neq 0$) и когда не учитывается ($\varphi_{1*} = 0$). Из графиков следует, что на всем интервале значений M_{1*} (до потери статической устойчивости когда $\beta_1 = \beta_2 = 0$) система консервативна. Учет начального скручивания существенно влияет на величины критического момента M_{1*} (точки А и В на рис. 8). В рассмотренном примере – почти на 30%.

На рис. 9 приведены графики изменения частот β_1 и β_2 для стержня, имеющего при $\xi_1 = 0,9$ шарнирное закрепление для мертвой



силы (графики – 1) и следящей силы (графики – 2). Из графиков следует, что (для взятого в качестве примера ξ_1) имеет место статическая потеря устойчивости как для мертвой, так и для следящей силы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Из общих нелинейных уравнений равновесия получены линейные уравнения равновесия сжато-скрученного прямолинейного стержня после потери устойчивости с учетом начального скручивания.

2. Показано (точным численным решением уравнений равновесия), что при мертвой сжимающей силе и любом крутящем моменте (мертвом или следящем) для консольного стержня с разными изгибными жесткостями имеет место статическая потеря устойчивости. Этот результат справедлив как при учете начального скручивания, так и без учета.

3. Критические значения нагрузки (сила и момент), полученные "статическим" методом совпадают со значениями, полученными и "динамическим" методом.

4. Численный анализ статической и динамической устойчивости сжато-скрученных прямолинейных стержней показал, что не учет начального скручивания стержня (т.е. не учет его реальных физических свойств) приводит к значительным сдвигам в числовых значениях критических нагрузок.

5. Разработан численный метод определения критических нагрузок и частот колебаний сжато-скрученных прямолинейных стержней, имеющих промежуточные локальные связи. Метод не требует перемножения матриц при переходе через локальные связи, что упрощает решение краевых задач.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНЫ В РАБОТАХ

1. Сазгаран М., Светлицкий В.А. "Устойчивость сжато-скрученных прямолинейных стержней с учетом конечной жесткости на кручение". МГТ, № 2, 1996.

2. Сазгаран М., Светлицкий В.А. "Устойчивость сжато-скрученного стержня, имеющего промежуточные опоры" (принята к печати в журнале "Вестник МГТУ, серия "Машиностроение").

Типография МГТУ им. Н.Э.Баумана Тираж 100 экз. Объем 1п.л.
Заказ 161
Подписано в печать 07.05.96 г.