

М 87364

Московский ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции и
ордена Трудового Красного Знамени государственный технический
университет им. Н.Э.Баумана

На правах рукописи
УДК 519.248:6

Гаджиев Асаф Гаджи оглы

СТОХАСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СИСТЕМ МАССОВОГО
ОБСЛУЖИВАНИЯ С ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ

05.13.16 – Применение вычислительной техники,
математического моделирования и
математических методов в научных
исследованиях

01.01.05 – Теория вероятностей и математичес-
кая статистика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

А. Гаджиев

Москва 1993

Работа выполнена в Институте кибернетики Академии Наук
Азербайджанской Республики

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор А.Д.Соловьев
доктор физико-математических наук, профессор В.А.Каштанов
доктор технических наук, профессор О.Н.Тескин

Ведущая организация:

Санкт-Петербургский государственный университет

Защита состоится 8 июня 1993 года в 11 час. 00 мин.
на заседании Специализированного Совета по защите доктор-
ских диссертаций Д 053.15.12 при Московском государственном
техническом уни-
Москва, 2-я Б

С диссерт
ситета. Проси
учреждения, к
выше адресу.

60

Ученый секрет
лизованного Со
технических

М 87364

Заказ 216 . Тип
Типография

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

В последние годы интерес к задачам теории массового обслуживания стимулировался потребностями применения результатов этой теории к важным практическим задачам. В этом направлении представляет интерес исследование математических моделей систем с движущимися объектами. Такие модели возникают при сборке сложных технических агрегатов, при создании мультипроцессорных, информационно-вычислительных систем, в транспортных объектах, при функционировании сетей связи, профилактическом обслуживании систем и т.д.

1087364
Попытка формализовать системы с движущимися объектами приводит к определению новых математических моделей и методов исследования, учитывающих специфику указанных объектов и адекватно отражающих их поведение. В рамки математических моделей движущихся частиц укладывается достаточно большой класс систем массового обслуживания с движущимися объектами, что позволяет их исследовать с единой позиции. Поэтому представляет интерес построение и исследование математических моделей движущихся частиц, описывающих поведение систем массового обслуживания с движущимися объектами. В этом направлении важным является исследование задач управления такими системами с целью выработки правил, минимизирующих выбранный показатель эффективности. Такие задачи являются новыми и в литературе исследованы недостаточно.

Многие практически интересные модели этих систем не поддаются исследованию аналитическими методами. Поэтому в настоящее время в связи с широким использованием компьютеров наряду с аналитическими методами исследований успешно применяются методы моделирования таких систем на ЭВМ, которые позволяют численно рассчитывать значения интересующих характеристик. Однако для определения точности полученных численных значений и принятия обоснованных выводов необходимо провести статистическую обработку полученных данных. Это в свою очередь приводит к необходимости разработки новых статистических методов обработки полученных данных моделирования, т.к. специфика этих объектов такова, что

НТБ МГТУ им. Н.Э.Баумана



1087364

Гаджиев А.Г. Стохастические

1



воспользоваться известными методами статистической обработки данных не всегда удается. Поэтому исследование систем массового обслуживания с движущимися объектами разделяется на следующие этапы:

1. Построение математических моделей движущихся частиц, описывающих поведение указанных систем.
2. Аналитические методы исследования.
3. Моделирование сложных систем на компьютерах.
4. Разработка новых статистических методов обработки данных моделирования, учитывающих специфику этих систем.

Комплексное применение указанных выше направлений для исследования задач математической теории массового обслуживания является эффективным орудием для исследователей и дает как правило хорошие результаты.

Настоящая диссертация посвящена построению и исследованию математических моделей систем массового обслуживания с движущимися объектами, включает исследования как аналитического характера, так и методом моделирования на ЭВМ и разработку статистических методов анализа данных моделирования.

Цель работы.

Целью настоящей диссертации является разработка с единой позиции методов исследования стохастических систем массового обслуживания с движущимися объектами, которые включают:

- разработку теоретических основ управления системами с движущимися объектами;
- введение управления типа задержек моментов начала обслуживания для систем массового обслуживания с движущимися объектами; описание класса систем массового обслуживания, для которых целесообразно вводить такие задержки и нахождение оптимальной функции, минимизирующей выбранный показатель эффективности;
- исследование основных характеристик сложных систем массового обслуживания с движущимися объектами выбор оптимального количества приборов, минимизирующего среднее время ожидания обслуживания в системе;
- разработку методов моделирования широкого класса систем

со сложной структурой взаимодействия приборов;

- разработку универсальных статистических методов обработки регрессионных данных, когда с увеличением числа наблюдений может расти число неизвестных параметров (оценивание неизвестных параметров, построение доверительных полос);

- использование разработанных методов для анализа результатов моделирования сложных систем массового обслуживания с движущимися объектами и на основе их принятие соответствующих решений;

- использование математических моделей движущихся частиц и разработанных методов статистического анализа данных в различных приложениях.

Методы исследования.

Для анализа систем массового обслуживания с движущимися объектами используются методы теории случайных процессов, результаты теории экстремальных задач, методы имитационного и статистического моделирования, функционального анализа, точечных процессов, теории восстановления.

Научная новизна.

В работе получены следующие новые результаты:

- построены математические модели движущихся частиц, описывающие поведение широкого класса систем массового обслуживания с движущимися объектами; разработаны теоретические основы управления такими моделями в некотором классе;

- описан класс систем массового обслуживания с движущимися объектами, для которых введение задержек начала обслуживания уменьшает среднее время ожидания требования до начала обслуживания; найдена оптимальная функция задержки, минимизирующая среднее время ожидания требования до начала обслуживания;

- для модели движения частиц по кольцу без обгона, доказан инвариантный характер случайного блуждания отдельно взятой частицы; найдены рекуррентные уравнения для нахождения распределения расстояния между движущимися частицами;

- для модели движения частиц по кольцу с меняющимися скоростями, найдено оптимальное число частиц, минимизирующее среднее время ожидания частицы в выбранной точке кольца; построена

диаграмма установившихся режимов движения частиц;

- предложен метод моделирования поведения систем частиц, движущихся по кольцу, со сложной структурой взаимодействия, который экономит компьютерные ресурсы;

обнаружен эффект срыва движения в моделях с большим количеством движущихся частиц. В результате этого эффекта сделан вывод о нецелесообразности планирования транспортных систем с большим количеством движущихся единиц;

- предложен метод обработки результатов моделирования, подчиненных регрессионной зависимости;

- для регрессионных моделей с растущим числом неизвестных параметров и неизвестными дисперсиями найдены условия, при которых оценки наименьших квадратов, М-оценки обладают свойствами несмещенности и состоятельности;

- предложен универсальный метод построения доверительной полосы для неизвестной функции в регрессионных (линейных, нелинейных и обобщенных) моделях. В отличие от ранее известных методов, предложенный подход не использует оценки неизвестных дисперсий. На численном примере показано преимущество предложенного подхода по сравнению с ранее известными методами.

Разработанные в работе модели и методы были использованы при организации движения поездов метро и определении длительности работы различных агрегатов на Гянджинском приборостроительном заводе, а также могут быть использованы при анализе стохастических моделей транспорта, теории управления запасами, при статистической обработке данных в технике и др. Материалы диссертации могут быть использованы в курсе лекций по теории массового обслуживания и математической статистике.

Практическая ценность.

Диссертационная работа имеет прикладную ориентацию.

Разработан единый подход для исследования систем с движущимися объектами, которые используются в приложениях.

Обнаружен эффект срыва движения в системах с большим количеством движущихся частиц. Этот эффект позволил сделать вывод о нецелесообразности планирования транспортных систем с большим количеством движущихся единиц и был использован в метрополитене.

Разработаны и доведены до вычислительных алгоритмов универсальные программы статистической обработки данных. Использование этих программ позволяет исследовать широкий класс задач, экономить компьютерные ресурсы и снизить затраты на проведение экспериментальных исследований.

Разработанные программы использовались на практике для определения времени жизни сложных технических агрегатов.

Апробация работы.

Результаты работы были доложены:

- на семинарах кафедры "Теория вероятностей" механико-математического факультета и кафедры "Математическая статистика" факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова;
- на семинаре отдела "Теория вероятностей" МИАН им. В.А. Стеклова;
- на общеинститутских семинарах Института кибернетики и Института математики и механики АН Азербайджана;
- на семинаре "Многомерный статистический анализ и вероятностное моделирование реальных процессов" Научного Совета РАН "Оптимальное планирование и управление народным хозяйством" в ЦЭМИ РАН;
- на совместном семинаре "Прикладные вопросы теории вероятностей" кафедр "Вышая математика" и "Прикладная математика" МГТУ им. Н.Э. Баумана;
- на III Международной Вильнюсской конференции по теории вероятностей и математической статистике (Вильнюс, 1981);
- на Всесоюзном симпозиуме по предельным теоремам теории вероятностей (Фергана, 1983);
- на Международной конференции Общества им. Бернулли "Стохастические процессы и их приложения" ("Stochastic processes and their applications", Sweden, Goteborg, 1984);
- на семинарах Высшего Технического университета г. Стокгольм, Чалмерского университета г. Гетеборг, университета г. Лунд - Швеция, 1984;
- на Международной конференции ИФП "Стохастические дифференциальные системы" (IFIP "Stochastic differential systems", Baku, 1984);

- на IV Международной Вильнюсской конференции по теории вероятностей и математической статистике (Вильнюс, 1985);
- на Всемирном конгрессе Общества им. Бернулли (Ташкент, 1986);
- на XIII Европейской конференции статистиков (European meeting of statisticians, Berlin, 1988);
- на Международной конференции Общества им. Бернулли "Стохастические процессы и их приложения" ("Stochastic processes and their applications", USA, Wisconsin - Madison, 1989);
- на Международной конференции COSMEX - 89 (Conference "Stochastic methods in experimental sciences", Poland - Wroclaw, 1989).
- на семинарах университета г. Мюнхен, университета г. Кассел, Технического университета г. Брауншвайг, Фрай университета Зап. Берлина - ФРГ, 1991 г.;
- на Международной конференции "Общие линейные модели и статистическое моделирование - 92" (GLIM and Statistical modelling - 92, Munich, Germany, 1992).

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в 19 работах.

Объем и структура работы.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, приложения, списка литературы из 161 наименования, трех таблиц, и 12 рисунков. Общий объем диссертации составляет 240 страниц машинописного текста.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Изложим основные результаты диссертации.

Во введении указано место настоящей работы в общей проблематике развития теории массового обслуживания, приведен обзор результатов близких к тематике исследований в диссертации. Кратко изложено содержание работы, приведены основные результаты полученные в диссертации.

В главе 1 изучаются системы, для которых задана последовательность $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \dots$ - моментов начала

обслуживания.

$$\eta_t = t_i - t_{i-1}, \quad t=2,3,\dots; \quad \eta_1 = t_1.$$

Предполагается, что $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ одинаково распределенные случайные величины (с.в.) с функцией распределения (ф.р.) $F(x)$. На обслуживание поступает стационарный поток требований, не зависящий от моментов t_i . Обслуживание устроено так, что в момент времени t_i мгновенно обслуживаются все требования, поступившие в интервале $[t_{i-1}, t_i)$.

С целью уменьшения среднего времени ожидания требования вводится управление, которое заключается в расширении интервалов между обслуживаниями, для чего от последовательности $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ переходим к последовательности $t_1^*, t_2^*, \dots, t_n^*$, для которой выполнено

$$\eta_t^* = t_t^* - t_{t-1}^* = \eta_t + g(\eta_t)$$

где $g \in G$ - классу неотрицательных измеримых функций. Частный случай такого вида управления впервые введен в [1]. Обозначим $W(g)$, $\sigma^2(g)$ -соответственно среднее и дисперсию времени ожидания требования до начала обслуживания с системе с функцией управления $g(x)$.

$$M_F(g) = W(g) - W(0), \quad c = \frac{E\eta^2}{2E\eta},$$

где η - с.в. с ф.р. $F(x)$, $E\eta$ - математическое ожидание с.в. η . Назовем обслуживание с ф.р. $F(x)$ улучшаемым, если $\exists g \in G$ такая, что

$$M_F(g) < 0.$$

Оказывается, для того, чтобы обслуживание с ф.р. $F(x)$ было улучшаемым необходимо и достаточно, чтобы существовала такая точка $x_0 < c$, что $F(x_0) > 0$, (теорема 1.1).

Пусть $\tilde{g}(x)$ оптимальная функция, минимизирующая $M_F(g)$. Тогда (теорема 1.2) оптимальная функция имеет вид

1. Ignall E., Kolesar P. Operating characteristics of a simple shuttle under local dispatching rules // Oper. Res. -1972.- V.20. -N.6.-P.1077-1088.

$$\tilde{g}(x) = (c_1 - x)^+,$$

где c_1 - единственное решение уравнения

$$c_1^2 = \int_{c_1}^{\infty} (x - c_1)^2 dF(x).$$

Из теорем 1.1 и 1.2 следуют результаты изложенные в [2,3].

Введенное управление уменьшает также дисперсию времени ожидания (теорема 1.3), т.е. если $c_2 < c_1$, то имеет место соотношение

$$\sigma^2(c_1) < \sigma^2(c_2) < \sigma^2(0).$$

где

$$\sigma^2(c) = \sigma^2(c-x).$$

Возникает вопрос, какие же системы обслуживания улучшаемы сильнее, т.е. для каких систем

$$\frac{W_1(0)}{W_1(g_1)} > \frac{W_2(0)}{W_2(g_2)}$$

Оказывается что, если

$$\sqrt{k_1} > \frac{k_2}{1 + \sqrt{k_2 - 1}},$$

то

$$\frac{W_1(0)}{W_1(g_1)} > \frac{W_2(0)}{W_2(g_2)} \quad (\text{замечание 1.1});$$

где k - коэффициент вариации.

Пример 1.1. Пусть $F(x) = 1 - e^{-x}$, $x \geq 0$. В этом случае численные расчеты дают $W(0) = 1$; $\sigma^2(0) = 1$; $k_1 = 2$; $\tilde{g}(x) = (0,901 - x)^+$; $c_1 = 0,901$; $\tilde{\sigma}^2 = 0,691$; $W = 0,901$.

2. Ross S.M. Average delay in queues with non-stationary Poisson arrivals // J. Appl. Probab. - 1978. - V.15. - P.602-609.
3. Newell G.F. Control of pairing of vehicles on a public transportation Route, Two Vehicles, One control point // Transp. Sci. - 1974. - V.8. - N.4. - P.248-264.

Пример 1.2. Пусть $\eta_i = 1 + x_i - x_{i-1}$, где $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения

$$F(x) = x + \frac{1}{2}; \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right].$$

Численные расчеты дают:

$$W(0) = 0,583; \quad \sigma^2(0) = 0,160; \quad k_2 = \frac{7}{6}; \quad \tilde{g}(x) = (0,577 - x)^+;$$

$$\tilde{\sigma}^2 = 0,156; \quad \tilde{W} = 0,577.$$

При сравнении систем на улучшаемость получаем, что так как

$$\sqrt{k_1} = 1,4 > \frac{k_2}{1 + \sqrt{k_2 - 1}} \approx 0,828;$$

то

$$\frac{W_1(0)}{W_1} > \frac{W_2(0)}{W_2}.$$

В реальных задачах, увеличивая интервал между двумя моментами начала обслуживания мы уменьшаем на такую же величину интервал между следующими моментами начала обслуживания. Поэтому естественным продолжением развития предыдущей модели является модель, в которой управляемая последовательность $t_1^*, t_2^*, \dots, t_n^*, \dots$ строится следующим образом: Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ независимые одинаково распределенные случайные величины, которые определяют последовательность первоначальных интервалов между обслуживаниями, $E\xi_i = d_1, D\xi_i = d_2$.

$$\xi_1^* = t_1^* - 0 = \xi_1 + g_1(\xi_1),$$

$$\xi_2^* = t_2^* - t_1^* = (\xi_1 + \xi_2 - \xi_1^*)^+ + g_2(\xi_1 + \xi_2 - \xi_1^*)^+;$$

.

.

.

$$\xi_n^* = (\xi_1 + \dots + \xi_n - \xi_1^* - \dots - \xi_{n-1}^*)^+ + g_n(\xi_1 + \dots + \xi_n - \xi_1^* - \dots - \xi_{n-1}^*)^+.$$

Тогда обслуживание в описанной модели улучшаемо тогда и только тогда, когда

$$D\xi_1 = d_2 > 0.$$

(теорема 1.10)

Оптимальная функция $\hat{g}(x)$ имеет вид

$$\hat{g}(x) = (d_1 - x)^+.$$

(теорема 1.9)

"частный случай такой модели исследован моделированием в [4].

В качестве примера в диссертации рассмотрены с.в. ξ_1 , с функцией распределения

$$F(x) = 1 - e^{-x}, \quad x \geq 0.$$

Численные расчеты дают

$$W(0) = 1; \quad \sigma^2(0) = 1; \quad \tilde{g}(x) = (1-x)^+; \quad \tilde{W} = 0,5; \quad \tilde{\sigma}^2 = 0.$$

т.е. выигрыш в среднем времени ожидания составляет 50%.

Далее в главе 1 изучается движение S частиц по N равноудаленным точкам окружности, расстояние между точками на окружности равно 1. В дискретные моменты времени каждая частица может совершить скачок по направлению движения на единицу с вероятностью γ_k , где k -расстояние до следующей частицы. Обгон запрещен.

Показано, что существует стационарное распределение расстояния между частицами и найдены рекуррентные уравнения для его нахождения (теорема 1.11).

Доказано (теорема 1.12), что в стационарном режиме отдельно рассматриваемая частица совершает случайное блуждание с некоторыми параметрами. Этот результат можно трактовать следующим образом: если одну частицу сделать видимой, а остальные невидимыми, то видимая частица совершает случайное блуждание. Приведен пример 1.6 демонстрирующий полученные результаты.

§ 1.4 главы 1 посвящен исследованию предельного случая движения частиц по кольцу, когда $N \rightarrow \infty$, $S \rightarrow \infty$, $(N-S) \rightarrow \infty$. Здесь также установлен инвариантный характер случайного блуждания отдельно взятой частицы (теорема 1.13) и найден вид предельного стационарного распределения расстояния между частицами, который совпадает с аналогичным распределением при движении частиц по

4. Ignall E., Kolesar P. Optimal dispatching of an Infinite Capacity Shuttle Control at a Single Terminal//Oper. Res.-1974. -V.22.- N.5.-P.1008-1024.

прямой [5].

В главе 2 исследуется движение частиц по кольцу, когда частицы могут менять скорости движения.

Рассматривается детерминированная модель, когда частицы могут двигаться либо со скоростью V_1 , либо со скоростью V_2 ($V_1 < V_2$).

Движение происходит по следующему закону. Пусть $\rho_{i,t}$ - расстояние от частицы i до частицы $i+1$ по направлению движения в момент времени t , $V_{i,t}$ - скорость i -ой частицы в момент времени t . Задаются величины Q_1, Q_2 ($Q_1 < Q_2$). Если $\rho_{i,t} = Q_1$, то $V_{i,t} = V_1$; если $\rho_{i,t} > Q_2$, то $V_{i,t} = V_2$. Если $\rho_{i,t}$ увеличивается, то в момент времени t^* , когда $\rho_{i,t^*} = Q_2$, имеем $V_{i,t^*} = V_2$. Если же $\rho_{i,t}$ убывает, то в момент времени t^{**} , когда $\rho_{i,t^{**}} = Q_1$, имеем $V_{i,t^{**}} = V_1$. Другими словами, когда расстояние между частицами определяется значениями из интервала (Q_1, Q_2) , то скорость частицы не меняется. Скорость частицы меняется лишь на концах интервала (Q_1, Q_2) . Назовем состояние системы в момент времени t простейшим, если

$$\rho_{1,t} = Q_1, \dots, \rho_{s-1,t} = Q_1; \quad \rho_{s,t} > Q_1 \\ V_{1,t} = V_1, \dots, V_{s-1,t} = V_1; \quad V_{s,t} = V_2$$

Если в некоторый момент времени t_0 выполнено

$$V_{1,t_0} = V_1, \dots, V_{s,t_0} = V_1,$$

тогда

$$V_{1,t} = V_1, \dots, V_{s,t} = V_1; \quad \forall t \geq t_0$$

и такой режим движения назовем абсолютно установившимся режимом 1 (сокращенно *аур1*).

Если в некоторый момент времени t'_0 выполнено

$$V_{1,t'_0} = V_2, \dots, V_{s,t'_0} = V_2,$$

5. Беляев Ю.К. Об упрощенной модели движения без обгона //Изв. АН СССР, Техническая кибернетика. -1969.-№3.-С.17-21.

тогда

$$V_{1,t}=V_2, \dots, V_{s,t}=V_2; \quad \forall t \geq t_0$$

и такой режим движения назовем абсолютно установившимся режимом 2 (сокращенно *супр2*).

Пусть S - число движущихся частиц фиксировано. Если в некоторый момент времени t можно так занумеровать частицы, что

$$V_{1,t}=V_1, \dots, V_{k_1,t}=V_1, V_{k_1+1,t}=V_2, \dots, V_{s,t}=V_2,$$

то такое состояние будем называть смешанным состоянием типа (k_1, k_2) и обозначать $C(k_1, k_2)$, где $k_1 + k_2 = S$. Для каждого S обозначим $M(k_1, k_2)$ - множество, состоящее из двух состояний,

$$M(k_1, k_2) = \{C(k_1+1, k_2-1); C(k_1, k_2)\}, \quad k_1 + k_2 = S.$$

Представляет интерес изучение различных режимов движения в указанной системе. Оказывается, что если система стартует из простейшего состояния, то установившиеся режимы движения системы определяются соотношениями между S , Q_1 , Q_2 следующим образом (теорема 2.1):

Эт такое, что система достигает

$$(\text{супр 1}) \Leftrightarrow (S-1)Q_1 + Q_2 > 1$$

Эт такое, что система достигает

$$(\text{супр 2}) \Leftrightarrow (S-1)Q_2 + Q_1 < 1$$

Эт такое, что

$$M(k_1, k_2) \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 Q_1 + k_2 Q_2 > 1 \\ (k_1+1)Q_1 + (k_2-1)Q_2 < 1 \end{cases}$$

На обслуживание в указанную систему поступает простейший поток требований, не зависящий от движения частиц. Временем ожидания требования считается время, прошедшее с момента поступления требования в систему до прихода в указанный пункт ближайшей частицы.

Максимальное число частиц, при котором возможно движение всех частиц со скоростью V_2 назовем числом насыщения, а указанный режим движения насыщенным режимом движения.

Представляет интерес изучение вопроса выбора такого режима движения, для которого выбранный показатель эффективности, а в данном случае среднее время ожидания требования принимает минимальное значение. Среди указанных режимов движения оптимальным в этом смысле является насыщенный режим движения.

Близкой к практике является стохастическая модель, когда в некоторые случайные моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_n$ происходит переключение скорости какой-либо частицы с V_2 на V_1 . Такие переключения назовем задержками. В детерминированной модели, как было указано выше, насыщенный режим движения является оптимальным. В стохастической модели этот режим не является оптимальным. Оказывается, для стохастической модели оптимальное число частиц определяется следующим образом.

Пусть $\xi_i = t_i - t_{i-1}$; -н.о.р.с.в.

$$\lambda = -\frac{1}{E\xi_1}.$$

Если выполнено условие

$$\frac{Q_2}{V_2} < \frac{Q_1}{V_1}, \quad \lambda < \frac{1}{\left[\frac{Q_2 - Q_1}{V_2 - V_1} \right] \cdot \left[\frac{1 - Q_1}{Q_2} \right] + 1},$$

тогда

$$S_{\text{опт.}} = \left[\frac{1 - Q_1}{Q_2} \right]_{(\cdot)}, \quad (\text{теорема 2.4})$$

где $[A]_{(\cdot)}$ - обозначает целую часть A .

Более сложные системы, когда движение происходит с некоторым ускорением, изучались в § 2.3 главы 2 моделированием их поведения на ЭВМ.

Непосредственное моделирование на компьютере стохастических систем с движущимися приборами требует значительных компьютерных ресурсов т.к. указанные системы имеют сложную структуру. Однако, при моделировании был использован подход, который экономит компьютерные ресурсы. Суть его заключается в том, что при моделировании система наблюдается лишь в моменты изменения скоростей, т.к. в промежутках между ними она ведет себя как детерминированная система.

Моделированием установлено, что если в системе возникают помехи (задержки), то насыщать систему (увеличивать число движущихся частиц) нецелесообразно, т.к. при этом возникают срывы движения - групповые скопления движущихся частиц, что уменьшает выбранный показатель эффективности. Этот эффект был использован при организации движения поездов метрополитена.

Для некоторых систем методом моделирования их работы численно было получено оптимальное количество движущихся частиц и среднее время ожидания требования до обслуживания.

При моделировании систем возникает задача о точности полученных результатов. Для этого необходимо провести статистическую обработку полученных данных. Одним из подходов в этом направлении является то, что можно исследуемую характеристику представить в виде регрессионной схемы с заданным количеством неизвестных параметров.

В § 2.4 главы 2 рассматривается регрессионная модель с конечным числом неизвестных параметров. Предполагается, что в каждой точке имеется ровно одно наблюдение, а ошибки наблюдений являются независимыми случайными величинами с разными, неизвестными, но ограниченными дисперсиями. Несмотря на большое количество работ по изучению регрессионных моделей вопросы построения доверительных полос для таких схем изучены недостаточно. Некоторые подходы предложены в [6]. В § 2.4 предложен метод построения доверительной полосы для неизвестной функции в линейной регрессионной модели в указанных выше предположениях. Этот метод основан на построении асимптотически несмещенных и состоятельных оценок элементов ковариационной матрицы вектора уклонений. Предлагаются явные выражения для таких оценок, которые являются состоятельными и асимптотически несмещенными (теорема 2.6), и выглядят следующим образом. Пусть в результате моделирования наблюдаются величины

$$y_i = \sum_{j=1}^m \theta_j \varphi_j(x_i) + \varepsilon_i, \quad i=1, N;$$

6. Wu C.P. Jackknife, bootstrap and other resampling methods in regression analysis //Ann.Statist.-1986.-V.14.-N.4.-P.1261-1350.

которые определяют линейную регрессионную модель,

$$Y = X\theta + \epsilon$$

где

$\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)^T$ — неизвестные параметры,

$\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N)^T$ — н.с.в. — ошибки наблюдений,

$E\epsilon_i = 0$, $E\epsilon_i^2 = \sigma_i^2 < \sigma_0^2$; σ_i^2 — неизвестны,

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ — система линейно независимых

ограниченных функций,

$\hat{\theta}$ — оценка наименьших квадратов (о.н.к.)

вектора $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)^T$,

$C_N = N E(\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)^T$, — ковариационная матрица вектора

$\sqrt{N}(\hat{\theta} - \theta)$,

X — матрица плана эксперимента.

Обозначим $\hat{y} = X\hat{\theta}$,

$$I_{k,l} = \begin{bmatrix} \varphi_k(x_1)\varphi_l(x_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \varphi_k(x_N)\varphi_l(x_N) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{c}_{kl} = (\hat{y} - y)^T I_{k,l} (\hat{y} - y),$$

$\tilde{C}_N$ — матрица с элементами $\tilde{c}_{kl}$, $k, l = \overline{1, m}$;

Оказывается (теорема 2.6), что если

$$N \cdot \det \left[\frac{X^T X}{N} \right] \rightarrow \infty \text{ при } N \rightarrow \infty,$$

то элементы $\hat{c}_{kl}$ матрицы

$$\hat{C}_N = \left[\frac{X^T X}{N} \right]^{-1} \tilde{C}_N \left[\frac{X^T X}{N} \right]^{-1}$$

являются несмещенными и состоятельными оценками мат. дисп. C_N .

Основываясь на оценки элементов матрицы C_N строится квадратичная форма

$$(\hat{\theta} - \theta)^T \cdot \hat{C}_N^{-1} \cdot (\hat{\theta} - \theta)$$

которая, как показано (лемма 2.3) имеет асимптотически

хи-квадрат распределение. Обозначим $\chi^2_{\gamma}(m)$ - квантиль уровня $\gamma > 0$ распределения хи-квадрат с m - степенью свободы.

Тогда

$$\varepsilon_{\gamma}(\theta) = \left\{ \theta : (\hat{\theta} - \theta)^T \cdot \tilde{C}_N^{-1} \cdot (\hat{\theta} - \theta) < \frac{\chi^2_{\gamma}(m)}{N} \right\}$$

есть эллипсоид доверия и границы доверительной полосы определяются как

$$\inf_{\varepsilon_{\gamma}(\theta)} f(\theta, x) \quad \text{и} \quad \sup_{\varepsilon_{\gamma}(\theta)} f(\theta, x)$$

Случай гауссовских ошибок наблюдений исследован в [7].

Специфика систем обслуживания с движущимися приборами такова, что предложенным в § 2.4 методом обработки данных не всегда удается воспользоваться. Например, когда ошибки наблюдений коррелированы, или если число неизвестных параметров растет с ростом числа наблюдений. Поэтому для полного изучения исследуемых систем необходимо разрабатывать более универсальные методы обработки данных.

Глава 3 посвящена разработке новых статистических методов обработки данных моделирования. Основное внимание здесь уделяется изучению регрессионных (как линейных, так и нелинейных) зависимостей, в которых число неизвестных параметров может расти с ростом числа наблюдений. Такие модели привлекают внимание многих исследователей [8,9] и используются, когда для аппроксимации неизвестной функции заранее неизвестно количество членов разложения в ряд. Поэтому представляет интерес изучение задачи выбора такого количества членов разложения, когда полученная оценка обладает требуемыми свойствами, например, несмещенностью и др. Такие вопросы изучаются в главе 3.

В § 3.1 главы исследуются линейные регрессионные модели с некоррелированными ошибками наблюдений. Основное внимание уделено свойствам О.Н.К. и оцениванию элементов ковариационной

- 7.Беляев Ю.К. Гаджиев А.Г. Статистическая обработка данных // Изв.АН СССР, Техн.киберн. -1979.-М4. -С.87-97.
- 8.Гурко В.И. Введение в общий статистический анализ // Теор. вер.примен. -1987.-V.32.- Вып.-. -С.252-265.
- 9.Portnoy S.Asymptotic behavior of M-estimators of p-regression parameters when p/n is large. I Consistency //Ann. Stat.-1984, V.12.-P.1298-1309.

матрицы вектора остатков, которая далее используется для построения доверительной полосы. Регрессионные модели в этой главе исследуются в предположении, что в каждой точке имеется ровно одно наблюдение и число неизвестных параметров m зависит от числа наблюдений N и может расти с ростом последних.

В § 3.1 главы 3 показано, что если

$$\frac{m}{N \cdot \lambda_1(N)} \rightarrow 0, \text{ при } N \rightarrow \infty,$$

где $\lambda_1(N) < \lambda_2(N) < \dots < \lambda_m(N)$ - собственные числа матрицы $\left[\frac{X^T X}{N} \right]$, то о.н.к. является несмещенной и состоятельной оценкой вектора неизвестных параметров (теорема 3.1).

Опираясь на этот результат, показано, что при разложении функции по ортогональным многочленам Чебышева первого рода, о.н.к. обладает указанными свойствами. Приведен пример выбора числа неизвестных параметров для которого о.н.к. является состоятельной (пример (3.1)).

Пусть

$$C_N = NE(\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)^T \quad - \text{ковариационная матрица вектора}$$

$$\sqrt{N}(\hat{\theta} - \theta),$$

$$I_{k,1}(x) \quad - \text{матрица с элементами } a_{ij}^{k,1}, i, j = \overline{1, m},$$

$$a_{ij}^{k,1} = \varphi_k(x_i) \varphi_j(x_j)$$

$$a_{k1} = (\hat{y} - y)^T I_{k,1}(\hat{y} - y),$$

$$\hat{y} = X \cdot \hat{\theta}, \quad A \quad - \text{матрица с элементами } a_{ij}, i, j = \overline{1, m};$$

$$\hat{C}_N = \left[\frac{X^T X}{N} \right]^{-1} A \left[\frac{X^T X}{N} \right]^{-1}$$

$$\hat{C}_{k1} \quad - \text{элементы матрицы } \hat{C}_N.$$

Если

$$\frac{m \sqrt{m}}{N \cdot \lambda_1(N)} \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty,$$

то

$$(\hat{c}_{kl} - c_{kl}) \xrightarrow{P} 0, E(\hat{c}_{kl} - c_{kl}) \rightarrow 0, \text{ при } N \rightarrow \infty$$

В § 3.2 главы 3 результаты § 3.1 обобщаются для случая регрессионных моделей с коррелированными ошибками наблюдений. Здесь исследуются также свойства о.н.к. и строятся асимптотически несмещенные состоятельные оценки элементов ковариационной матрицы вектора остатков.

Естественным обобщением линейных регрессионных моделей являются нелинейные. В § 3.3 главы 3 изучаются нелинейные регрессионные модели при следующих предположениях. Пусть

$$y_t = \eta(x_t, \theta) + \varepsilon_t, \quad t = \overline{1, N};$$

нелинейная регрессионная зависимость, где

$$\eta(x, \theta); \frac{\partial \eta(x, \theta)}{\partial \theta}; \frac{\partial^2 \eta(x, \theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} - \text{непрерывные по } (x, \theta) \text{ и}$$

ограниченные функции.

$x \in X, \theta \in \Theta$ - компакт,

$F_N(\theta)$ - матрица с элементами

$$f_{ij}(\theta) = \frac{\partial \eta(x_j, \theta)}{\partial \theta_i};$$

$0 < \lambda_1(\theta) < \lambda_2(\theta) < \dots < \lambda_m(\theta)$ - собственные числа матрицы

$\left[\frac{F_N^T(\theta) F_N(\theta)}{N} \right]$, $B(r)$ - шар радиуса $r > 0$ с центром в точке θ^* , где θ^* - истинное значение параметра θ . Для нахождения о.н.к. предложен итерационный процесс

$$\theta_N(s+1) = u_N(\theta_N(s)) = \theta_N(s) + A_N(\theta(s)) \cdot \delta_N(\theta(s)),$$

$$\text{где } A_N(\theta) = \frac{F_N^T(\theta) F_N(\theta)}{N};$$

$$\delta_N(\theta) = y - \eta(x, \theta_N).$$

Пусть

$$\exists \varepsilon_i, \varepsilon_j = r_{ij}; \quad \rho(\theta) = u(\theta) - \theta;$$

$$\tau(r) = \max_{p=1, \dots, m} \sup_{B(r)} \left\| \frac{\partial u_N(\theta)}{\partial \theta_p} \right\|$$

Оказывается, что если $\exists N$ такое, что

$$\frac{\pi^4 \sqrt{\pi}}{N(\lambda_1(\theta))^3} + \frac{\pi^4}{N^2(\lambda_1(\theta))^3} \sum_{i \neq j} |r_{ij}| \rightarrow 0 \quad r \rightarrow 0,$$

$$\frac{\pi^5}{N(\lambda_1(\theta))^4} + \frac{\pi^5}{N^2(\lambda_1(\theta))^4} \sum_{i \neq j} |r_{ij}| \rightarrow 0 \quad r \rightarrow 0,$$

$$\tau(r) = \frac{\|\rho^*\|}{r} < 1,$$

тогда существует случайная величина $\theta_N(\omega)$ такая, что

$$|\theta_N(\omega) - \theta_N(S)| \xrightarrow{P} 0 \quad \text{при } S \rightarrow 0,$$

т.е. итерационный процесс сходится (теорема 3.9).

Далее в условиях теоремы 3.9 доказывается $\sqrt{N}$ - состоятельность с.в. $\theta_N(\omega)$, которая и является о.н.к. (теорема 3.11). Аналогичные свойства о.н.к. при некоторых условиях, накладываемых на ошибки наблюдений исследованы в [10, 11].

Для случая, когда ошибки наблюдений являются независимыми случайными величинами показано, что для случайной величины ρ^* выполнено

$$\sqrt{N} \rho^* \rightarrow N(0, \Sigma(\theta^*))$$

где $\Sigma(\theta^*)$ - некоторая неизвестная матрица (теорема 3.12), элементы которой могут быть оценены. § 3.4 главы 3 посвящен исследованию свойств $\hat{M}$ - оценок, частным случаем которых являются о.н.к. Построена итерационная процедура для вычисления $\hat{M}$ - оценок, доказана сходимость по вероятности этой итерационной процедуры (теорема 3.14). В § 3.5 главы 3 предложен подход для оценивания элементов ковариационной матрицы вектора остатков. Найдены явные выражения для оценок элементов ковариационной матрицы вектора остатков, которые при некоторых условиях, накладываемых на собственные числа информационной матрицы являются асимптотически несмещенными и состоятельными

10. Jenrich R.I. Asymptotic properties of non-linear least squares estimators // Ann. Math. Statist. - 1969. - V. 40. - P. 633-643.

11. Pazman A. Distribution of the weighted l.s.e. in nonlinear models with symmetrical errors // Academia Praha, Kybernetika. - 1988. - V. 24. - N. 6. - P. 413-427.

оценками. В § 3.6 главы 3 исследуются обобщенные регрессионные модели, где с каждым набором наблюдений определяется семейство вероятностных мер. Близкие модели были исследованы в [12]. Для таких моделей через собственные числа информационной матрицы установлены свойства о.н.к., найдены состоятельные и асимптотически несмещенные оценки элементов ковариационной матрицы вектора остатков.

В главе 4, используя статистические методы, разработанные в главе 3, проведена статистическая обработка результатов моделирования систем, описанных в главе 2. Приведены два примера построения доверительной полосы. В примере 1 предполагается, что среднее время ожидания при $t=0$ имеет асимптотически гауссовское распределение. В качестве оценки дисперсии берется выборочная дисперсия и строится доверительная полоса. В примере 2 использованы результаты главы 3. Показано, что предложенный подход для полученных данных дает более узкую доверительную полосу по сравнению со стандартным методом построения доверительной полосы [13], когда предполагается, что с ростом числа наблюдений исследуемая величина имеет асимптотически гауссовское распределение. Приведены примеры использования полученных результатов в разных областях практики, имеются акты о внедрении (см. приложение).

Заключение. В диссертации разработаны методы и приемы, позволяющие с единой позиции изучить поведение широкого класса систем массового обслуживания с движущимися приборами и управление такими системами.

Установлено, что построение и исследование математических моделей движущихся частиц является эффективным подходом для изучения систем массового обслуживания с движущимися приборами.

Разработаны теоретические основы управления системами с движущимися приборами в классе задержек, которые включают:

- описание класса систем, для которых целесообразно вводить

12. Малютин М.Б. Нижние границы для средней длительности последовательно планируемого эксперимента // Изв. вузов. Математика. -1983.-N.11.-С.19-41.

13. Крамер Г. Математические методы статистики. - М.: Мир, 1975. -648 с.

задержки;

- нахождение явного вида оптимальной функции, минимизирующей выбранный показатель эффективности;

- определения оптимального числа приборов в системе.

Предложен подход для моделирования на компьютере поведения широкого класса систем с движущимися приборами, который экономит компьютерные ресурсы.

Предложен новый метод статистической обработки данных моделирования, подчиненных регрессионной зависимости, который предполагает:

- дисперсии ошибок наблюдений неизвестны и разные;
- в каждой точке имеется одно наблюдение, что затрудняет оценить дисперсию;
- число неизвестных параметров может расти с ростом числа наблюдений.

Предложенный метод реализован в виде программы на компьютере и используется для определения точности данных моделирования.

Разработанные в диссертации теоретические положения являются новым вкладом в развитие перспективного направления - анализа систем массового обслуживания с движущимися приборами.

Математические модели движущихся частиц и методы статистического анализа данных, предложенные в диссертации являются универсальными и могут быть использованы в различных приложениях. Имеются акты об их применении в различных областях практики.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах:

1. Гаджиев А.Т. Минимизация среднего времени ожидания в системах с рекуррентным обслуживанием // Вестн. М.У. Сер.матем. мех.-1981.-№3. - С.19-23.

2. Гаджиев А.Т. Системы с цикличностью моментов начала обслуживания // Теория массового обслуживания: Труды семинара ВНИИ системных исследований. -М., 1981. - С.127-130.

3. Гаджиев А.Г. Простейшее управление системой связи //III Межд.Вильнюсская конф.по теории вероятностей и матем.статистике. - Вильнюс, 1981. - С.116-117.

4. Гаджиев А.Г. Процесс накопления, возникающий при блуждании двух частиц по замкнутому контуру // Труды Института кибернетики АН Азерб.ССР. Матем.киберн.и прикл.матем (Баку) - 1983.- Вып.6. - С.64-69.

5. Gadziev A.G. Construction of a confidence region for linear function with unknown parameters. Preprint. -1984/17/ISSN 0347-2807, Chalmers univers.-Goteborg,Sweden, 15 p.

6. Гаджиев А.Г. Стратегия управления системами с циклическими моментами начала обслуживания //IV Межд.Вильнюсская конф. по теории вероятностей и матем.статистике. -Вильнюс. - 1985. - С.147-148.

7. Gadziev A.G. Control strategy for some queues //Stoch. proc.their.appl.-1985.-V.19.-N.1. -P.37-38.

8. Gadziev A.G. Delays minimizing the waiting time in systems with cyclic services //Scand.J.Statist.-1985.-N12. -P.301-307

9. Гаджиев А.Г. Управление системами с циклическими моментами начала обслуживания //Изв.АН СССР, Техн. кибернетика. -1986.-N6. - С.183-186.

10. Gadziev A.G. Mathematical models of transportation //XVIII European meeting of Statist.Berlin. - Abstracts.-1988.

11. Gadziev A.G. Estimation of a covariated matrix and properties of M-estimators in regression models //Intern.Conf. Stoch Methods Exper.Sci.-Wroclaw.-1989.-P.27-28.

12. Гаджиев А.Г. Об оценивании в линейных регрессионных моделях //Вестник МГУ. Сер.матем.мех. -1989.- N1. - С.8-13.

13. Гаджиев А.Г. Статистические оценки в линейных регрессионных моделях с зависимыми ошибками наблюдений // Теор. вер. прл.-1989.-Т.34.-Вып.4. -С.764-768.

14. Gadziev A.G. Regression models in data analysis //2 nd. World Congress of Bernoulli Soc.Math.Stat.Probab.-1990.-Uppsala, Sweden.-P.204.

15. Gadziev A.G. Regression models with increasing number

of unknown parameters //Stoch.proc.their.appl. -1990.-V.35.
- P.194-195.

16. Гаджиев А.Г. Статистические оценки в регрессионных моделях //ДАН СССР.- 1990. -N2. - С.265-268.

17. Гаджиев А.Г. Оценивание и построение доверительных полос в регрессионных моделях //Межвузовский сб. научных трудов. Статистические методы. -Пермский университет. -1990.- С.142-150.

18. Гаджиев А.Г. О случайном блуждании частиц по кольцу //Матем.заметки. - 1990.- Т.47.Вып.6. - С.140-143.

19. Гаджиев А.Г. Управление системами массового обслуживания в классе задержек //ДАН СССР.- 1991.- Т.317.-N3 - С.540-543.