

Ш 86710

Московский ордена Ленина, ордена Октябрьской революции
ордена Трудового Красного Знамени государственный технический
университет имени Н. Э. Баумана

На правах рукописи
УДК 620.169.2

БОГОМОЛОВ СЕРГЕЙ ДРЬЕВИЧ

ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТОВ С НЕНАБЛЮДАЕМЫМИ В СОВОКУПНОСТИ
ПАРАМЕТРАМИ

05.13.16. - применение вычислительной техники,
математического моделирования и математических методов
в научных исследованиях

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук



МОСКВА 1992

Работа выполнена на кафедре высшей математики Московского государственного технического университета им. Н.Э.Баумана.

Научный руководитель - доктор технических наук,
профессор Г.Д.Карташов

Официальные оппоненты:

Доктор физико-математических наук, профессор Кравченко В.Ф.

Кандидат технических наук, с.н.с

Широков В.В.

Ведущая организация - Институт проблем кибернетики РАН

Защита диссертации состоится "_10_" ноября 1992 г. в
II час. _00_ мин. на заседании Специализированного совета
Д 063.15.12 при МГТУ им.Н.Э.Баумана по адресу: Москва, 107006,
ул. 2-я Бр

С

библиотеке

1

г.

Ученый

кандид

А.Г.Щипин

и 24.09.92

л.

и 86 210

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ. К настоящему времени имеется большое количество работ, посвященных разработке методов планирования эксперимента и оценке их результатов. Анализ существующей литературы показывает, что несмотря на разнообразие решаемых задач, возникающих при проведении экспериментов, в ней, как правило, рассматривается случай, когда параметры, описывающие исследуемые объекты или явления, могут быть измерены в совокупности.

Однако такие измерения не всегда осуществимы на практике. Особенно часто такая ситуация возникает в теории надежности. Из-за разрушающего характера многих испытаний невозможно бывает измерить у одного и того же объекта два и более параметров. Классическим примером таких параметров являются моменты отказов (продолжительность функционирования) изделия в различных режимах. Действительно, измерение момента отказа изделия в одном режиме приводит к его разрушению и определение этого параметра у этого же изделия при другой нагрузке не представляется возможным. Параметры этого класса в дальнейшем называются параметрами ненаблюдаемыми в совокупности. Применение к ним классических методов теории планирования эксперимента, математической статистики невозможно из-за отсутствия необходимой для этого информации.

В тоже время решение таких задач теории надежности, как сокращение продолжительности испытаний, расчет надежности в переменном режиме, воспроизведение в лабораторных условиях эксплуатационных режимов, требует знания зависимостей между моментами отказов изделия при различных внешних нагрузках. Эти и другие задачи надежности привели к необходимости развития нового направления в теории планирования экспериментов - планирование разрушающих экспериментов, по результатам которых можно было бы проверять различные гипотезы о ненаблюдаемых в совокупности параметрах или устанавливать между ними функциональную, корреляционную зависимости и другие характеристики.

В последнее время появился ряд работ, посвященных решению эт

НТБ МГТУ им. Н.Э. Баумана



1086710

Богомолов С.Ю. Планирован



задачи, так в работах Беляева Д.К., Тимонина В.И., Белова В.Н., Шведовой И.Г., Amorim S.D., Johnson R.A., Green D.W. предложены методы установления зависимостей между параметрами интересующего нас класса.

Карташовым Г.Д. была предложена модель эксперимента, по результатам которого можно устанавливать связи между такими величинами в непрерывном случае.

Однако часто встречаются параметры, имеющие конечное число значений, т.е. описывающиеся дискретными случайными величинами, например число срабатываний электрического реле. Для определения связей между такими параметрами при различных внешних нагрузках представляет интерес разработка моделей экспериментов для дискретных, ненаблюдаемых в совокупности параметров.

Недостаточно также изучены вопросы связанные с оценкой точности получаемых по таким моделям результатов, их достоверности, с выбором оптимального плана экспериментов такого класса.

Решение этих задач является целью настоящей работы.

НАУЧНАЯ НОВИЗНА. Разработаны и исследованы методы планирования, проведения и обработки результатов стохастических экспериментов, позволяющих осуществлять статистический анализ данных для двумерных случайных векторов с ненаблюдаемыми в совокупности компонентами. Применение этих методов дает возможность оценивать совместные функции распределения, корреляционные зависимости, а также применять к случайным векторам рассмотренного класса аппарат математической статистики, теорий планирования оптимального эксперимента, регрессионного анализа.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЗНАЧИМОСТЬ. Применение разработанных методов позволяет значительно сокращать время проведения дорогостоящих испытаний аппаратуры, а также повышать их достоверность.

Результаты настоящей работы вошли в методику для определения стойкости интегральных микросхем к дестабилизирующему воздействию ионизирующего излучения низкой интенсивности.

На базе разработанных моделей создано программное обеспечение, позволяющее проверять различные гипотезы для параметров исследованного класса, устанавливать между ними

функциональные, корреляционные связи. Созданное программное обеспечение значительно облегчает обработку результатов, проведенного по настоящему методу эксперимента.

АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ. Результаты диссертационной работы докладывались на Всесоюзной школе - семинаре "Надежность сложных механических систем" - г. Ташкент, 1989, а также на семинарах по планированию эксперимента в МГТУ им. Н.Э.Баумана.

По результатам диссертационной работы опубликованы 3 печатных работы.

СТРУКТУРА И ОБЪЕМ ДИССЕРТАЦИИ. Работа состоит из введения, четырех глав, заключения и приложений. Она изложена на 114 страницах машинописного текста, содержит 58 рисунков, 2 таблицы, 32 наименования используемой литературы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

Во введении приведены основные задачи диссертационной работы, рассмотрены вопросы, обусловившие ее новизну и актуальность. Выделены результаты, выносимые на защиту, дано краткое описание структуры и содержания работы.

В первой главе диссертации сформулирована постановка задачи, разработаны методы планирования и обработки результатов эксперимента, позволяющие проводить статистический анализ данных для двумерных дискретных случайных векторов с ненаблюдаемыми в совокупности компонентами.

Постановка задачи. Пусть имеется определенная выборка однотипных объектов. Физические, химические, механические и т.д. процессы протекают в них по одним законам. Но каждый взятый в отдельности объект обладает некоторыми, присущими только ему свойствами. Это связано с колебаниями в технологических процессах при изготовлении этих объектов, различиях в микроструктуре материалов из которых они сделаны и т.д. Поэтому момент отказа каждого объекта при воздействии на него внешней нагрузки есть реализация некоторой случайной величины ξ . Понятно, что при проведении эксперимента можно измерить ξ лишь в одном режиме нагружения. После этого объект будет разрушен. Обозначим ξ_i момент отказа i -го объекта при одном режиме

нагружения, ξ_2^1 - его же момент отказа в другом режиме. В дальнейшем ξ_1, ξ_2 будем называть случайными величинами ненаблюдаемыми в совокупности. Требуется восстановить их совместную функцию распределения

$$F(x, y) := P(\xi_1 < x, \xi_2 < y).$$

Эта задача может быть решена при помощи предложенных моделей. Они основаны на специально спланированных экспериментах, и представляют из себя следующее:

Программный эксперимент.

Задается произвольная с.в. τ распределенная независимо от ξ_1, ξ_2 по закону $Q(x) = P(\tau < x)$.

Сравниваем ξ_1 и τ определяем $\zeta := \min(\xi_1, \tau)$. Если $\xi_1 > \tau$, то определим вторую с.в. ξ_2 и получим реализацию случайного вектора (τ, ξ_2) , при условии, что $\tau < \xi_1$.

Динамический эксперимент.

Программный эксперимент обладает одним существенным недостатком. $Q(x)$ выбирается до начала эксперимента, неудачное его задание, при ограниченном объеме выборки, может сделать проводимый эксперимент малоинформативным.

От этого недостатка свободен динамический эксперимент, предполагающий выбор $Q(x)$ по мере накопления информации. План его заключается в следующем. Все объекты случайным образом разбиваются на пары. Каждая пара испытывается по схеме

$$\eta_1 := \min\{\xi_1^1, \xi_1^2\} = \begin{cases} \xi_1^1, & \xi_1^1 < \xi_1^2 \\ \xi_1^2, & \xi_1^1 > \xi_1^2 \end{cases}$$

$$\eta_2 := \begin{cases} \xi_2^2, & \xi_1^1 < \xi_1^2 \\ \xi_2^1, & \xi_1^1 > \xi_1^2 \end{cases}.$$

Т. о. после проведения эксперимента станут известны реализации случайного вектора (η_1, η_2) .

В работах Карташова Г.Д. показано, что при бесконечно большом

объеме выборки по полученным данным восстанавливается функция распределения непрерывных с.в. ξ_1, ξ_2 .

Рассмотрим случай, когда ξ_1, ξ_2 дискретно распределенные с.в. с атомарной плотностью $f(x_i, y_j)$.
Модель программного эксперимента :

Зададим $\tau \sim q(x_i)$, распределенную независимо от ξ_1, ξ_2 .

По результатам, полученным при реализации такого эксперимента, восстановим распределения

$$\bar{K}_1(x) := \mathbb{P}(\zeta \geq x) \text{ и}$$

$$\bar{K}(x, y) := \mathbb{P}(\tau > x, \xi_2 > y \mid \tau < \xi_1).$$

Теорема 1. Пусть $\mathbb{P}(\tau = x_i) \neq 0$, тогда

$$f_1(x_i) = \frac{\bar{K}_1(x_i) \bar{Q}(x_{i+1}) - \bar{K}_1(x_{i+1}) \bar{Q}(x_i)}{\bar{Q}(x_i) \bar{Q}(x_{i+1})},$$

$$f(x_i, y_j) = C \frac{k(x_i, y_j) q(x_{i+1}) - k(x_{i+1}, y_j) q(x_i)}{q(x_i) q(x_{i+1})},$$

$$\text{Здесь } \bar{Q}(x) = 1 - Q(x), C := \sum_{\tau_m=0}^{\infty} q(\tau_m) P_1(\tau_m),$$

$$k(x_i, y_j) := \bar{K}(x_i, y_j) - \bar{K}(x_{i+1}, y_j) -$$

$$\bar{K}(x_i, y_{j+1}) + \bar{K}(x_{i+1}, y_{j+1}).$$

Модель динамического эксперимента:

После проведения эксперимента станут известными реализации случайных величин η_1, η_2 . По этим данным восстанавливается распределение $H(x, y) := \mathbb{P}(\eta_1 \geq x, \eta_2 \geq y)$.

Теорема 2. Пусть $\mathbb{P}(\eta_1 = x_m, \eta_2 = y_n, \xi_1^1 = \xi_1^2) =$

$=P(\xi_1^2 = x_m, \xi_2^2 = y_n, \xi_1^2 = x_m) , \text{ тогда}$

$$h(x_m, y_n) = f_1(x_m) \left[f(x_m, y_n) + 2 \sum_{k=x_{m+1}}^{\infty} f(z_k, y_n) \right] ,$$

$$h_1(x_m) = f_1(x_m) \left[f_1(x_m) + 2 \sum_{k=x_{m+1}}^{\infty} f_1(z_k) \right] ,$$

$$h_2(y_n) = \sum_{x_m=0}^{\infty} f(x_m, y_n) \left[f_1(x_m) + 2 \sum_{k=0}^{x_m-1} f_1(z_k) \right] .$$

Заметим, что при $\Delta x \rightarrow 0$ получаем непрерывное распределение. При этом сформулированные здесь утверждения полностью соответствуют результатам полученным в работах Карташова Г.Д.

В качестве примера восстановления параметров распределения дискретных с. в. рассмотренного класса, приведено двумерное распределение ПУАССОНА.

Во второй главе рассматривается вопрос о выборе оптимального плана эксперимента $Q(x)$ в смысле получения оценок с минимальной дисперсией. Задача решается в рамках гауссовской модели в следующей постановке :

$$f(x, y) \sim N_2(m_1, \sigma_1, \rho, m_2, \sigma_2) ; q(x) \sim N_1(m_1, \sigma) ;$$

причем, параметры $m_1, \sigma_1, m_2, \sigma_2$ считаем известными, т.к. они могут быть определены традиционными методами.

При такой постановке задача сводится к указанию среднего квадратичного отклонения σ , при котором дисперсия оценки коэффициента корреляции ρ достигает своего минимального значения.

Оценка коэффициента корреляции была найдена методом статистических моментов.

$$\hat{\rho} = \frac{\pi (\sigma_1^2 + \sigma^2)}{\sigma^2 \sigma_1 \sigma_2} m_{11},$$

где

$$m_{11} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y},$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i.$$

x_i, y_i - реализации случайного вектора. (τ, ξ_1) .
Установлена ее асимптотическая несмещенность и асимптотическая нормальность.

Получено выражение для дисперсии этой оценки.

$$D\hat{\rho} = \frac{\pi (\sigma_1^2 + \sigma^2)}{4n \sigma_1^2 \sigma_2^2} (\pi (\sigma_1^2 + \sigma^2) + 6\sigma^2 - 2\sigma_1^2 \rho^2).$$

Основная трудность при доказательстве этих положений заключалась в необходимости вычисления многомерных интегралов специального вида. Доказанные утверждения позволяют их производить.

Проведенные исследования показали, что σ необходимо выбирать из условия $\sigma = \alpha \sigma_1$, где $\alpha \in [0.6; 0.76]$ в зависимости от величины ρ .

Полученные результаты позволяют так же определять асимптотические доверительные интервалы для оценки параметра ρ .

В третьей главе диссертации рассматривается вопрос о возможности получения оценок всех параметров распределений ненаблюдаемых в совокупности случайных величин по предложенным моделям.

Оценки параметров распределений находились методом статистических моментов.

Получены оценки распределения

$$N_2 (m_1, \sigma_1, \rho, m_2, \sigma_2).$$

По модели динамического эксперимента

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{m}_1 = \bar{x} + \frac{s_x}{\sqrt{\pi-1}}; \\ \hat{\sigma}_1^2 = \frac{\pi}{\pi-1} s_x^2; \\ \hat{m}_2 = \bar{y} - \frac{\hat{\rho} s_y}{\sqrt{\pi-\hat{\rho}^2}}; \\ \hat{\sigma}_2^2 = \frac{\pi}{\pi-\hat{\rho}^2} s_y^2; \\ \hat{\rho}^2 = r^2 \frac{\pi(\pi-1)}{1+(\pi-1)r^2}, \end{array} \right. \quad (1)$$

где

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \quad s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

$$s_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2, \quad r = \frac{1}{ns_x s_y} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y}.$$

Рассмотрена возможность нахождения оценки ρ через третий центральный момент

$$\hat{\rho}^2 = \frac{\pi a^2}{(2-\pi) a^2 - a^2},$$

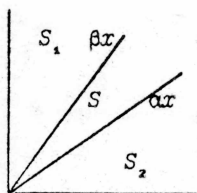
где

$$a = e_{3y} / s_y^3, \quad e_{3y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^3.$$

По модели программного эксперимента

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{m}_1 &= \bar{x} + \sqrt{2/\pi} \frac{\hat{\sigma}_1 \sigma}{\sqrt{\hat{\sigma}_1^2 + \sigma^2}}; \\ \hat{\sigma}_1^2 &= \frac{\pi \omega^2 (s_x^2 - \sigma^2) + 2\sigma^4}{\pi(\sigma^2 - s_x^2)}; \\ \hat{m}_2 &= \bar{y} - \sqrt{2/\pi} \frac{\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 \hat{\rho}}{\sqrt{\hat{\sigma}_1^2 + \sigma^2}}; \\ \hat{\sigma}_2^2 &= \frac{\pi s_y^2 (\hat{\sigma}_1^2 + \sigma^2)}{\pi(\hat{\sigma}_1^2 + \sigma^2) - 2\hat{\sigma}_1^2 \rho^2}; \\ \hat{\rho}^2 &= \frac{\pi(\pi-1) r^2 (\hat{\sigma}_1^2 + \sigma^2)}{2\sigma^2 + (\pi-1)(\hat{\sigma}_1^2 + \sigma^2) r^2}. \end{aligned} \right. \quad (2)$$

Найдены также оценки параметров двумерного усеченного экспоненциального распределения, расположенного в угле



$$f(x,y) = \begin{cases} ce^{-\lambda x - \mu y}, & (x,y) \in S \\ 0 & (x,y) \in S_1, S_2 \end{cases}$$

по модели динамического эксперимента и по маргинальным распределениям.

Полученные в этой главе результаты свидетельствуют о том, что исследуемые модели позволяют проводить оценивание всех параметров рассмотренных распределений.

Четвертая глава диссертации посвящена исследованию полученных в главе 3 оценок параметров.

Эти оценки имеют достаточно сложный вид, и их аналитическое исследование не представляется возможным. Поэтому с целью выяснения некоторых свойств полученных оценок параметров различных законов распределений и для определения их поведения при различных объемах выборки проводилось

статистическое моделирование описанных экспериментов.

Моделирование динамического эксперимента в рамках гауссовской модели.

Датчиком случайных чисел были сгенерированы $n = 2m$ величин из $N_2(0, 1, \rho, 0, 1)$, для $\rho = 0,2; 0,5; 0,9$; n – объем выборки.

Это допущение существенно не снижает ценности полученных результатов, так как любые другие значения параметров можно привести к ним изменением масштаба.

По формулам (1) восстановлены параметры этого закона. Результаты моделирования для параметра ρ приведены на рисунках 1,2,3,4. Остальные восстановленные оценки параметров так же стремятся к своим теоретическим значениям с увеличением n .

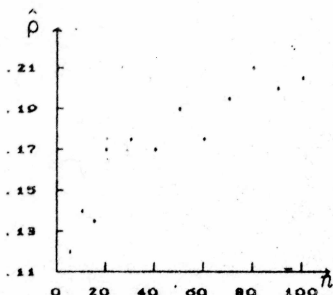


Рис.1. Зависимость оценки параметра ρ от объема выборки. $\rho = 0,2$.

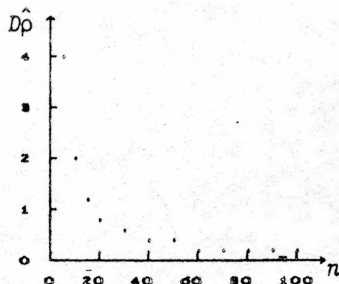


Рис.2. Зависимость дисперсии оценки параметра ρ от объема выборки n .

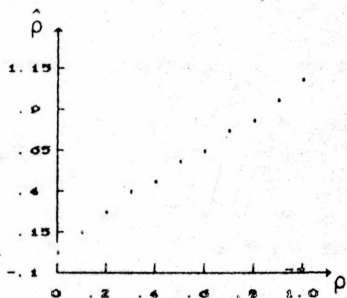


Рис.3. Зависимость оценки параметра ρ от ρ , $n = 100$.

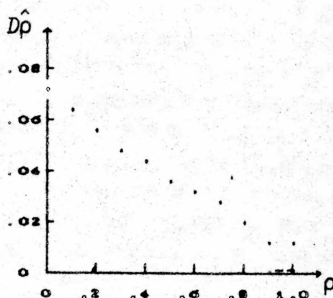


Рис.4. Зависимость дисперсии оценки параметра ρ от ρ , $n = 100$.

Моделирование программного эксперимента в рамках гауссовской модели проводилось при тех же предположениях о параметрах m_i , σ_i , $i=1,2$.

Объемом выборки при этом считалось количество успешных реализаций случайного вектора (τ, ξ_2) .

Результаты моделирования для параметра ρ приведен на рисунке 5

Была исследована зависимость дисперсий восстановленных оценок от значения дисперсии управляющего закона $Q(x)$. На рисунке 6 представлена зависимость $D\hat{\rho}$ от σ .

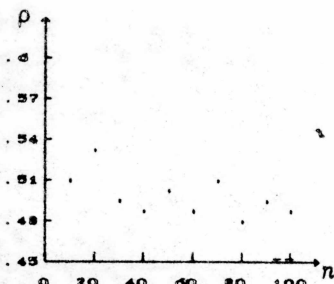


Рис. 5. Зависимость оценок параметра ρ от объема выборки n . $\rho=0.5$.

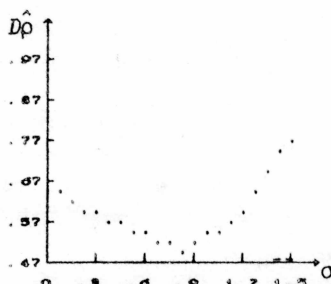


Рис. 6. Зависимость дисперсии оценки параметра ρ от σ_{yn} .

Проведенные исследования показали состоятельность оценок параметров двумерного нормального распределения, полученных по этим моделям.

В результате моделирования двумерного усеченного экспоненциального распределения, сосредоточенного в угле, была установлена состоятельность оценок параметров, полученных по модели динамического эксперимента и по маргинальным распределениям. Установлено, что дисперсия первых стремится к нулю быстрее, т.е. они более эффективны.

Разработан алгоритм для проверки гипотезы о принадлежности ненаблюдаемых в совокупности случайных величин к двумерному гауссовскому распределению. Программа, реализующая его, тестировалась на смоделированных случайных числах из распределения

$N_2(0, 1, \rho, 0, 1)$.

Полученные в настоящей работе результаты были применены в исследованиях стойкости интегральных микросхем к дестабилизирующему воздействию ионизирующего излучения низкой интенсивности.

Ключевой задачей в проблеме повышения надежности бортовой аппаратуры космических аппаратов является исследование стойкости ИМС к ИИ в условиях функционирования. Однако, в связи с тем, что испытания ИМС в условиях, близких к эксплуатационным, невозможны из-за их продолжительности и дороговизны, возникла необходимость в ускоренной оценке стойкости ИМС.

При решении этой задачи нужно устанавливать связи между моментами отказов ИМС при различной интенсивности ИИ, а также меру автомодельности (в смысле достоверности вывода о поведении изделия в одном режиме по его испытаниям в другом) разных режимов.

Для исследования этих вопросов был проведен натурный эксперимент по программе, предложенной автором.

Было испытано 16 ИМС в переменном режиме 0,5 - 5 рад/с (режимы выбирались в соответствии с возможностями испытательного оборудования).

Обработка экспериментальных данных проводилась с помощью разработанного программного обеспечения. Полученные результаты нашли применение в разработанной методике.

В заключении приведены основные результаты диссертационной работы.

Исследована и обобщена стохастическая модель эксперимента с ненаблюдаемыми в совокупности с.в. Проведенные исследования подтвердили состоятельность этой модели, а разработанное математическое обеспечение позволяет эффективно использовать ее на практике.

Основные результаты диссертационной работы сводятся к следующему:

1. Разработана стохастическая модель эксперимента для случая, когда наблюдаемые параметры описываются дискретными случайными величинами.

2. Определены условия выбора дисперсии управляющего закона для получения оценки коэффициента корреляции нормального распределения с минимальной дисперсией.

3. Получены оценки параметров нормального и усеченного экспоненциального распределений по моделям динамического и программного экспериментов. Исследована состоятельность этих оценок.

4. Построены имитационные модели предполагаемых экспериментов для нормального и усеченного экспоненциального распределений.

5. Проведено сравнение эффективности индивидуального и группового подходов к оцениванию параметров многомерных распределений.

6. Разработан алгоритм для проверки гипотезы о гауссовском распределении одновременно ненаблюдаемых случайных величин.

7. На базе разработанных моделей создано программное обеспечение, позволяющее проверять различные гипотезы для параметров исследованного класса, устанавливать между ними функциональные, корреляционные связи.

8. Результаты настоящей работы вошли в методику для определения стойкости ИМС к дестабилизирующему воздействию ИИ низкой интенсивности.

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в следующих статьях автора:

1. Богомолов С.Ю. Исследование оценок параметров двумерного гауссовского распределения с ненаблюдаемыми одновременно компонентами // Труды МГТУ. - 1990. - № 544. - С.29 - 40.

2. Богомолов С.Ю., Карташов Г.Д. О нахождении оптимального плана эксперимента для оценки коэффициента корреляции гауссовской модели // Динамика неоднородных систем: Сб. тр. ВНИИСИ. - М., 1991. С.3 - 9.

3. Истомин Е.П., Богомолов С.Ю. Оценка параметров двумерного гауссовского распределения с ненаблюдаемыми одновременно компонентами // Тезисы докладов Всесоюзного семинара по надежности больших механических систем. - Ташкент, 1989. - С.45-47.