

На правах рукописи

ДЯЧКИН Алексей Александрович

УДК 539.3

**Разработка конечно-элементного подхода к расчетам
тонкостенных конструкций с учетом поперечных
сдвигов**

Специальность 05.07.03 - Прочность летательных аппаратов

**Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук**



Работа выполнена в Московском ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени государственном техническом университете имени Н.Э.Баумана.

Научный руководитель:

доктор технических наук,
профессор Шаповалов Л.А.

Официальные оппоненты:

доктор технических наук,
профессор Алфутов Н.А.,
кандидат технических наук,
доцент Никитенко В.И.

Ведущее предприятие:

НПО "Вымпел"

Защита состоится
в заседании специализированной комиссии
по адресу:

107005, Москва

С диссертацией
Н.Э.Баумана.

Ваш отзыв на
диссертацию просим направлять

Автореферат

Уч. секретарь
к.т.н., доцент

1544720

Актуальность темы. Создание образцов современной техники с применением передовых технологий и новых материалов требует больших усилий и высокой точности расчетов на этапе проектирования, вследствие высоких требований, предъявляемых к конструкциям и высокой стоимости их производства. Благодаря низкому удельному весу, высоким прочностным и жесткостным характеристикам, в современной технике находят широкое применение конструкции на основе ферм из углепластиковых стержней, подкрепленных оболочек различной геометрии, выполненных из композиционных материалов и обладающих пониженной сдвиговой жесткостью. Такие конструкции используются, например, при построении телескопов наземного и космического базирования, для установки на КЛА прецизионного оборудования. При создании подобных систем предъявляются повышенные требования к их жесткости и характеру деформирования. Поэтому задача создания уточненных методик расчета пространственных тонкостенных конструкций с пониженной сдвиговой жесткостью сохраняет свою актуальность.

В настоящее время метод конечного элемента (МКЭ) является важным инструментом инженерного анализа конструкций. В связи с применением этого метода в механике композиционных материалов, был обнаружен эффект повышенной жесткости конечных элементов (КЭ) при уменьшении несущей толщины конструкции для задач, учитывающих трансверсальные жесткости материала. Многочисленными исследователями были предложены способы преодоления вычислительных трудностей, связанных со смешиванием форм при формулировке соотношений для КЭ, однако окончательного решения здесь пока не получено. Задача разделения форм деформирования, рассматриваемая в данной работе, является актуальной для разработки методик расчета с помощью МКЭ конструкций с учетом деформаций поперечного сдвига.

Вывод соотношений для матриц жесткости КЭ весьма трудоемок и сопряжен с проведением громоздких алгебраических преобразований в аналитическом виде. Для освобождения исследователя от рутинной работы и возможных опечаток в диссертации последовательно используются системы аналитических вычислений на ЭВМ (САВ). В работе также уделено внимание разработке программного обеспечения МКЭ. Работы в этом направлении представляются актуальными.

Цели исследования:

- Создание методики расчета пространственных тонкостенных конструкций с пониженной сдвиговой жесткостью методом конечного элемента на основе сравнений линейной теории оболочек и пластин.

НТБ МГТУ им. Н.Э. Баумана



1544780

Дячкин А. А. Разработка кон

- Исследование влияния учета переменности метрики по толщине и характера приложения внешнего сжатия на устойчивость элементов тонкостенных конструкций.
- Разработка программного обеспечения для персональных ЭВМ для вывода матриц жесткости и устойчивости КЭ с помощью САВ и комплекса программ МКЭ для решения задач прочности и устойчивости конструкций.

Научная новизна:

- Впервые разработан КЭ подход к анализу конструкций с учетом деформаций поперечного сдвига, основанный на разделении уравнений сдвиговой теории оболочек и пластин. При таком подходе точное решение разыскивается в виде суммы классического, полученного на основе теории Кирхгофа-Лява, и поправок к нему за счет учета деформаций поперечного сдвига. В конечно-элементной форме сформулирован новый функционал энергии для вычисления поправок, при дискретизации которого не возникает известных трудностей, связанных с появлением избыточной жесткости при изгибе в сдвиговых КЭ при уменьшении их относительной толщины.
- Из решения линеаризованных уравнений равновесия, полученных на основе вариационного подхода, найдено точное аналитическое решение задачи устойчивости тонкостенного шпангоута большой высоты. В отличие от ранее известных результатов, это решение позволяет учесть переменность метрики по толщине и характер приложения внешнего сжатия.
- Методом конечного элемента получено решение новых практически важных задач расчета деформированного состояния секции зеркала крупногабаритного телескопа и устойчивости ортогонального каркаса из композиционного материала.

Практическая ценность:

- Предложен новый подход к расчету конструкций с пониженной сдвиговой жесткостью методом конечного элемента на основе разделения уравнений линейной теории пластин и оболочек. Показано, что применение этого подхода позволяет получать хорошие решения в широком диапазоне относительных толщин и модулей E/G с помощью простых КЭ.
- Разработано программное обеспечение для персональных ЭВМ для вывода матриц жесткости и устойчивости КЭ с помощью САВ, позволяющее получать на основе вариационных принципов методически правильные соотношения метода перемещений для КЭ различной геометрии и аппроксимации переменных. С применением алгоритмов для разреженных матриц большой размерности и метода Ланцоша к решению обобщенной проб-

лемы на собственные значения, создан комплекс программ для решения задач прочности и устойчивости конструкций.

- Методы, алгоритмы и программы, изложенные в диссертации, внедрены в расчетную практику НПО "Астрофизика", ЦНИИСМ и ИПРИМ РАН.

Достоверность научных результатов. полученных в работе, следует из применения теоретически обоснованных вариационных принципов и подтверждается сравнением КЭ решений тестовых задач с известными точными аналитическими и численными решениями других авторов.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на: научном семинаре кафедры М2 МГТУ им.Н.Э.Баумана (сентябрь 1990 г, май 1993 г.), научном семинаре НИО-3 НПО "Машиностроение" (февраль 1991 г.), Молодежной научно-технической конференции "Космонавтика - XXI век". (г.Калининград М.О. 1-7 сентября 1991 г.), XVI Международной конференции по проблемам оболочек. (г.Нижний Новгород. 21-23 сентября 1993 г.)

Публикации. Основное содержание диссертации опубликовано в работах [1-4] и в научно-технических отчетах по хозяйственной тематике.

Личный вклад автора. Все основные результаты получены лично автором. Использованные в работе материалы имеют ссылки на литературные источники.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и приложения. Работа изложена на 145 страницах, включая 47 рисунков и 7 таблиц. Список литературы включает 100 наименований. Приложение занимает 24 страницы.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснованы актуальность темы, научная новизна и практическая ценность диссертации, дано краткое изложение содержания глав работы.

В первой главе рассмотрены вопросы, возникающие при формулировке и применении конечных элементов с учетом деформаций поперечного сдвига. Ставится задача построения простого, эффективного и надежного треугольного КЭ, имеющего в узлах инженерные степени свободы. Излагается современное состояние проблемы, обсуждаются известные подходы к преодолению избыточной жесткости КЭ, такие как сокращенное и выборочное интегрирование, повышение порядка аппроксимирующих полиномов, применение различных аппроксимаций для углов поворота и перемещений при получении соотношений КЭ, балансировка энергий. Отмечается, что эти методы являются по сути эвристическими. Рассматриваются так же КЭ на основе

смешанных вариационных принципов и формулировки, основанные на суперпозиции энергий изгибной и сдвиговой деформаций.

Анализируется механизм возникновения избыточной жесткости при построении изгибных КЭ с учетом деформаций поперечного сдвига. Показано, что техника разделения энергий при формулировке соотношений для КЭ, позволяет устранить источник возникновения избыточной жесткости, связанный со "смешиванием" энергий, и открывает новые возможности построения различных типов КЭ, работоспособных в широком диапазоне относительных толщин.

Во второй главе изложен метод разделения уравнений линейной теории оболочек и пластин с учетом поперечных сдвигов на основе вариационной формулировки задачи [1]. Его идея состоит в том, что к классическому решению Кирхгофа-Лява добавляются некоторые поправки, для определения которых предлагается простая вариационная формулировка, допускающая эффективное использование МКЭ.

При разделении уравнений сдвиговой теории будем исходить из функционала энергии для линейных задач ортотропных оболочек:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{(F)} (T_1 \varepsilon_1 + T_2 \varepsilon_2 + S \omega + N_1 \gamma_1 + N_2 \gamma_2 + M_1 \kappa_1 + M_2 \kappa_2 + 2H\tau) dF - \int_{(F)} \bar{P} \bar{U} dF - \int_{(\Gamma)} (\bar{T}_v \bar{U} + \bar{M}_v \bar{\Psi}) dS, dF = A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2. \quad (1)$$

Здесь T_i, S, N_i, M_i, H ($i=1,2$) - погонные усилия и моменты в оболочке; $\varepsilon_i, \omega, \gamma_i, \kappa_i, \tau$ - общепринятые обозначения мембранных, сдвиговых и изгибных деформаций; $\bar{U}, \bar{\Psi}$ - векторы смещений и углов поворота; $\bar{P}, \bar{T}_v, \bar{M}_v$ - интенсивности внешних нагрузок на поверхности F и граничном контуре Γ .

В рамках кинематической модели Тимошенко для деформаций волокон эквидистантной поверхности $z=const$ имеем:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1 + z\kappa_1, \quad \varepsilon_{12} = \omega + 2z\tau, \quad \varepsilon_{33} = \gamma_1, \quad \gamma_1 = \psi_1 - \theta_1, \\ \theta_1 = -1/A_1 \partial w / \partial \alpha_1 + u/R_1, \quad (1 \leftrightarrow 2, \quad u \leftrightarrow v).$$

Соотношения упругости примем в форме:

$$T_1 = B_1(\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2), \quad S = B_2 \omega, \quad M_1 = D_1(\kappa_1 + \nu \kappa_2), \quad H = 2D_2 \tau, \quad N_1 = C_1 \gamma_1, \quad B_1 = E_1 h / (1 - \nu_1 \nu_2), \\ B_2 = G_{12} h, \quad D_1 = G_{12} h^3 / 12, \quad D_2 = E_1 h^3 / 12(1 - \nu_1 \nu_2), \quad C_1 = G_{13} h,$$

где B_i, C_i, D_i ($i=1,2$) - физические константы материала.

В соответствии с методом разделения уравнений сдвиговой теории [1], будем представлять составляющие напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочек в виде линейных комбинаций классического решения Кирх-

гофа-Лява, компоненты которого содержат индекс "0", и некоторых конечных возмущений - поправок к основному состоянию за счет учета деформаций поперечного сдвига с индексом "1".

Полагая

$$u = u^0 + u', \quad w = w^0 + w', \quad \psi_i = \psi_i^0 + \psi_i', \quad (1 \leftrightarrow 2, \quad i \leftrightarrow v) \quad (2)$$

и выполняя подстановку формул (2) в основные соотношения теории оболочек с учетом поперечных сдвигов, найдем

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \varepsilon_i^0 + \varepsilon_i', \quad \omega = \omega^0 + \omega', \quad \kappa_i = \kappa_i^0 + \kappa_i', \quad \tau = \tau^0 + \tau' \\ T_i &= T_i^0 + T_i', \quad S = S^0 + S', \quad M_i = M_i^0 + M_i', \quad H = H^0 + H' \end{aligned} \quad (3)$$

Для поперечных сдвигов и перерезывающих сил, пользуясь гипотезой Кирхгофа-Лява, получим

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \psi_i - \theta_i, \quad \gamma_i^0 + \gamma_i' = (\psi_i^0 + \psi_i') - (\theta_i^0 + \theta_i'), \quad \gamma_i^0 = 0, \quad \psi_i^0 = \theta_i^0, \quad \gamma_i' = \psi_i' - \theta_i', \\ N_i &= C_i \gamma_i, \quad N_i = C_i (\gamma_i^0 + \gamma_i'), \quad N_i = C_i \gamma_i' \end{aligned} \quad (4)$$

Равенства (3), (4) позволяют представить функционал энергии (1) в форме

$$\Pi(u, v, w, \psi_1, \psi_2) = \Pi^0 + \Pi' + \Pi'', \quad (5)$$

где Π', Π'' - соответственно линейный и квадратичный функционал относительно возмущений $u', v', w', \psi_1', \psi_2'$.

Пользуясь методом перемещений, будем рассматривать компоненты основного состояния $u^0, v^0, w^0, \psi_1^0, \psi_2^0$ в качестве приближенного решения задачи теории оболочек. Под ее точным решением будем понимать обобщенные перемещения u, v, w, ψ_1, ψ_2 , которые минимизируют функционал полной энергии (1). При таком подходе дифференциальные уравнения для возмущений получим из вариационного уравнения Э.Треффца

$$\delta(\Delta \Pi) = \delta(\Pi - \Pi^0) = \delta(\Pi' + \Pi'') = 0. \quad (6)$$

Реализация условия стационарности функционала (6) при независимых вариациях $\delta u', \delta v', \delta w', \delta \psi_1', \delta \psi_2'$ приводит к уравнениям Эйлера для возмущений

$$\frac{\partial A_2 T_1'}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1^2 S'}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_2' + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{A_1 H'}{R_1} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} H' + \frac{A_1 A_2}{R_1} (N_1 - Q_1^0) = 0,$$

$$\frac{T_1'}{R_1} + \frac{T_2'}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial A_2 (N_1 - Q_1^0)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 (N_2 - Q_2^0)}{\partial \alpha_2} \right] = 0,$$

$$N_1 - Q_1^0 - \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial A_1 M_1'}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1^2 H'}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_2' \right] = 0,$$

$$Q_1^0 = \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial A_2 M_1^0}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1^2 H^0}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_2^0 \right], (1 \leftrightarrow 2) \quad (7)$$

и краевым условиям к ним.

Система дифференциальных уравнений для возмущений не содержит внешних нагрузок в явном виде. Их роль выполняют перерезывающие силы основного состояния Q_1^0 и их производные, которые считаются известными из решения соответствующей задачи Кирхгофа-Лява для оболочки.

Изложенный подход к разделению уравнений теории оболочек с учетом поперечных сдвигов может быть полностью использован при рассмотрении соотношений сдвиговой теории пластин. Учитывая, что НДС в линейной теории пластин разделяется на безмоментное и чисто моментное, остановимся далее на задаче изгиба прямоугольной пластины с учетом поперечных сдвигов. Пластина нагружена нормальным давлением $p_n = p$ и краевыми усилиями N_{ik} , M_{ik} , H_k , ($i=1,2$). Дифференциальные уравнения и краевые условия для возмущений с учетом предельного перехода $R_1 \rightarrow \infty$, $R_2 \rightarrow \infty$, найдем из уравнений (7) в декартовых координатах $\alpha_1 = x$, $\alpha_2 = y$, $A_1 = A_2 = 1$:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + p = 0, \quad N_1 - Q_1^0 - \frac{\partial M_1'}{\partial x} - \frac{\partial H'}{\partial y} = 0, \quad (i=1,2), \quad (8)$$

$$l=\pm 1: \quad (M_1^0 - M_{1k} + M_1') \delta \psi_1' = 0, \quad (H^0 - H_k + H') \delta \psi_2' = 0, \quad (9)$$

$$(N_1^0 - N_{1k}) \delta w' = 0, \quad (1 \leftrightarrow 2, \quad ik \leftrightarrow jk, \quad k \rightarrow m).$$

Здесь l, m - направляющие косинусы нормали к граничному контуру Γ .

Можно показать, что для трансверсально изотропного материала система уравнений (8) приводит к уравнениям в перемещениях:

$$\nabla^2 w' + \frac{\partial \psi_1'}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2'}{\partial y} = -\frac{p}{Gh}, \quad \nabla^2 \left(\frac{\partial \psi_1'}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2'}{\partial y} \right) = 0, \quad \Omega^2 \left(\frac{\partial \psi_2'}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1'}{\partial y} \right) = 0,$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Omega^2 = [D(1-\nu)/2Gh\nabla^2] - 1 \quad (10)$$

и с помощью функции $\Phi(x,y)$ при $\psi_1' = \partial \Phi / \partial x$, $\psi_2' = \partial \Phi / \partial y$, существенно упрощается

$$\nabla^2 w' = -p/Gh, \quad (11)$$

$$\Omega^2 \nabla^2 \Phi = 0. \quad (12)$$

Таким образом, для сдвиговой теории изгиба пластин исходная система уравнений (10) для возмущений w' , ψ_1' , ψ_2' , имеющая шестой порядок, распадается на два независимых дифференциальных уравнения: второго порядка

относительно возмущений прогибов w' и четвертый порядок относительно поправок к углам поворота ψ'_1, ψ'_2 .

При однородных краевых условиях, которые имеют место для всех случаев, кроме нагружения свободного края пластины распределенным крутящим моментом H_k , дифференциальное уравнение (12) имеет тривиальное решение

$$\psi'_1 = \psi'_2 = 0. \quad (13)$$

С учетом (13) общие граничные условия (9) к уравнению (11) полностью разделяются, и определение возмущений w' сводится к краевой задаче:

$$\nabla^2 w' = -p / Gh, \quad l = \pm 1: \left(Gh \frac{\partial w'}{\partial x} - N_{lk} \right) \delta w' = 0, \quad (1 \leftrightarrow 2, \quad x \leftrightarrow y, \quad k \leftrightarrow m). \quad (14)$$

Функционал приращения полной энергии $\Delta\Pi$ для этой задачи существенно упрощается и принимает вид [1]:

$$\Delta\Pi = \int_{(F)} \left[\frac{1}{2} \left(N_1 \frac{\partial w'}{\partial x} + N_2 \frac{\partial w'}{\partial y} \right) - pw' \right] dF - \int_{(\Gamma)} (N_{lk} l + N_{2k} m) w' dS. \quad (15)$$

Прогибы основного состояния, соответствующего теории Кирхгофа определяются из уравнения С.Жермен $\nabla^2 \nabla^2 w^0 = p / D$. Суммарные прогибы w для сдвиговой теории находятся согласно уравнению (2) $w = w^0 + w'$.

Вариационное уравнение (6) для функционала (15) является основой для разработки конечно-элементного подхода к исследованию НДС тонких оболочек, дискретизация которых осуществляется плоскими КЭ. Одним из достоинств предлагаемого подхода является возможность расчета основного состояния с помощью достаточно точных известных конечных элементов, построенных на основе классической теории Кирхгофа-Лява. Конечные элементы для вычисления поправки, вносимой за счет учета деформаций поперечного сдвига, формулируются на основе функционала (15). Решение задачи достигается за два этапа: на первом этапе разыскиваются прогибы системы по классической теории, на втором - поправки к ним. Результирующий вектор перемещений получается суммированием двух решений.

Вариационный подход в соответствии с уравнением (6) приводит к полному разделению энергий изгиба и сдвига при использовании МКЭ.

Применение подхода иллюстрируется аналитическим решением задачи изгиба шарнирно опертой прямоугольной пластины под действием давления.

В третьей главе реализован конечно-элементный подход к разделению уравнений сдвиговой теории пластин и оболочек. Ставится задача применения простых треугольных КЭ, удовлетворительных в смысле точности и времени формирования матриц жесткости на ЭВМ ограниченной производи-

тельности. Следуя методике, предложенной в главе 2, параметры основного и возмущенного состояний вычисляются отдельно, с помощью различных конечных элементов [1].

На основе обзора достижений в области КЭ анализа изгиба тонких пластин, для расчета параметров основного состояния была выбрана формулировка КЭ на основе дискретной гипотезы Кирхгофа. В главе с помощью САВ Reduce 3.3, в явном виде получены соотношения для матрицы жесткости КЭ, основанного на дискретной гипотезе Кирхгофа и имеющего девять степеней свободы, что позволяет сократить время формирования матрицы жесткости элемента $\approx$ на 20%.

Для вычисления поправок, вызванных учетом деформации поперечного сдвига, применялся простейший треугольный элемент с линейной аппроксимацией перемещений w (Рис.1), полученный на основе вариационного принципа для компонент возмущений (15). Предлагаемый КЭ удовлетворяет необходимому условию сходимости решения при сгущении сетки - постоянству деформаций при смещениях КЭ как жесткого целого. Из представленных результатов тестирования следует, что КЭ поправки демонстрирует монотонную сходимость и точность до 7% в широком интервале относительных толщин и модулей сдвига.

Произведен анализ работоспособности изложенной в главе 2 методики на основе оценки сходимости численного решения тестовых задач изгиба пластин. Обсуждается точность результатов по сравнению с аналитическими решениями и решениями, полученными с помощью известных конечных элементов. Представлены графики зависимости относительной погрешности вычисления прогиба в центре для трансверсально изотропных шарнирно опертых квадратной (рис.2-а) и круговой (рис.2-б) пластин, защемленной по контуру и круговой пластины (рис.2-с) под действием равномерно распределенного давления при различных относительных толщинах и модулях поперечного сдвига.

Анализ результатов решения тестовых задач изгиба пластин показывает, что техника разделения жесткостей на изгиб и поперечный сдвиг приводит к хорошим результатам для широкого диапазона относительных толщин и модулей поперечного сдвига. Это свидетельствует об эффективности предложенного подхода и значительной степени его универсальности при решении данного класса задач.

В четвертой главе рассмотрен расчет подкрепляющих элементов силового набора и аспекты применения САВ для вывода матриц жесткости и устойчивости КЭ тонкостенных конструкций.

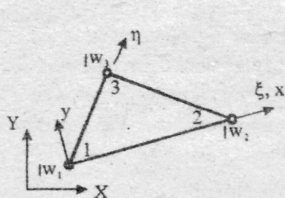


Рис.1

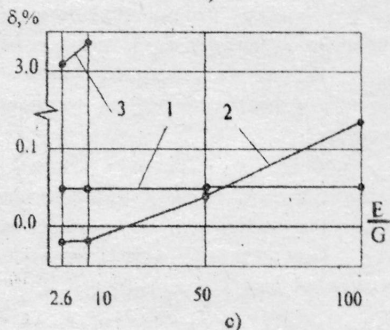
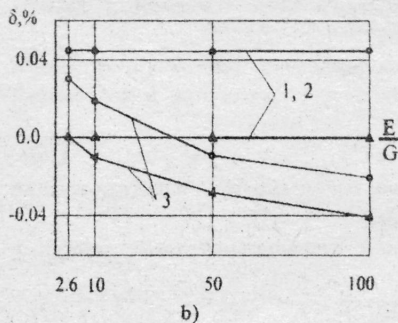
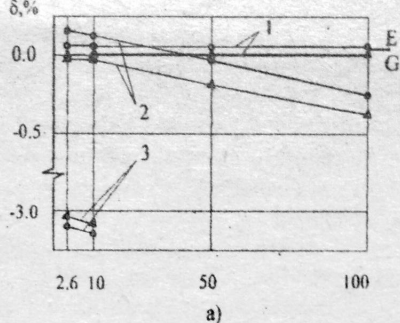


Рис.2. Относительная погрешность определения прогиба в центре пластины. Относительная толщина: 1, 2, 3 - $h/a = 0.001, 0.01, 0.1$ соответственно.

▲—▲ КЭ поправки + точное решение в рядах;
 ○—○ КЭ поправки + КЭ решение

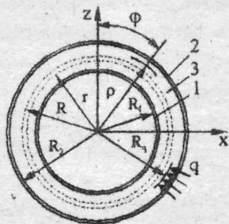
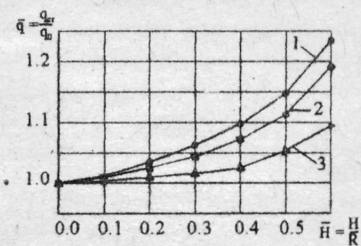


Рис.3



Получено аналитическое решение задачи определения критической нагрузки потери устойчивости тонкостенного шпангоута большой высоты с учетом переменности метрических свойств окружающих волокон в радиальном направлении и характера приложения внешнего гидростатического сжатия [2], позволяющее оценить при каких геометрических размерах шпангоута необходимо производить расчеты по полученным зависимостям.

Шпангоут состоит из поясов "1", "2", работающих на растяжение-сжатие, и тонкой стенки "3", сопротивляющейся деформации сдвига и радиальному обжатию полотна (рис.3).

Напряженно-деформированное состояние стенки рассматривается как задача плоской теории упругости для ортотропного материала с механическими свойствами $E_2=0$, $E_3 \rightarrow \infty$, $G \rightarrow \infty$, $\nu_{23}=0$.

Исходя из двумерных физических уравнений для такого материала, придем к непротиворечивым соотношениям для напряжений и деформаций стенки:

$$\sigma_{22} = 0, \quad \epsilon_{23} = \epsilon_{33} = 0, \quad (16)$$

эквивалентные в своей кинематической части гипотезе плоских сечений Бернулли-Эйлера для тонкостенного кольца.

При решении задачи устойчивости воспользуемся геометрическими зависимостями

$$\epsilon_{22} = e_{22} + \frac{1}{2} \omega_1^2, \quad \epsilon_{33} = e_{33} + \frac{1}{2} \omega_1^2, \quad \epsilon_{23} = e_{23}. \quad (17)$$

Здесь e_i , ω_k ($i, j=2, 3; k=1$) - удлинения, сдвиги и повороты, вычисляемые по формулам

$$e_{22} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial v}{\partial \phi} + w \right), \quad e_{23} = \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial w}{\partial \phi} - v \right), \quad e_{33} = \frac{\partial w}{\partial \rho}, \quad 2\omega_1 = -\frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial w}{\partial \phi} - v \right), \quad (18)$$

где $v=v(\rho, \phi)$, $w=w(\rho, \phi)$ - компоненты вектора смещений.

Разыскивая решение системы дифференциальных уравнений (16) с учетом (17), (18) в виде линейного закона изменения перемещений по высоте кольца относительно положения нейтральной линии, получим приближенное решение уравнений (16):

$$v = \hat{v} + z \hat{\theta}, \quad w = \hat{w} + z \frac{1}{2} \hat{\theta}^2. \quad (19)$$

Здесь $\hat{v}$, $\hat{w}$, $\hat{\theta} = -1/r (\partial \hat{w} / \partial \phi - \hat{v})$ - смещения и повороты на нейтральной линии кольца.

С помощью соотношений (19) и условий совместности деформирования поясов и стенки найдем относительные удлинения поясов шпангоута и положение нейтральной линии:

$$\varepsilon^{(1)} = \hat{e} + \frac{\hat{\theta}^2}{2} + \frac{R_1 - r}{R_1} \left[\frac{d\hat{\theta}}{d\varphi} - \hat{e} - \frac{\hat{\theta}^2}{2} \right], \quad \hat{e} = \frac{1}{r} \left(\frac{d\hat{v}}{d\varphi} + \hat{v} \right), \quad (1 \leftrightarrow 2).$$

Для получения уравнений равновесия шпангоута в деформированном состоянии воспользуемся вариационным уравнением Лагранжа

$$\delta \Pi = \delta W - \delta A = 0,$$

где Π - полная энергия, W - потенциальная энергия деформации шпангоута, A - работа гидростатического давления.

В результате преобразований, система нелинейных уравнений равновесия шпангоута принимает вид:

$$L_1 + qr \left[\bar{R} \hat{\theta} + (\bar{R} - 1) \hat{\theta} \left(\frac{d\hat{\theta}}{d\varphi} - \hat{e} \right) \right] = 0,$$

$$L_2 + qr \left[\bar{R}(1 + \hat{e}) + (\bar{R} - 1) \left(\frac{d\hat{\theta}}{d\varphi} - \hat{e} - \frac{\hat{\theta}^2}{2} \right) - (\bar{R} - 1) \frac{d(\hat{\theta}\hat{e})}{d\varphi} \right] = 0, \quad (20)$$

$$L_1 = (S^{(1)} + S^{(2)}) \hat{\theta} - \frac{1}{r} \frac{d}{d\varphi} [S^{(1)}(R_1 - r) + S^{(2)}(R_2 - r)] - \frac{d}{d\varphi} (S^{(1)} - S^{(2)}),$$

$$L_2 = (S^{(1)} + S^{(2)}) - \frac{d}{d\varphi} \left\{ (S^{(1)} + S^{(2)}) \hat{\theta} - \frac{1}{r} \frac{d}{d\varphi} [S^{(1)}(R_1 - r) + S^{(2)}(R_2 - r)] \right\}.$$

Линеаризуем уравнения (20) и разыскивая их решение в форме

$$e_1 = A \sin n\varphi, \quad \theta_1 = B \cos n\varphi,$$

придем к аналитическому решению для критического давления:

$$\bar{q} = \frac{q_{cr}}{q_0} = \left(1 - \frac{\bar{H}^2}{4} \right)^{-2} \left[1 - \frac{(n^2 - 1) \bar{R} (\bar{R} - 1) \bar{H}^2}{4n^2} \left(1 - \frac{\bar{H}^2}{4} \right)^{-1} \right], \quad (21)$$

где $q_0 = (n^2 - 1) E J / R^3$, $\bar{H} = H / R$, $R = (R_1 + R_2) / 2$, $\bar{R} = R_1 / r$, R_q - радиус приложения гидростатического давления.

Результаты вычислений критического давления для шпангоута большой высоты по формуле (21) с учетом эксцентрического приложения нагрузки представлены на рис.4. Полученные результаты свидетельствуют о целесообразности учета переменности метрических свойств шпангоутов большой высоты при $\bar{H} \geq 0.2$.

В главе рассмотрен подход к созданию различных типов КЭ для задач прочности и устойчивости балок, пластин и оболочек с использованием САВ [3,4]. Предлагаемый аналитический метод позволяет получать на основе ва-

риационных принципов теории упругости методически правильные КЭ в перемещениях при произвольном варианте деформационных гипотез. Благодаря выполнению громоздких преобразований с помощью САВ открывается возможность оперативного построения и выбора новых типов КЭ в рамках поставленной задачи. Это позволяет сосредоточить внимание исследователя на наиболее ответственном начальном этапе создания КЭ и освободить его от рутинного труда при проведении выкладок.

Сформулирован конечный элемент силового набора, работающий на растяжение-сжатие, изгиб и сдвиг в двух плоскостях и кручение. Представлены результаты решения тестовых задач.

В пятой главе методом конечного элемента решены практически важные задачи, поставленные в НПО "Астрофизика" и ЦНИИСМ. Исследованы прогибы секции зеркала крупногабаритного телескопа под действием собственного веса при различных условиях его закрепления на опорах и определена критическая нагрузка потери устойчивости подкрепленного отсека КЛА при осевом сжатии.

Секция телескопа имеет шестигранную форму и состоит из ферменной конструкции, на которую опирается зеркало. Общий вид и габаритные размеры приведены на рис.5. Стержни фермы изготовлены из углепластика КМУ-2У: $E=140$ ГПа, $F=10^{-4}$ м², $\rho=1400$ кг/м³, материал зеркала - ситалл: $E=100$ ГПа, $\nu=0.3$, $h_2=0.02$ м, $\rho=2460$ кг/м³.

Ставилась задача определить необходимые размеры стержней фермы для обеспечения требуемой жесткости и места расположения опор (варианты 1 - на верхнем поясе фермы, 2,3 - на нижнем поясе фермы; рис.5), при которых среднеквадратичное отклонение (СКО) прогиба секции, закрепленной в трех точках, не будет превышать установленное значение.

При определении необходимой длины стержня, расчеты проводились по континуальной модели. Ферменная конструкция и зеркало представлялись слоистой пластиной с интегральными характеристиками. Поскольку жесткостные характеристики слоев оказались существенно разными, расчеты производились с учетом деформаций поперечного сдвига в рамках гипотезы "ломанной нормали". Из анализа максимальных прогибов при нескольких вариантах КЭ дискретизации пластины было установлено, что сходимость решения достигается при сетке, изображенной на рис.5. Необходимая длина стержня составила ≈ 0.20 м.

Уточненные расчеты производились по дискретной модели при трех возможных вариантах расположения опор (рис.5). Применялись конечные элементы пластины из глав 3 и 4. Установлено, что вариант №3 расположения опор является наилучшим с точки зрения СКО деформированной поверх-

ности зеркала. Кроме этого, форма искаженной поверхности зеркала допускает дополнительную корректировку с помощью адаптивного привода. Картины прогибов конструкции секции зеркала телескопа под действием весовой нагрузки в направлении оси Z глобальной системы координат изображены на рис.6.

Отсек КЛА представляет собой ортогональный каркас, состоящий из равномерно расположенных трех шпангоутов и восьми стрингеров двутаврового сечения и тонкой оболочки. Размеры отсека: $L=0.67$ м, $\varnothing=0.67$ м. Конструкция изготовлена из углепластика на основе ткани УТ-900-2.5 и связующего марки ЭХД-Ф. Для подкрепляющих элементов двутаврового сечения, полученных прессованием, материал имеет характеристики: $E=120.0$ ГПа и $G=34.0$ ГПа. На каркас укладывается оболочка из той же ткани и имеющей упругие характеристики: в направлении основы $E_f=85.0$ ГПа и утка $E_s=73.0$ ГПа, $\nu_{12}=0.23$ и углом укладки слоев $\varphi=\pm 45^\circ$ в 10 слоев. Толщина слоя ткани ≈ 0.3 мм.

Ставилась задача определить критическую нагрузку потери устойчивости отсека при осевом сжатии. Расчеты проводились с помощью КЭ из глав 3, 4 в рамках бифуркационной теории потери устойчивости. Разделение НДС на основное и возмущенное состояния в задачах устойчивости не имеет места и здесь не производилось. Обобщенная проблема на собственные значения решалась методами Ланцоша и обратных итераций.

Форма потери устойчивости ортогонального каркаса без обшивки под действием осевой сжимающей нагрузки представлена на рис.7. Граничные условия - шарнирное опирание по торцевым шпангоутам. Критическая нагрузка, приходящаяся на один стрингер равна $T_{\text{сж}}=6.4932 \times 10^3$ Н и соответствует нагрузке потери устойчивости защемленного стрингера в плоскости с меньшим моментом инерции ($T_c=6.48138 \times 10^3$ Н с учетом поперечного сдвига). Несколько завышенное значение нагрузки возможно из-за изгиба в двух плоскостях, вследствие совместной работы стрингеров и шпангоута.

Минимальная критическая нагрузка потери устойчивости отсека $T_c=1.1862 \times 10^5$ Н/м соответствует неосесимметричной форме, изображенной на рис.8. Сжимающая нагрузка в этом случае воспринимается оболочкой и продольными элементами. Поперечные элементы повышают устойчивость оболочки и стрингеров. Кроме этого оболочка воспринимает сдвигающую нагрузку и препятствует скручиванию конструкции.

Значение критической нагрузки $T_c^I=1.2534 \times 10^5$ Н/м соответствует форме потери устойчивости части обшивки, опертой на подкрепляющие элементы под действием осевого сжатия, изображенную на рис.9. Это говорит о том, что

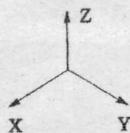
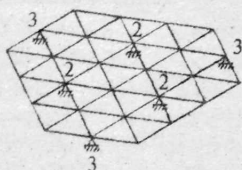
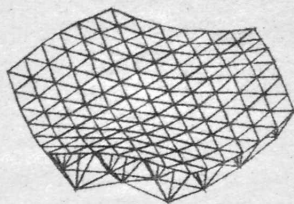
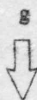
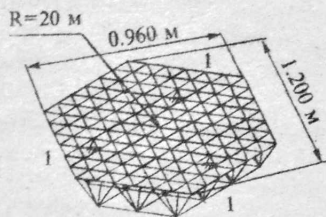


Рис.5

Рис.6

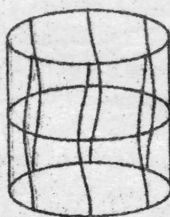


Рис.7

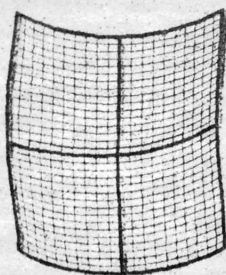


Рис.8

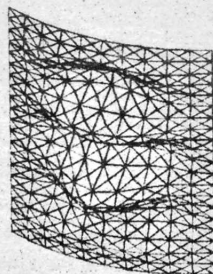


Рис.9

обшивка теряет устойчивость при более высокой нагрузке, чем конструкция отсека в целом.

Представлены результаты тестирования конечно-элементных моделей на задачах устойчивости, свидетельствующие о работоспособности предлагаемого программного комплекса.

В заключении приведены основные результаты и выводы по диссертационной работе:

- 1) Впервые разработан КЭ подход к анализу конструкций с учетом деформаций поперечного сдвига, основанный на разделении уравнений сдвиговой теории оболочек и пластин. В конечно-элементной форме сформулирован новый функционал энергии для вычисления поправок.
- 2) Показано, что применение этого подхода и простых КЭ, выведенных в диссертации, позволяет получать решения задач прочности и устойчивости в широком диапазоне относительных толщин и модулей E/G .
- 3) Предложен новый вариант применения САВ для вывода матриц жесткости и устойчивости КЭ, позволяющий получать на основе вариационных принципов методически правильные линеаризованные уравнения равновесия для КЭ метода перемещений.
- 4) Найдено точное аналитическое решение задачи устойчивости тонкостенного шпангоута большой высоты. В отличие от ранее известных результатов, это решение позволяет учесть переменность метрики по толщине и характер приложения внешнего сжатия.
- 5) Разработано программное обеспечение МКЭ для персональных ЭВМ на основе предложенной методики, и реализующее алгоритмы решения разреженных систем уравнений и обобщенной проблемы на собственные значения большой размерности.
- 6) Разработанные в диссертации подход, алгоритмы и программы, внедрены в расчетную практику НПО "Астрофизика", ЦНИИСМ и ИПриМ РАН и применялись при решении новых практически важных задач расчета деформированного состояния секции зеркала крупногабаритного телескопа и устойчивости отсека КЛА из композиционного материала.

Приложение содержит отлаженные тексты части программ, написанных автором и использованных при работе над диссертацией.

Основные результаты диссертации отражены в следующих работах:

1. Дячкин А.А. Конечно-элементный подход к разделению уравнений сдвиговой теории пластин и оболочек //XVI Международная конференция по проблемам оболочек: Тез. докладов. -Нижний Новгород, 1993. - С.28
2. Шаповалов Л.А., Дячкин А.А. Устойчивость тонкостенного кругового шпангоута с учетом эффекта кривого бруса при эксцентричном при-

ложении гидростатического сжатия // Вестник МГТУ. Машиностроение. - 1991. -N3. -С.101-107

3. Дячкин А.А., Парамонов В.В. Аналитический метод построения матриц конечных элементов в задачах строительной механики // Вестник МГТУ. Машиностроение. -1991. -N2. -С.29-36
4. Дячкин А.А., Парамонов В.В. Вывод конечных элементов в задачах статической прочности и устойчивости конструкций из композиционных материалов с применением систем аналитических вычислений // Космонавтика - XXI век : Аннотации докладов Международной молодежной научно-технической конференции. - Калининград, 1991. -С.22.

А. Дячкин

Заказ N 116

Объем 1 п.л.

Тираж 80 экз.

Типография МГТУ, 107005, Москва, Б-5, 2-я Бауманская ул., 5