

1562587

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМ. Н.Э. БАУМАНА

На правах рукописи

УДК 539.214

АЛЕКСАНДРОВА Нелли Николаевна

РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ АНАЛИЗА ПРОЦЕССОВ  
ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ  
ПРИ ОБРАБОТКЕ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ

Специальность: 01.02.04 – Механика деформируемого твёрдого тела

Автореферат  
диссертации на соискание учёной степени  
доктора технических наук

Москва 1999

*Н.А.Александрова*

Работа выполнена в Московском государственном  
техническом университете им. Н.Э. Баумана

Официальные оппоненты:

Доктор тех. наук, профессор Алюшин Ю.А.,  
Доктор тех. наук, профессор Непершин Р.И.,  
Доктор тех. наук, профессор Овчинников А.Г.

Ведущая организация:

ВНИИ Металлургического Машиностроения

Научный консультант: Доктор тех. наук, профессор Данилов В.Л.

Защита состоится 23 сентября 1999 г. в 14 30  
на заседании диссертационного совета Д053.15.08 при МГТУ

Москва, 2-я Бауманская ул., д.5.

библиотеке МГТУ им. Н.Э. Баумана.

1999,

та

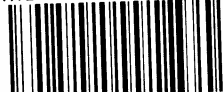
1562684

В.И. Дронг

**Актуальность темы.**

Работа посвящена развитию приближённого метода анализа процессов пластического деформирования и разрушения при обработке металлов давлением (ОМД) для различных моделей сред, включая кинетические уравнения эволюции внутренних переменных.

Актуальность работы определяют два основных фактора. Первый фактор связан с общей потребностью в приближённых методах. Действительно, применение численных методов к анализу процессов ОМД, таких как метод конечных элементов, получившее в последнее время широкое распространение, требует критического подхода с точки зрения эффективности использования предлагаемых программных продуктов и компьютерного оборудования в целом. Любая постановка задачи в теории ОМД предполагает в качестве входных данных свойства материала (например, предел текучести) и закон взаимодействия инструмента и обрабатываемого материала (например, коэффициент трения). Эти входные данные должны быть определены экспериментально, что трудно выполнить с высокой степенью точности, особенно для сложных моделей материала. Погрешности измерений будут влиять на точность результата вычислений. Поэтому достоинство численных методов приводить к высокоточным решениям математических задач и работать с моделями любой степени сложности не приводит к повышению точности решения технологической задачи, но требует огромных затрат машинного времени на реализацию программы. Это говорит о том, что изначальная точность постановки задачи ОМД не согласуется с той высокой степенью точности решения результирующих уравнений, которая может быть достигнута при использовании численных методов. Кроме того, одной из главных проблем при разработке и использовании компьютерных программ является необходимость контроля за ошибками различной природы, полный анализ которых предполагает трудоёмкую процедуру, основанную на аналитическом решении тестовой задачи. Концептуальные ошибки в определении самих математических моделей процесса часто остаются нераспознанными и частично компенсируются ошибками дискретизации и введением большого числа параметров в модель, что может дать подходящие для конкретного процесса, но неверные результаты. Поэтому для решения широкого класса проблем ОМД необходимо совместное использование приближённых и численных методов, особенно, при оптимизации процессов, когда требуется решение обратной задачи. Исследовать оптимизационную задачу без знания



предварительной информации о процессе и с использованием моделей материала, которые обычно рекомендуются в коммерческих программах, невозможно. Следовательно, естественный путь решения таких задач – найти первое приближение простыми методами, определить из него наиболее важные параметры и, затем, в окрестности предварительно полученного набора оптимальных параметров, решить задачу численным методом с целью получения детальной информации о процессе. Примером такого подхода является теория идеальных течений, которая преобрела в последнее время широкое распространение.

Второй фактор связан с отсутствием такого приближённого метода анализа процессов ОМД, который бы позволял оценить степень повреждаемости материала при обработке. Наиболее широко распространённый в настоящее время метод верхней оценки имеет ряд существенных ограничений, особенно, применительно к установившимся процессам. Поэтому представляется целесообразным разработать метод, достаточно простой в приложении и позволяющий получать основные характеристики процесса, требуемые поставщиками оборудования, производителем готового продукта и его потребителями.

#### **Целью работы является:**

- разработка единого подхода к анализу широкого класса задач ОМД, ориентированного на анализ разрушения;
- исследование свойств решений вблизи поверхностей трения и разрывов скорости для корректной постановки краевых задач;
- развитие критерия разрушения, основанного на концепции диаграммы пластичности;
- экспериментальная проверка критерия разрушения;
- применение полученных теоретических и экспериментальных результатов к решению конкретных задач ОМД.

Общей целью диссертации является развитие эффективных инженерных методов исследования процессов ОМД применительно к современным требованиям производства.

#### **Научная новизна работы определяется следующим:**

1. Разработан метод определения параметров поля течения в двумерных установившихся процессах ОМД с учётом кинетических уравнений для произвольного числа внутренних переменных.

2. Исследовано поведение решений вблизи поверхности максимального трения для различных моделей материала, применяемых в теории ОМД.
3. Предложен метод учёта разрывов скорости в модели жёстко-пластического упрочняющегося материала.
4. Проведён анализ постановки некоторых задач в зависимости от выбора закона трения.
5. Установлен и экспериментально проверен новый критерий разрушения, основанный на концепции диаграммы пластичности.
6. Разработан теоретико-экспериментальный метод анализа разрушения на свободной поверхности образца.
7. Развита эффективный подход к оптимизации процесса волочения.

#### **Практическая ценность работы состоит**

- в разработке единого приближённого метода к анализу процессов пластического деформирования и разрушения при ОМД с учётом кинетических уравнений эволюции внутренних переменных для достаточно произвольного класса материалов;
- в установлении нового критерия разрушения при больших деформациях;
- в создании оптимизационной программы расчёта процесса волочения.

Полученные результаты могут быть использованы при разработке режимов технологических процессов ОМД с целью получения заданных свойств изделий.

**Достоверность результатов** обеспечивается последовательным применением общих принципов механики деформируемого твёрдого тела при разработке методов расчёта процессов ОМД; сопоставлением теоретических результатов с известными экспериментальными данными; постановкой собственного эксперимента.

**Апробация работы.** Основные результаты исследований, содержащихся в диссертации, докладывались на

- семинарах кафедры РК-5 МГТУ им.Баумана (Москва, Россия, 1995-1999);

- семинаре по механике университета г. Нови-Сад (Нови-Сад, Югославия, 1995, 1997);
- тринадцатом симпозиуме по инженерным приложениям в механике (Онтарио, Канада, 1996);
- третьей международной конференции по дефектам материалов в процессе их обработки (Кашан, Франция, 1997);
- третьей международной конференции по механике твёрдого тела (Стокгольм, Швеция, 1997);
- семинаре по механике технического университета г. Гановер (Гановер, Германия, 1997);
- пятой международной конференции по проблемам усталости и разрушения (Краков, Польша, 1997);
- межгородской школе «Современные проблемы механики и прикладной математики» (Воронеж, Россия, 1998);
- семинаре по механике технического университета г. Ржешев (Ржешев, Польша, 1998).

Диссертационная работа в целом докладывалась и получила одобрение на семинаре по механике в университете г. Нови-Сад (Нови-Сад, Югославия, 1997); городском семинаре по механике (Воронеж, Россия, 1998); семинаре кафедры РК-5 МГТУ им.Баумана (Москва, Россия, 1998).

**Публикации.** По материалам выполненных исследований опубликовано 15 работ, а также сдано в печать 10 работ.

**Структура и объём работы.** Диссертация состоит из введения, 7 глав, заключения, списка литературы и приложений. Работа изложена на 331 странице машинописного текста, содержащего 69 рисунков, 8 таблиц и 4 приложения. Библиографический список включает 295 наименований литературных источников.

Автор благодарит доктора физико-математических наук, ведущего сотрудника ИПМ РАН Александрова Сергея Евгеньевича за формирование общего направления исследований, неоценимую научную и организационную помощь, особенно, на заключительной стадии работы, и доктора технических наук, профессора Данилова Владимира Львовича за постоянное внимание и помощь во время совместной работы.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе обосновывается актуальность рассматриваемой проблемы и определяются главные направления работы.

Постоянно возрастающая цена материалов и энергии, а также тенденция к гибкому производству, делают необходимым углубленное изучение механики процесса деформирования и улучшение дизайна оборудования. Следовательно, важной частью любого метода анализа процессов ОМД является оказание содействия инженеру в разработке процесса деформирования для получения изделий с заданными свойствами. Наиболее важными проблемными областями, на которые должны быть ориентированы методы исследования, являются: разработка оптимального метода определения напряженно-деформированного состояния (НДС) в очаге деформации; постановка корректных краевых условий, в том числе законов внешнего трения и условий на жёстко-пластических границах (корректность краевых условий зависит от модели материала и метода определения НДС); формулировка уравнений, описывающих эволюцию внутренних переменных, в том числе переменных, определяющих условия разрушения (для некоторых моделей материала формулировка таких уравнений тесно связана как с методом определения НДС, так и с формулировкой краевых условий).

Основополагающими работами в этих направлениях являются монографии Тарновского И.Я., Качанова Л.М., Губкина С.И., Смирнова-Аляева Г.А., Колмогорова В.Л., Огородникова В.А., Томлёнова А.Д., Малинина Н.Н., Степанского Л.Г., Хилла Р., Сегала В.М., Деля Г.Д., Гуна Г.Я., Громова Н.П., Ковалёва С.И., Друянова Б.А., Непершина Р.И., Полухина П.И., Гуляева Ю.Г., Avitzur B., Johnson W., Hosford W.F. и др.

Без упрощений и аппроксимаций в постановке проблемы, точные решения существуют только для некоторых модельных задач. В большинстве же случаев, задачи ОМД решаются приближёнными аналитическими и численными методами, выбор которых зависит от сделанных упрощений в постановке задачи и цели исследования.

Исторически первым приближённым методом, направленным на решение задач прокатки тонких полос, сложился метод тонких сечений. В настоящее время он продолжает использоваться ввиду простого математического аппарата, способности учитывать широкий класс моделей материала и произвольные законы трения. С его помощью получают интегральные характеристики в задачах волочения проволоки и труб; задачах листовой прокатки, а также в некоторых других приложениях. Однако, с помощью этого метода нельзя получить распределения напряжений, деформаций и внутренних переменных по сечению элемента.

Наиболее популярным методом для анализа процессов ОМД является метод верхней оценки, который в настоящее время широко используется как при получении аналитических решений, так и при разработке компьютерных программ. Этот метод основан на строгих математических принципах и даёт надёжные результаты, получаемые с помощью чётко определенной последовательности шагов. Однако, метод верхней оценки ограничен узкими рамками выполнения соответствующего экстремального принципа.

Обобщением метода верхней оценки для учёта произвольных свойств материала, различных типов трения и непредписанной заранее геометрии поверхности является метод Хилла. В отличие от метода верхней оценки, метод Хилла позволяет получать распределение среднего напряжения в очаге деформации для несжимаемых материалов, тем самым открывая путь для анализа разрушения в рамках самого метода. Таким образом, метод Хилла свободен от недостатков как метода верхней оценки, так и метода тонких сечений и объединяет в себе преимущества обоих методов. Тем не менее, ввиду трудностей математического плана и значительного объёма вычислений для получения конечного результата, метод Хилла не получил к настоящему времени должного распространения и развития, в то время как его идеи и принципы положены в основу широко известного метода конечных элементов, который, по существу, является его частной разновидностью.

Главная цель диссертации заключается в развитии метода Хилла и создании на его основе единого подхода к анализу процессов пластического деформирования и разрушения при ОМД для различных моделей сред, включая эволюцию внутренних переменных. Пластическое разрушение при этом может оцениваться двумя способами: с помощью параметра повреждаемости, вносимого непосредственно в уравнения состояния материала (связная задача) и с помощью критерия разрушения, применяемого к напряжённо-деформированному состоянию "бездефектного" материала в очаге деформации (несвязная задача). Первый способ связан с развитием кинетических уравнений эволюции параметра повреждаемости. Однако, следует отметить, что для инженерных приложений решения, основанные на моделях структурного разрушения, достаточно сложны. Кроме того, весьма трудоёмкими являются эксперименты по определению параметров, входящих в эти модели. Поэтому в инженерной практике, как правило, используется второй способ оценки пластического разрушения. В диссертации этот способ реализован в виде нового критерия разрушения, основанного на концепции диаграммы пластичности. Критерий имеет особые преимущества при исследовании разрушения, возникающего на свободной

поверхности образца, и по точности предсказания разрушения не уступает хорошо известному критерию Колмогорова.

Во второй главе разработан приближённый метод решения задач ОМД в квазистатической постановке для установившихся течений изотропного несжимаемого материала, подчиняющегося закону течения

$$\epsilon_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\epsilon_{eq}}{\sigma_{eq}} s_{ij}, \quad (1)$$

где  $\epsilon_{ij}$  - компоненты тензора скорости деформаций;  $s_{ij}$  - компоненты тензора девиатора напряжений;  $\epsilon_{eq}$  - эквивалентная скорость деформаций, вычисляемая по формуле  $\epsilon_{eq} = \sqrt{2/3}(\epsilon_{ij}\epsilon^{ij})^{1/2}$ ;  $\sigma_{eq}$  - эквивалентное напряжение, вычисляемое по формуле  $\sigma_{eq} = \sqrt{3/2}(s_{ij}s^{ij})^{1/2}$ . Уравнение (1) определяет широкий класс моделей материала, традиционно используемых для анализа процессов ОМД. При  $\sigma_{eq} = \text{const}$ , уравнение (1) определяет идеально жёстко-пластический материал. Если  $\sigma_{eq}$  - известная функция  $\epsilon_{eq}$ , то из (1) следует класс моделей материала со свойствами ползучести, вязко-пластичности и сверхпластичности. Полагая, что  $\sigma_{eq}$  является функцией от внутренних переменных, таких как упрочнение и повреждаемость, можно построить модели жёстко-пластического упрочняющегося материала и жёстко-пластического материала с повреждаемостью.

Основная идея развиваемого метода принадлежит Хиллу и является, в некотором смысле, вариантом метода Галёркина, учитывающим особенности задач теории ОМД.

Рассмотрим кинематически допустимое поле скорости  $v_j$ , удовлетворяющее кинематическим граничным условиям и уравнению несжимаемости. Это поле скорости и уравнение (1) определяют девиаторные компоненты тензора напряжений,  $s_{ij}$ . Чтобы получить точное решение задачи, компоненты  $s_{ij}$  и среднее напряжение  $\sigma$  должны удовлетворять уравнениям равновесия и статическим граничным условиям. Без учёта массовых сил, уравнения равновесия и статические граничные условия выполняются, если следующее равенство

$$\iiint_V p^{ij} \epsilon_{ij} dV = \iint_S t^j u_j dS, \quad \sum_{i,j=1}^3 \quad (2)$$

справедливо для всех виртуальных полей скорости  $u_j$ , которые непрерывны и непрерывно дифференцируемы. Здесь  $p^{ij}$  - действительное поле напряжений, которое кусочно-непрерывно дифференцируемо в объёме

очага деформации  $V$ ;  $S$  – поверхность, ограничивающая объём  $V$ ;  $\varepsilon_{ij}$  – поле скорости деформаций, вычисленное по полю скорости  $u_j$ ;  $t^j$  – кусочно-непрерывное поле поверхностных сил. Кинематически допустимое поле скорости может зависеть от некоторого набора произвольных функций. В общем случае, это поле не содержит действительное поле скорости и, следовательно, уравнение (2) не может быть удовлетворено для произвольного поля  $u_j$ . Однако, из (2) можно получить приближённые уравнения равновесия, число которых равно числу неизвестных функций в кинематически допустимом поле скорости.

Процедура получения приближённых уравнений равновесия состоит в замене произвольного виртуального поля скорости  $u_j$  в (2) на ортогонализирующее движение,  $w_j$ , которое содержит столько же произвольных функций, сколько и кинематически допустимое поле скорости,  $v_j$ . Действительное поле напряжений,  $p^{ij}$ , при этом заменяется на приближённое,  $\sigma^{ij}$ , которое может не удовлетворять всем статическим граничным условиям задачи. Решение этих уравнений полностью определяет приближённое решение задачи.

В диссертации разрабатывается вариант, когда поле  $w_j$  совпадает по форме с  $v_j$ , но содержит другие произвольные функции тех же аргументов. В этом случае, компоненты тензора напряжений в объёмном интеграле уравнения (2) должны быть заменены соответствующими компонентами девиатора, поскольку поле  $w_j$  соленоидальное. Девиаторные компоненты вычисляются согласно (1) и кинематически допустимому полю скорости (так что эти компоненты теперь зависят от произвольных функций, входящих в определение кинематически допустимого поля скорости).

Применяя вариационную технику, уравнение (2) преобразуется к сумме интегралов, подинтегральное выражение в каждом из которых состоит из произведения произвольной функции, входящей в формулировку поля скоростей  $w_j$ , и некоторого выражения, содержащего произвольные функции и их производные, входящие в определение поля скорости  $v_j$ . Так как функции, входящие в формулировку  $w_j$ , произвольны, то коэффициенты при  $w_j$  должны быть равны нулю, что приводит к уравнениям относительно функций, входящих в формулировку кинематически допустимого поля скорости.

Из этой процедуры не определяется среднее напряжение,  $\sigma$ , так как  $w_j$  удовлетворяют условию несжимаемости. Чтобы вычислить  $\sigma$ , необходимо выбрать дополнительное поле  $w_j$  с неизвестными функциями, число которых согласуется с предположениями, сделанными относительно распределения среднего напряжения. При этом основная процедура определения произвольных функций, входящих в  $\sigma$ , не изменяется.

В диссертационной работе показано, что для многих установившихся процессов ОМД приведённый выше подход наиболее удачно реализуется в специальной ортогональной системе координат  $\alpha\beta$ , в которой  $\alpha$ -линии совпадают с линиями тока, а линии  $\beta = 0$  и  $\beta = 1$  совпадают с поверхностями инструмента. В частном случае линия  $\beta = 0$  совпадает с осью симметрии. Отметим, что при плоском течении поля вектора скорости (действительного и кинематически допустимого) являются квазипотенциальными, что позволяет ввести такую координатную систему без всяких ограничений. В системе координат  $\alpha\beta$  проекция скорости  $v_\beta = 0$  и проекция  $v_\alpha$ , которую будем обозначать  $v$ , определяется из условия несжимаемости в виде

$$v = v_0(\beta)/h_\beta, \quad v_0(\beta) > 0 \quad (3)$$

где  $h_\beta$  - параметр Ламе линии  $\beta$  и  $v_0(\beta)$  - произвольная функция от  $\beta$ . Физические компоненты тензора скорости деформаций, соответствующие полю (3), вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial v}{\partial \alpha} = -\frac{v_0(\beta)}{h_\beta^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}, \quad \varepsilon_{\beta\beta} = \frac{v}{h_\alpha h_\beta} \frac{\partial h_\beta}{\partial \alpha} = -\varepsilon_{\alpha\alpha}, \\ \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2h_\alpha h_\beta} \left( h_\alpha \frac{\partial v}{\partial \beta} - v \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \right) = \\ &= \frac{1}{2h_\beta} \left[ \frac{1}{h_\beta} \frac{dv_0(\beta)}{d\beta} + v_0(\beta) \left( \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - \frac{1}{h_\beta^2} \frac{\partial h_\beta}{\partial \beta} \right) \right] \end{aligned} \quad (4)$$

где  $h_\alpha$  - параметр Ламе линии  $\alpha$  и  $\varphi$  - угол наклона к оси  $x$  касательной к  $\alpha$ -линии, отсчитываемый от оси  $x$  против хода часовой стрелки.

Если напряжения не входят в кинетические уравнения эволюции внутренних переменных, то последние решаются с использованием (4). Например, накопленная пластическая деформация  $e_{eq}$  является одним из основных параметров упрочнения. Так как  $de_{eq}/dt = \varepsilon_{eq}$ , то, согласно определению полной производной, имеем

$$\frac{\partial e_{eq}}{\partial \alpha} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{h_\alpha}{v} \sqrt{\varepsilon_{\alpha\alpha}^2 + \varepsilon_{\alpha\beta}^2} \quad (5)$$

Уравнение (5) может быть проинтегрировано в системе координат  $\alpha\beta$ .

Задавая для конкретного процесса форму линий тока и подставляя (4) в (1), приходим к распределению девиаторных компонент тензора напряжений. Функция  $v_0(\beta)$ , входящая в (3), должна быть определена согласно описанной выше процедуре или из граничных условий для скоростей.

Остановимся на деталях вывода приближённого уравнения для определения среднего напряжения  $\sigma$ , предполагая, что кинематически допустимое поле скорости известно. Отметим, что  $\sigma$  является произвольной функцией от  $\alpha$  и  $\beta$  и для её вычисления имеется два уравнения равновесия. Чтобы получить замкнутую систему уравнений, необходимо сделать некоторые предположения. Введём функцию  $p(\alpha)$  интегралом

$$p(\alpha) = \int_0^1 \sigma(\alpha, \beta) d\beta \quad (6)$$

и удовлетворим точно уравнению равновесия

$$\frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + \frac{1}{h_\alpha h_\beta} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} (\sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\alpha\alpha}) + \frac{1}{h_\beta} \frac{\partial \sigma_{\beta\beta}}{\partial \beta} + \frac{2\sigma_{\alpha\beta}}{h_\alpha h_\beta} \frac{\partial h_\beta}{\partial \alpha} = 0$$

в пластической зоне  $BB_1AA_1$ , где линии  $BB_1$  и  $AA_1$  соответствуют линиям  $\alpha = \text{const}$  (Рис.1).

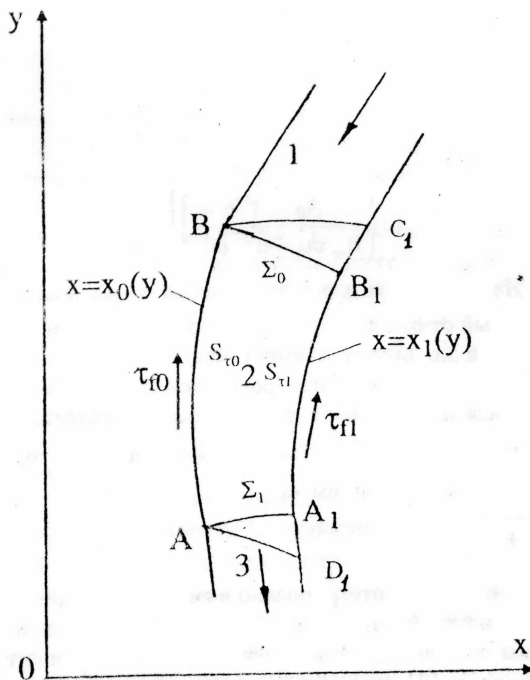


Рис. 1. Схема плоского течения материала в сходящемся канале.

Тогда

$$\sigma = \int_0^{\beta} I_1(\alpha, x) dx - (s_{\beta\beta} - s_{\beta\beta \perp \beta=0}) + \sigma_{\perp \beta=0} \quad (7)$$

где

$$I_1(\alpha, \beta) = h_{\beta} \left( \frac{1}{h_{\alpha}} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} (s_{\beta\beta} - s_{\alpha\alpha}) - \frac{1}{h_{\alpha}} \frac{\partial s_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} - \frac{2s_{\alpha\beta}}{h_{\beta}} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right)$$

Подставляя (7) в (6), находим

$$p(\alpha) = \int_0^1 \int_0^{\beta} I_1(\alpha, x) dx d\beta - \int_0^1 s_{\beta\beta} d\beta + s_{\beta\beta \perp \beta=0} + \sigma_{\perp \beta=0} \quad (8)$$

Ортогонализующее движение,  $w_j$ , соответствующее (6), должно содержать произвольную функцию  $\alpha$ ,  $W(\alpha)$ . Зададим его в следующей форме

$$w_{\alpha} = W(\alpha)/h_{\beta}, \quad w_{\beta} = 0 \quad (9)$$

Подставляя (9) в (2), получим

$$\frac{dp(\alpha)}{d\alpha} = \int_0^1 \left( h_{\alpha} I(\alpha, \beta) - \frac{\partial s_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} \right) d\beta + \tau_{f0} \left( \frac{h_{\alpha}}{h_{\beta}} \right)_{\perp \beta=0} + \tau_{f1} \left( \frac{h_{\alpha}}{h_{\beta}} \right)_{\perp \beta=1} \quad (10)$$

где

$$I(\alpha, \beta) = \frac{1}{h_{\beta}} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} (s_{\beta\beta} - s_{\alpha\alpha}) + s_{\alpha\beta} \left( \frac{1}{h_{\alpha}} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - \frac{1}{h_{\beta}^2} \frac{\partial h_{\beta}}{\partial \beta} \right);$$

$\tau_0$  и  $\tau_1$  обозначают величины произвольных сил трения, действующих на поверхностях  $\beta = 0$  и  $\beta = 1$  соответственно. Из (8) и (10) следует уравнение для определения функции  $\sigma_{\perp \beta=0}$ .

Уравнения, аналогичные (10), имеют место в областях  $BB_1C_1$  и  $AA_1D_1$  (Рис.1). Для этих областей пределы интегрирования в уравнении (7) зависят от  $\alpha$ . Вид зависимости определяется формой жёстко-пластических границ. Несмотря на различные виды записи, функция  $p(\alpha)$  является непрерывной во всей пластической зоне.

Граничное условие к уравнению (10) (или соответствующему уравнению в областях  $BB_1C_1$  и  $AA_1D_1$ ) следует из интегрального условия равновесия жёстких зон. При этом учитываются возможные разрывы скорости на жёстко-пластических границах.

Если среднее напряжение входит в кинетические уравнения эволюции внутренних переменных, которые, в свою очередь входят в закон течения (1), то уравнение (10) должно решаться совместно с кинетическими уравнениями.

В третьей главе метод, аналогичный изложенному в главе 2, разработан для осесимметричных установившихся течений. В этом случае уравнения, соответствующие (3)-(5) и (7)-(10), в системе координат  $\alpha\theta\beta$  имеют следующий вид

$$v = v_0(\beta)/(rh_\beta), \quad v_0(\beta) > 0$$

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial v}{\partial \alpha} = -\frac{v_0(\beta)}{(rh_\beta)^2} \left( h_\beta \cos \varphi + r \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right), \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{v}{rh_\alpha} \frac{\partial r}{\partial \alpha} = \frac{v_0(\beta) \cos \varphi}{r^2 h_\beta},$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\beta\beta} &= \frac{v}{h_\alpha h_\beta} \frac{\partial h_\beta}{\partial \alpha} = \frac{v_0(\beta)}{rh_\beta^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2h_\alpha h_\beta} \left( h_\alpha \frac{\partial v}{\partial \beta} - v \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \right) = \\ &= \frac{1}{2rh_\beta} \left[ \frac{1}{h_\beta} \frac{dv_0(\beta)}{d\beta} + v_0(\beta) \left( \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - \frac{1}{h_\beta^2} \frac{\partial h_\beta}{\partial \beta} + \frac{\sin \varphi}{r} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial e_{eq}}{\partial \alpha} = \sqrt{\frac{2}{3} (\varepsilon_{\alpha\alpha}^2 + \varepsilon_{\theta\theta}^2 + \varepsilon_{\beta\beta}^2 + 2\varepsilon_{\alpha\beta}^2)} \frac{h_\alpha}{v}$$

$$\sigma = \int_0^\beta I_1(\alpha, x) dx - (s_{\beta\beta} - s_{\beta\beta}|_{\beta=0}) + \sigma_{\beta=0}$$

где

$$I_1(\alpha, \beta) = h_\beta \left[ \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} (s_{\beta\beta} - s_{\alpha\alpha}) - \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial s_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} - s_{\alpha\beta} \left( \frac{2}{h_\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \frac{\cos \varphi}{r} \right) + \frac{\sin \varphi}{r} (s_{\beta\beta} - s_{\theta\theta}) \right]$$

$$p(\alpha) = \int_0^1 \int_0^\beta I_1(\alpha, x) dx d\beta - \int_0^1 s_{\beta\beta} d\beta + s_{\beta\beta}|_{\beta=0} + \sigma_{\beta=0}$$

$$w_\alpha = W(\alpha)/(rh_\beta), \quad w_\theta = w_\beta = 0$$

$$\frac{dp(\alpha)}{d\alpha} = \int_0^1 \left( h_\alpha I(\alpha, \beta) - \frac{\partial s_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} \right) d\beta + \tau_{r0} \left( \frac{h_\alpha}{h_\beta} \right)_{\beta=0} + \tau_{r1} \left( \frac{h_\alpha}{h_\beta} \right)_{\beta=1}$$

В четвертой главе рассмотрены вопросы моделирования граничных условий внешнего трения и корректности постановок задач ОМД при применении принципа минимума (метода верхней оценки) для различных моделей материала.

Трение, как правило, присутствует во всех процессах ОМД. При выборе закона трения возникает ряд проблем, связанных как с физической природой трения, так и с его математическим представлением. В частности, теорема о верхней оценки, техника работы с которой близка к предлагаемому методу, не применима во многих инженерных приложениях из-за вида закона трения.

Для достаточно общей модели материала (1) введём функцию эквивалентной скорости деформации,  $W(\epsilon_{eq})$ , в виде

$$s_{ij} = \partial W / \partial \epsilon_{ij} \quad (11)$$

При квазистатическом нагружении и в отсутствии массовых сил, принцип виртуальной мощности записывается в виде

$$\iiint_V \sigma^{ij} \delta \epsilon_{ij} dV = \iint_S t^j \delta u_j dS \quad (12)$$

где  $V$  обозначает очаг деформации, ограниченный поверхностью  $S$ ;  $\sigma^{ij}$  - компоненты тензора напряжений;  $s_{ij}$  - компоненты девиатора тензора напряжений;  $t^j$  - компоненты вектора поверхностных сил;  $\delta u_j$  - вариации компонент вектора скорости;  $\delta \epsilon_{ij}$  - вариации компонент тензора скорости деформаций, связанные с  $\delta u_j$  соотношениями

$$\delta \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial (\delta u_j)}{\partial x^i} + \frac{\partial (\delta u_i)}{\partial x^j} \right)$$

Подставляя (11) в (12), при заданной форме очага деформации получим

$$\delta \iiint_V W dV = \iint_S t^j \delta u_j dS \quad (13)$$

Так как  $\delta u_j = 0$  на части поверхности  $S$ , где заданы граничные условия в скоростях, то в поверхностном интеграле в (13) останутся только слагаемые, содержащие поверхностные силы  $t^j$ . Если эти силы не зависят от поля скорости, то символ вариации выносится за знак интеграла в правой части (13). В результате имеем

$$\delta L = \delta \left\{ \iiint_V W dV - \iint_S t^j u_j dS \right\} = 0$$

Можно показать, что  $\delta^2 L > 0$ . Следовательно, функционал  $L$  достигает минимального значения на действительном поле скорости  $u_j$ . Таким образом, для пластических материалов без учёта свойств вязкости, кинематически допустимое поле скорости позволяет оценить мощность подлежащих определению поверхностных сил и, во многих практических приложениях, получить верхнюю оценку предельной нагрузки, требуемую для деформирования материала. Однако, если эквивалентное напряжение,  $\sigma_{eq}$ , зависит от эквивалентной скорости деформаций,  $\epsilon_{eq}$ , то кинематически допустимое поле скорости приводит к верхней оценке функционала  $L$ , который, в общем случае, не выражается через мощность неизвестных поверхностных сил. Поэтому решения, основанные на минимизации функционала мощности для моделей материала, в которых  $\sigma_{eq}$  зависит от  $\epsilon_{eq}$ , являются некорректными. В диссертационной работе

приведён пример, допускающий аналитическое решение и показывающий, что существует кинематически допустимое поле скорости, для которого мощность внешних сил меньше, чем для действительного поля скорости.

Актуальным вопросом при выборе закона трения остаётся его согласованность с уравнениями состояния материала. Наибольший интерес представляет закон трения Прандтля. Как частный случай закона трения Прандтля, следует выделить закон максимального трения, определяющий границу между условиями прилипания и скольжения и, тем самым, обладающий особыми свойствами. Согласно этому закону, удельная сила трения при скольжении равна максимальному касательному напряжению, допускаемому материалом при данных условиях. В диссертационной работе выполнено исследование поведения решений вблизи поверхности максимального трения для различных моделей материала. Показано, что во многих случаях постановка граничного условия в виде закона максимального трения может быть заменена постановкой кинематического условия прилипания, что важно при выборе кинематически допустимого поля скорости (так как поведение действительного поля скорости вблизи поверхности трения известно).

На примере задачи о расширении со скручиванием полого цилиндра также установлено, что в предположении некоторых других граничных условий решение задачи может не существовать, в зависимости от соотношений между параметрами задачи. Анализ существования решения выполнен для различных моделей материала: идеально жёстко-пластического, жёстко вязко-пластического, сверхпластического и материала со свойствами ползучести. На рис.2 приведена зависимость максимального отношения заданных скоростей  $u_1/u_0$ , при котором существует решение задачи с условием прилипания, от геометрии цилиндра  $b_0/a_0$  для модели идеально жёстко-пластического материала. Здесь  $u_1$  и  $u_0$  - величины окружной и радиальной скоростей соответственно на внутреннем радиусе цилиндра;  $b_0$  и  $a_0$  - начальные внешний и внутренний радиусы цилиндра соответственно. Если  $(u_1/u_0) > (u_1/u_0)_{\max}$ , то необходимо предположить проскальзывание на внутреннем или внешнем радиусах цилиндра. В диссертации, однако, показано, что при постановке закона трения Кулона решение задачи при скольжении может отсутствовать. Для жёстко вязко-пластических материалов, материалов со свойствами ползучести и сверхпластичности решение с условием прилипания всегда существует, если уравнения состояния такие, что  $\sigma_{\text{eq}} \rightarrow \infty$ , когда  $\epsilon_{\text{eq}} \rightarrow \infty$ . Если же  $\sigma_{\text{eq}}$  ограничено при  $\epsilon_{\text{eq}} \rightarrow \infty$ , то решение может отсутствовать.

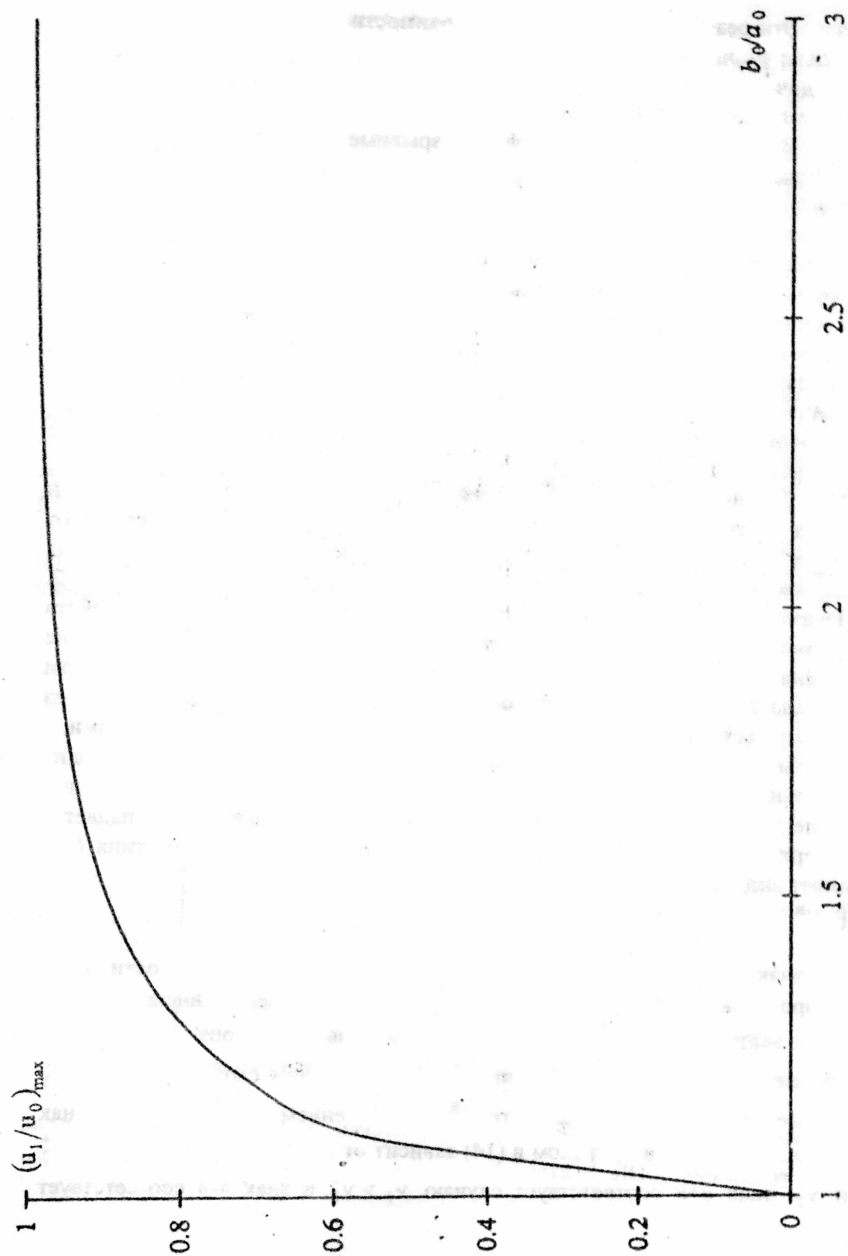


Рис. 2. Зависимость максимального отношения  $(u_1/u_0)_{\max}$  от  $b_0/a_0$ .

Эти результаты говорят о необходимости детального анализа любой поставленной задачи, особенно, перед использованием численных методов, так как в них факт существования решения предполагается заранее.

В пятой главе исследованы разрывные поля скорости. Так как на поверхностях разрыва скорости касательные напряжения достигают предела текучести при сдвиге, то результаты, полученные при анализе решений вблизи поверхности максимального трения, верны вблизи поверхности разрыва скорости. В связи с этим, в данной главе рассмотрен вопрос существования разрывных полей скорости в точной постановке для специальной модели упрочняющегося жёстко-пластического материала, соответствующей реальным свойствам некоторых материалов. Показано, что разрывы скорости могут существовать при величине пластических деформаций, реализующихся в традиционных процессах ОМД. Процедура введения разрывных полей скорости показана на примере решения двух задач: боковой экструзии и скручивания полого диска.

Для некоторых других моделей материала предложен приближённый метод учёта разрывов в кинематически допустимом поле скорости. Этот метод является существенным дополнением к методу определения напряжённо-деформированного состояния, разработанного в главе 2. Показано, что для жёстко-пластических материалов без учёта свойств вязкости разрывы скорости можно учесть в граничных условиях, не изменяя уравнений равновесия, если поверхность разрыва скорости совпадает с жёстко-пластической границей. В этом заключается одно из преимуществ предлагаемого метода по сравнению с другими подходами, в которых мощность, затрачиваемая на разрывах скорости, входит отдельным слагаемым в уравнение. Если разрыв скорости имеет место при входе материала в очаг деформации и поверхность разрыва совпадает с поверхностью  $\alpha = \text{const}$ , то граничное условие к уравнениям типа (10) имеет вид

$$\bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{v}}^R + \iint_{\Sigma} \sigma_{11} v_1 d\Sigma \pm k_0 \iint_{\Sigma} v_2^* d\Sigma = 0 \quad (14)$$

где знак «-» обозначает сторону поверхности разрыва скорости  $\Sigma$ , к которой примыкает жёсткая зона;  $\bar{\mathbf{F}}$  - приложенный вектор внешней силы;  $\bar{\mathbf{v}}^R$  - вектор скорости движения жёсткой зоны;  $k_0 = \text{const}$  - начальный предел текучести материала при сдвиге. Проекции скоростей  $v_1$  и  $v_2^*$  определяются вектором скорости  $\bar{\mathbf{v}}^R$  и положением поверхности  $\Sigma$ . Знак перед последним интегралом в (14) зависит от соотношений скоростей  $v_2^*$  и  $v_2^-$ : знак «+» соответствует случаю  $v_2^* > v_2^-$  и знак «-» соответствует

случаю  $v_2^+ < v_2^-$  (знак «+» обозначает сторону поверхности  $\Sigma$ , к которой примыкает пластическая зона). Для процесса волочения  $\bar{F} = 0$  и уравнение (14) преобразуется к виду

$$\iint_{\Sigma} \sigma_{11} v_1 d\Sigma \pm k_0 \iint_{\Sigma} v_2^- d\Sigma = 0 \quad (15)$$

Для плоского и осесимметричного случаев уравнение (15) в координатах  $\alpha\beta$  примет соответственно вид

$$\int_0^1 \sigma_{\alpha\alpha} v_{\alpha} h_{\beta} d\beta \pm k_0 \int_0^1 v_{\beta}^- h_{\beta} d\beta = 0$$

$$\int_0^1 \sigma_{\alpha\alpha} v_{\alpha} r h_{\beta} d\beta \pm k_0 \int_0^1 v_{\beta}^- r h_{\beta} d\beta = 0$$

При исследовании процесса экструзии уравнение (14) служит для определения величины  $\bar{F}$ .

Аналогичный вид имеют уравнения, если разрывы скорости имеют место на выходе материала из очага деформации и если поверхность разрыва не совпадает с поверхностью  $\alpha = \text{const}$ .

Шестая глава диссертации посвящена проблемам разрушения в процессах ОМД. В основу теоретической модели разрушения положена диаграмма пластичности (ДП), схематически показанная на рис.3.

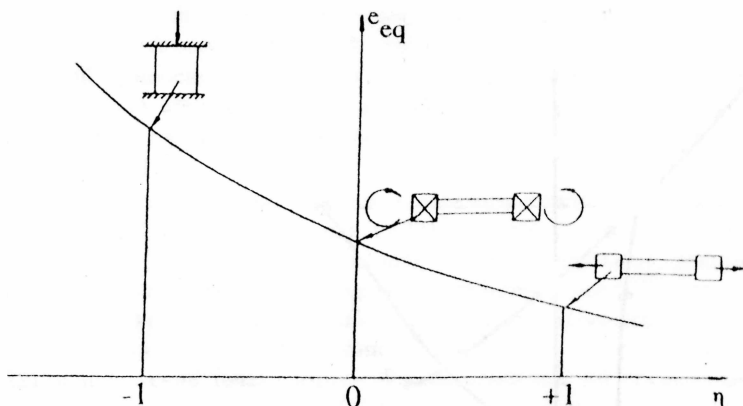


Рис. 3. Виды испытаний для построения диаграммы пластичности.

Здесь  $\epsilon_{eq}$  - накопленная пластическая деформация;  $\eta$  - показатель напряжённого состояния,  $\eta = 3\sigma/\sigma_{eq}$ . Эта ДП определяется

экспериментально при однородном напряжённо-деформированном состоянии материала. Для использования ДП при произвольном напряжённо-деформированном состоянии, в диссертации предлагается вместо  $\eta$  ввести следующую величину

$$\eta_{av} = \frac{1}{e_{eq}} \int_0^{e_{eq}} \eta de_{eq} \quad (16)$$

Очевидно, что  $\eta_{av} = \eta$  при однородном напряжённо-деформированном состоянии. Поэтому для такого состояния разрушение наступает, когда путь деформирования частицы (рис.4, кривая 6) пересекает ДП (точка 7). Для неоднородного напряжённо-деформированного состояния  $\eta_{av} \neq \eta$  и разрушение происходит в точке 4 реального пути деформирования 2 (в пространстве  $e_{eq} - \eta$ ). Теоретическая точка разрушения, полученная согласно предложенному критерию в пространстве  $e_{eq} - \eta_{av}$  (точка 5), находится на пересечении вспомогательного пути деформирования (кривая 1) с ДП.

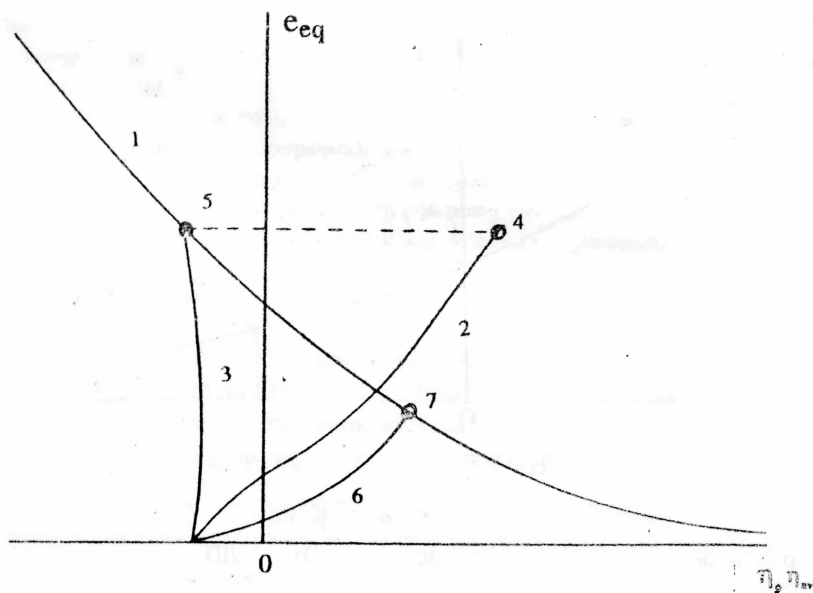


Рис. 4. Геометрическая интерпретация нового критерия разрушения.

Экспериментальная проверка критерия была проведена путём постановки собственных экспериментов и путём сравнения с экспериментальными данными Огородникова В.А. Результаты Огородникова В.А. для стали P12 и расчёты по предложенному критерию показаны на рис.5 (ДП – сплошная линия, квадраты – данные Огородникова В.А. и треугольники - расчёты).

Для проверки критерия были также поставлены собственные эксперименты по осадке полосы цилиндрическими бойками и по осевой осадке цилиндра сферическими бойками. Осадке, вплоть до разрушения, подвергали стальные образцы различного химического состава. После снятия нагрузок в момент появления первых трещин, которые наблюдались на свободной поверхности заготовок, других очагов деформации обнаружено не было. Для определения условий разрушения на свободной поверхности был разработан эффективный теоретико-экспериментальный метод, основанный исключительно на измерении деформаций свободной поверхности образца и, таким образом, позволяющий избежать выбора закона трения, который является наименее изученным звеном в моделировании процессов ОМД. Метод был применён к исследованию процесса осадки цилиндрических образцов, изготовленных из стали марки С1431 с химическим составом 0.35% С, 0.65% Мп (Югославский стандарт). Результаты вычислений представлены на рис.6 в виде квадратов. Сплошная линия обозначает ДП и кружки соответствуют точкам разрушения, полученным из стандартных видов испытаний: одноосного растяжения ( $\eta = 1$ ), кручения ( $\eta = 0$ ) и одноосного сжатия ( $\eta = -1$ ). Из рис. 6 видно, что построенные точки разрушения не только хорошо согласуются с общим видом ДП, но и дополняют её для значений  $\eta_{av} > 1$ .

В случае осадки призматических образцов с химическим составом 0.15% С, 0.45% Мп - сталь марки С1221 и 0.35% С, 0.65% Мп - сталь марки С1431 (Югославский стандарт), экспериментальные данные и разработанный теоретико-экспериментальный метод позволили применить предлагаемый критерий разрушения без предварительного теоретического анализа напряжённо-деформированного состояния. ДП для материала С1221 и положение точек разрушения, построенных по предлагаемому критерию для двух серий (100 и 200) образцов с разными геометрическими размерами, приведены на рис.7.

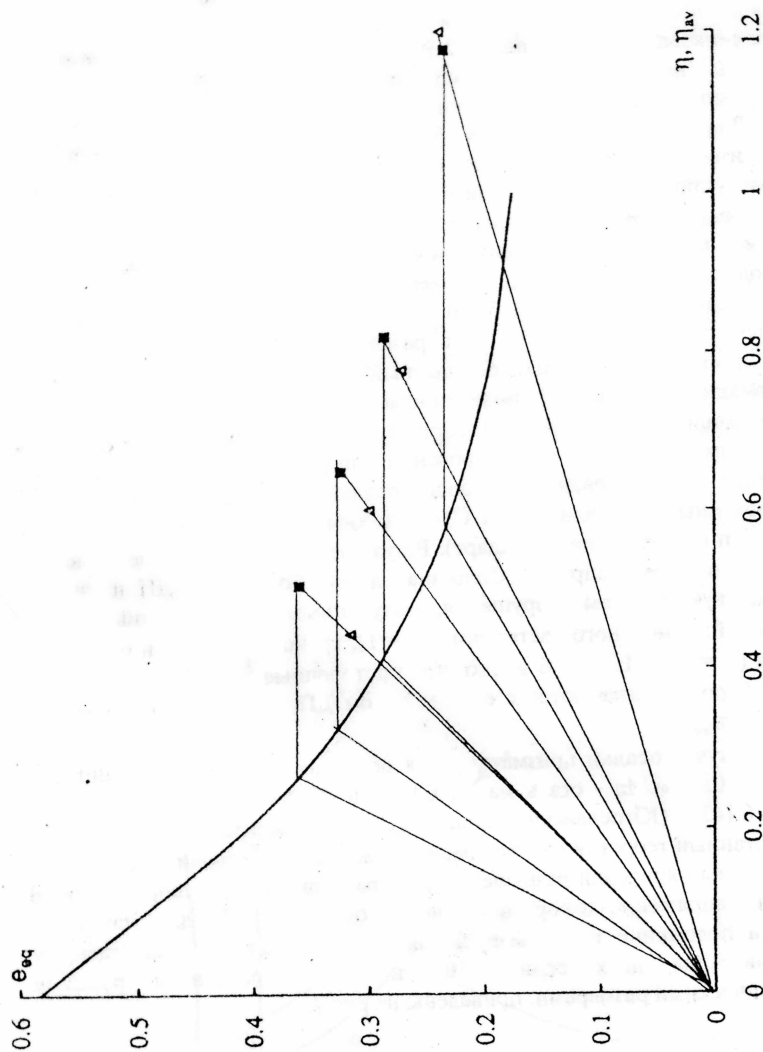


Рис. 5. Зависимость накопленной деформации от показателя напряжённого состояния для некоторых путей деформирования.

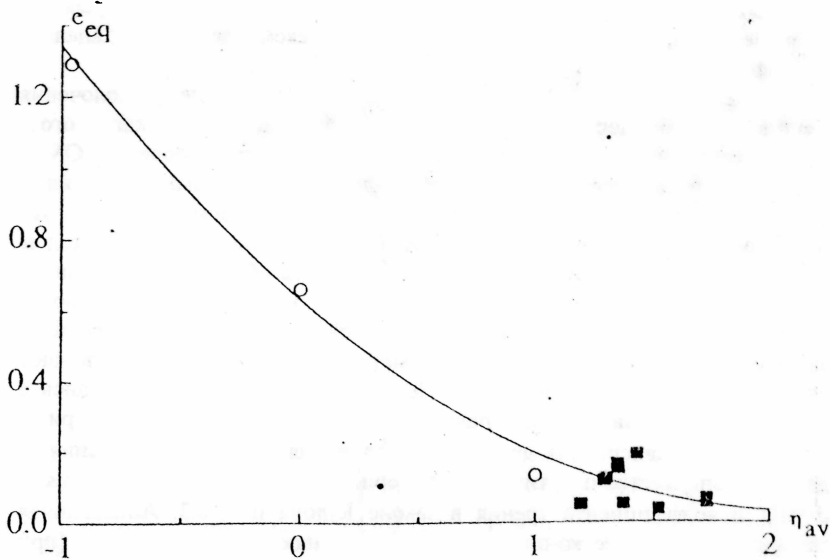


Рис. 6. Диаграмма пластичности для материала S1431 и точки разрушения.  
(■ настоящее исследование, ○ стандартные тесты,  
— аппроксимация полиномом второй степени)

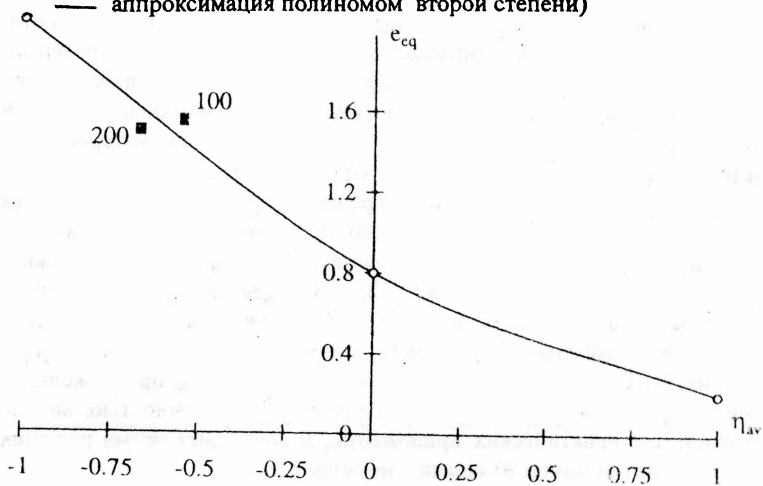


Рис. 7. Диаграмма пластичности для материала сталь S1221  
и точки разрушения.

Отсюда видно, что критерий достаточно точно определяет условия разрушения и, следовательно, может быть рекомендован для анализа процессов ОМД.

В седьмой главе на примере исследования процесса волочения прутка через коническую матрицу показаны достоинства предлагаемого в диссертации единого подхода к анализу установившихся процессов ОМД, включающего определение напряжённо-деформированного состояния в очаге деформации и прогнозирование разрушения. Несмотря на то, что постановка задачи хорошо известна, её решение новым методом позволило, путём сравнения результатов, оценить область рационального применения наиболее распространённых методов исследования, включая метод конечных элементов, и моделей материала. Полученные зависимости характерных параметров полностью отвечают экспериментальным наблюдениям. Необходимые расчёты проводились с использованием стандартного пакета «Математика» версии 3.0. На рис.8 представлена зависимость напряжения волочения,  $P$ , от угла волочения,  $\gamma$ , для идеально жёстко-пластического материала при коэффициенте вытяжки  $d = 1.1$  и коэффициенте трения в законе Кулона  $\mu = 0.3$ . Аналогичная зависимость для жёстко-пластического упрочняющегося материала (при коэффициенте вытяжки  $d = 1.1$  и различных коэффициентах трения) приведена на рис.9. Для этого же материала на рис.10 показана зависимость оптимального угла волочения,  $\gamma_{оп}$ , от коэффициента вытяжки при  $\mu = 0.3$ . Анализ разрушения проводился по диаграмме пластичности, определённой в главе 6, для оптимальных углов волочения с проверкой возникновения разрушения в центре образца, где обычно наблюдается образование дефектов. Диаграмма пластичности для материала С1431 и конечные точки вспомогательного пути деформирования для материальной частицы на оси симметрии при  $\mu = 0.5$  приведена на рис.11.

В результате анализа полученного решения предложена эффективная многоступенчатая процедура оптимизации процесса волочения: 1) Определение оптимального угла волочения на основе модели идеально-жёстко-пластического материала; 2) Определение напряжённо-деформированного состояния в очаге деформации на основе модели упрочняющегося жёстко-пластического материала с заданным законом упрочнения; 3) Проверка условия разрушения на основе предложенного критерия разрушения. Такой подход даёт результаты с точностью, вполне достаточной для практических приложений, и сокращает время решения обратной (оптимизационной) задачи в несколько раз.

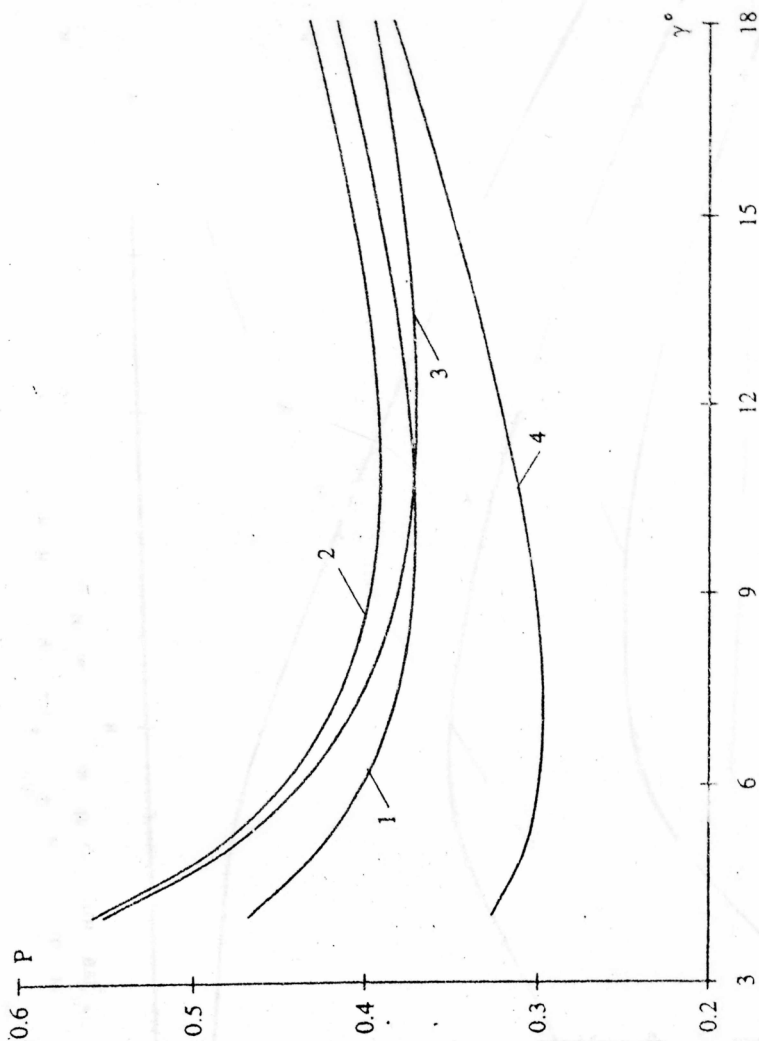


Рис. 8. Зависимость напряжения волоочения от угла волоочения для идеально жёстко-пластического материала при  $\mu = 0.3$  и  $d = 1.1$ . ( 1 - Зибель , 2 - Корбер , 3 - Томсен , 4 - Новое решение )

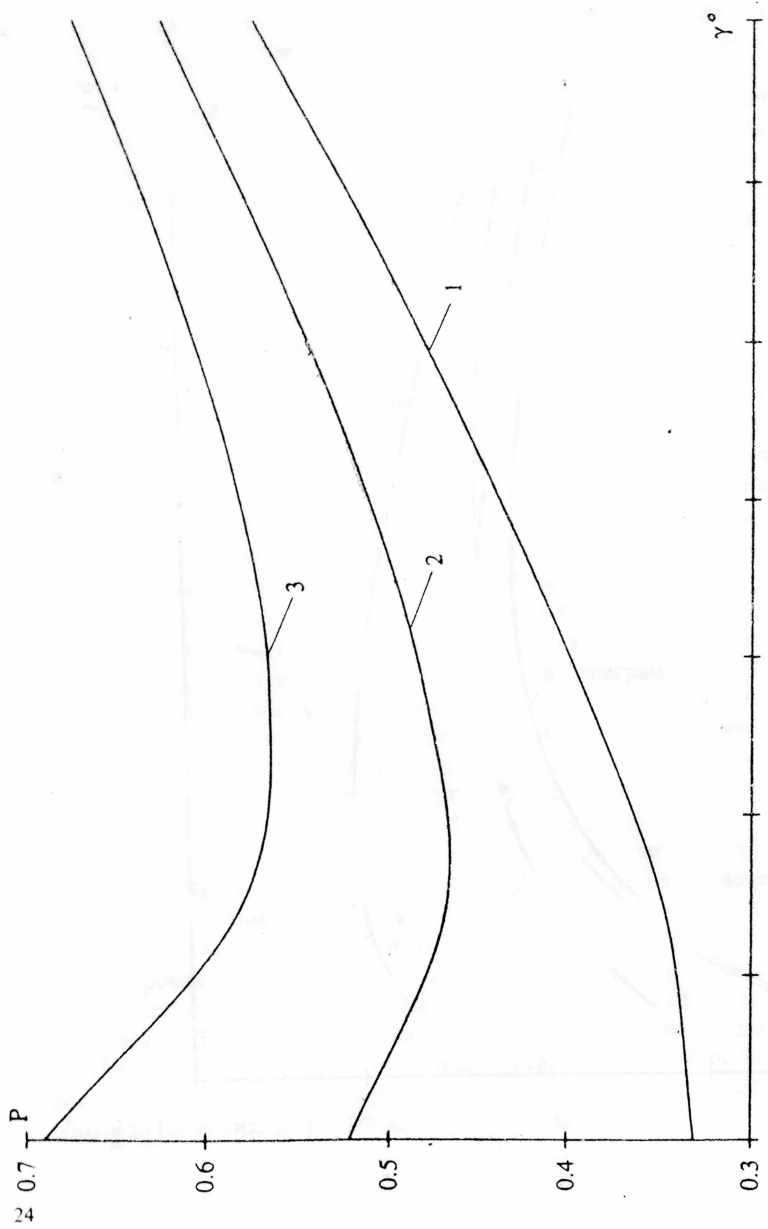


Рис. 9. Зависимость напряжения волочения от угла волочения для упрочняющегося жёстко-пластического материала при  $d = 1.1$ . (  $1 - \mu = 0.1$  ,  $2 - \mu = 0.3$  ,  $3 - \mu = 0.5$  )



Рис. 10. Зависимость оптимального угла волоочения от коэффициента вытяжки при  $\mu = 0.3$ .

( — с упрочнением , ..... без упрочнения )

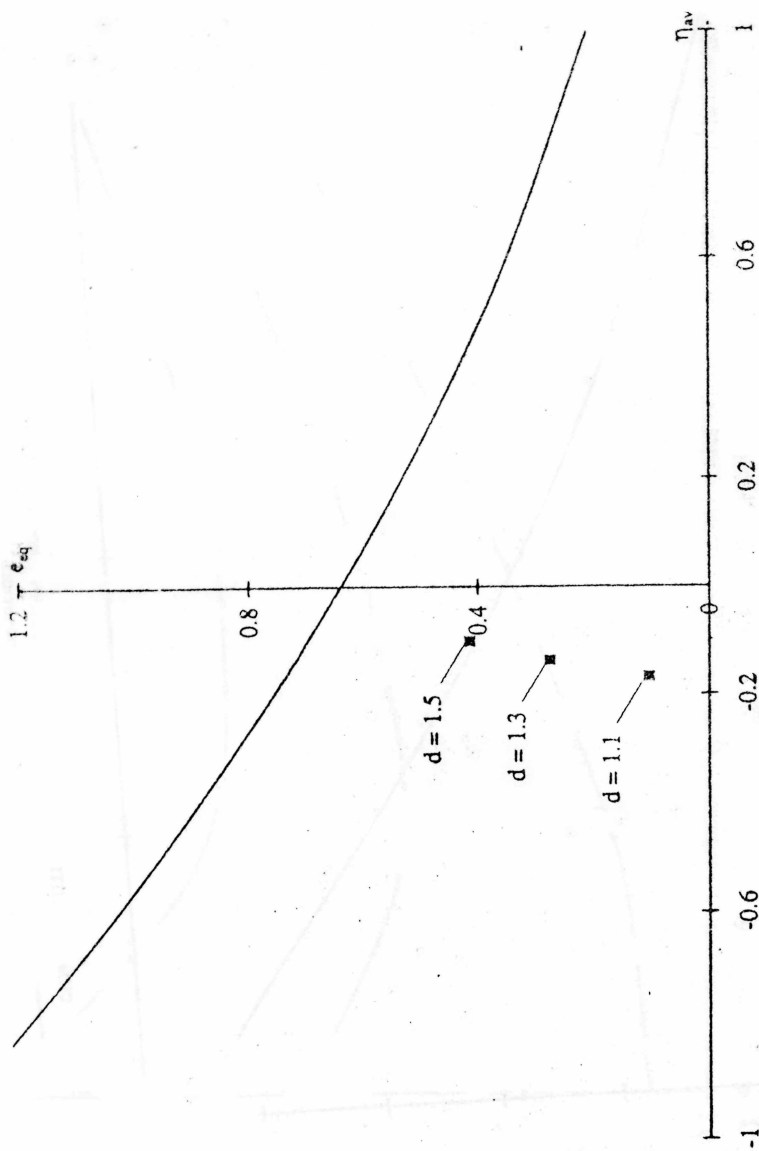


Рис. 11. Диаграмма пластичности для материала С1431 и конечные точки вспомогательного пути деформирования для материальной частицы на оси симметрии при  $\mu = 0.5$ .

В заключении сформулированы общие выводы по работе.

1. Разработана последовательная теория расчёта двумерных установившихся процессов ОМД для моделей материала с внутренними переменными. Теория основана на выводе приближённых уравнений равновесия, согласующихся с кинематически допустимым полем скорости.
2. Исследовано общее поведение решений вблизи поверхности максимального трения для моделей материала, которые широко применяются при анализе процессов ОМД. Показано, что в большинстве случаев на таких поверхностях должно выполняться условие прилипания.
3. Разработан метод учёта разрывов скорости в модели жёстко-пластического упрочняющегося материала.
4. Предложен и экспериментально проверен критерий разрушения, основанный на диаграмме пластичности. Разработан теоретико-экспериментальный метод определения условий разрушения на свободной поверхности образца.
5. Исследован процесс волочения круглого прутка предложенным методом. Определён оптимальный угол волочения. Результаты сравнены с распространёнными аналитическими формулами и конечно-элементными расчётами. Проведён анализ разрушения, основанный на предложенном критерии разрушения.
6. Разработаны доступные инженеру расчётные программы для оптимизации процесса волочения в стандартном пакете «Математика» версии 3.0.

Основное содержание работы изложено в следующих публикациях:

1. Alexandrov S., Chikanova N. Upper bound of torsion moment and fracture by rolling of three layer sandwich sheets // J. for technology of plasticity. - 1995. - V.20, No.1-2.- P.59-73.
2. Alexandrov S., Chikanova N. The loss of stability of an aging plate with the circular inclusion // Materials aging and component life extension. /Eds: V.Bicego, A.Nitta, R.Viswanathan.- EMAS. Warley, 1995. -P.843-852.
3. Alexandrov S., Chikanova N. Nonsteady extrusion of a porous material through a conical die // Manufacturing science and engineering / Ed.: M.A.Elbestawi. -Ontario: McMaster University Press, 1996.- P.100-107.

4. Alexandrov S., Chikanova N. The loss of stability and failure of pre-stressed constructions under temperature field // Mechanisms and mechanics of damage and failure / Ed.: J.Petit.- EMAS. Warley, 1996.- P.2107-2112.
5. Alexandrov S., Chikanova N., Vilotic D. Compression of a block between cylindrical dies and its application to the workability diagram // Advanced methods in materials processing defects / Eds: M.Predeleanu, P.Gilormini. - Amsterdam: Elsevier, 1997.- P.247-256.
6. Alexandrov S., Chikanova N., Vilotic D. Analysis of compression with barreling of a block between cylindrical dies // Proc. 3<sup>rd</sup> EUROMECH solid mechanics conference. -Stockholm (Sweden), 1997.- P.123.
7. Chikanova N. The application of Hill's method to the analysis of forming processes with damage evolution models // J. for technology of plasticity. - 1997. -V.22; No.1-2.- P.93-108.
8. К построению диаграммы пластичности / С.Е.Александров, Н.Н. Александрова, Д. Вилотич и др. // Современные проблемы механики и прикладной математики: Тезисы докл. всерос. конф. –Воронеж, 1998. - С.13.
9. Alexandrov S., Goldstein R., Chikanova N. Limit load solution for tubular T-joint with rectangular cross section // Proc. 5<sup>th</sup> Int. conf. on biaxial/multiaxial fatigue and fracture. - Cracow (Poland), 1997.- P.371-388.
10. Alexandrov S., Danilov V., Chikanova N. Creep and fracture of sheet metals in bending // Proc. 6<sup>th</sup> Int. symp. on creep and coupled problems / Eds: A. Jakowluk, Z. Mroz. -Bialystok: Bialystok technical university, 1998.- P.9-18.
11. Чиканова Н.Н. К определению среднего напряжения в установившихся осесимметричных процессах обработки металлов давлением // Изв. ВУЗов. Машиностроение.- 1998.- №10-12.- С.23-31.
12. Vilotic D., Chikanova N., Alexandrov S. Disk upsetting between spherical dies and its application to the determination of forming limit curves // J. Strain Analysis.- 1999.- V.34, No.1.- P.17-22.
13. Чиканова Н.Н. Приближённый анализ установившихся осесимметричных процессов обработки металлов давлением // Вестник МГТУ.- 1999.- №1.-С.26-39.
14. Александров С.Е., Чиканова Н.Н. Приближённый метод анализа процессов обработки металлов давлением в условиях плоской деформации // Металлы. -1999.- №2.-С.46-51.
15. К определению диаграммы пластичности / С.Е. Александров, Д.Вилотич, Р.В. Гольдштейн, Н.Н. Чиканова // Изв. РАН МТТ.- 1998.- №4.

Подписано к печати 20.05.99г. Зак. 72 Объем 1.0 Тир. 100  
 Типография МГТУ им. Н.Э.Баумана