

М407795

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР ПО НАРОДНОМУ ОБРАЗОВАНИЮ
Московский ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции и
ордена Трудового Красного Знамени государственный
технический университет им. Н. Э. Баумана

На правах рукописи

ФИЛАТОВ Александр Яковлевич

УДК 536.2:519.6

РАЗРАБОТКА ВАРИАНТА МКЭ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
НЕСОГЛАСОВАННЫХ СЕТОК ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В СОСТАВНЫХ ТЕЛАХ
С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

05.13.16 - Применение вычислительной техники, мате-
матического моделирования и математиче-
ских методов в научных исследованиях

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 1991

Работа выполнена в Московском ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени государственном техническом университете им. Н. Э. Баумана.

Научный руководитель - доктор технических наук,
профессор Зарубин В. С.

Официальные оппоненты - доктор физико-математических наук
доцент Формалев В. Ф.,
доктор технических наук,
старший научный сотрудник
Домбровский Л. А.

Ведущая организация - Институт проблем механики АН СССР

Защита состоится "14 " мая 1991 года в 11 час 00 мин
на заседании специализированного совета Д. 053.15.12 в МГТУ
им. Н. Э. Баумана по адресу: 107005, Москва, 2-я Бауманская ул.,
д. 5.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке
МГТУ им. Н. Э. Баумана

_____ 199 г.

печатью, просьба выси-

 А. Г. Цицин

М 497795

Гираж 100

аумана

Актуальность работы. На современном этапе развития науки и техники все большее внимание исследователей при решении задач теплопроводности привлекают задачи с подвижными границами области. Важный класс задач связан с расчетом нестационарных температурных полей в телах (например, элементах конструкций летательных аппаратов), форма которых изменяется при разрушении материалов под воздействием высокоинтенсивного нагрева. Получить экспериментальные данные о распределении температуры в этих условиях достаточно сложно. Поэтому большой интерес вызывают работы по математическому моделированию процессов распространения тепла в элементах конструкций с учетом изменения их геометрической формы.

В настоящее время существует ряд методов решения задач теплопроводности в областях с подвижными границами. Эти методы разрабатывались для класса задач, в котором скорость движения границы области можно считать непрерывно изменяющейся вдоль границы. В то же время нередко в конструкциях содействуют материалы с существенно различной скоростью разрушения поверхности. Поэтому актуальной проблемой является разработка методов решения задач теплопроводности, учитывающих скачкообразный, разрывный характер изменения функции, описывающей скорость движения границы.

Цель работы - разработка метода решения двумерных задач теплопроводности в составных телах с учетом разрывного движения границы области и оптимизация вычислительных процедур при конечноэлементной дискретизации области.

Научная новизна.

- Исследованы особенности применения несогласованных сеток в методе конечных элементов (МКЭ). Показано, что исключение фиктивных узлов из конечноэлементной модели путем наложения дополнительных линейных интерполяционных условий связи эквивалентно использованию метода конечных элементов с набором базисных функций специального вида.

- Предложен новый метод решения задач теплопроводности с подвижными границами области, основанный на зонном представлении тела. Использование несогласованной сетки и возможность смещения зон друг относительно друга позволяет моделировать разрывное движение граничной поверхности в



процессе решения задачи.

- Разработан генератор сеток зонного типа, предназначенный для построения несогласованных сеток и реализации разрывного движения границы области.

- Исследованы возможности оптимизации пространственно-временного разбиения области при использовании несогласованных сеток в составных телах с существенно различными теплофизическими свойствами материалов. Получен новый критерий определения величины временного шага, основанный на оценке локальной погрешности решения. Предложен алгоритм динамического выбора схемы интегрирования по времени.

- Для тестирования программных комплексов получено аналитическое решение двумерной задачи о нагреве составной ортотропной пластины.

Практическая ценность диссертации заключается в создании программного комплекса по расчету двумерных плоских осесимметричных температурных полей в составных анизотропных телах с подвижными границами.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на седьмом Всесоюзном семинаре "Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики" (г. Кемерово, 1988), на научном семинаре отдела Термомеханики НИИ ПММ МГТУ им. Н. Э. Баумана в 1989 г., на Всесоюзной выставке программных комплексов по численному решению задач термомеханики (г. Москва, 1990г.), на третьем Всесоюзном совещании по проблемам построения сеток для решения задач математической физики (г. Свердловск, 1990г.), на научном семинаре научно-теоретического отделения КБ машиностроения (г. Коломна, 1990г.), на семинаре по численным методам тепло- и массообмена ИТМ АН СССР в 1990г.

Публикации. По теме диссертации опубликовано пять научных работ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка используемой литературы. Общий объем диссертации 123 страницы. Диссертация содержит 32 рисунок, 3 таблицы. Список литературы содержит 78 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность выполняемых в диссертационной работе исследований, сформулированы цель и задачи исследования, дано краткое содержание работы по главам.

В первой главе рассмотрена постановка задачи, проведен обзор известных методов решения задач теплопроводности с подвижными границами, описан вычислительный алгоритм решения краевой задачи теплопроводности методом конечных элементов.

Различные численные методы решения задач с подвижными границами описаны П.Н.Вабищевичем. Изменение формы тела под воздействием аэродинамического нагрева исследовались в работах В.В.Лунева, В.В.Знаменского. Методы решения задач теплопроводности с подвижными границами, основанные на использовании фиксированных расчетных сеток, развиты в работах В.Ф.Формалева, А.Г.Гофмана, Э.Э.Грузиной, Н.Г.Исмаилова, Дж.Чина. Различные методы, основанные на трансформировании расчетных сеток в процессе решения задачи, предложены в работах М.Хогге, П.Геррекенса, Г.Н.Кувыркина, С.М.Шарова, Н.Н.Головина, А.Г.Цидина.

При решении задач теплопроводности с учетом разрывного движения границы области возникает ряд проблем. Одна из них связана с тем, что через некоторое время развития физического процесса на стыках материалов, имеющих различную скорость разрушения поверхности, возникают уступы и вновь образующиеся участки границы начинают подвергаться соответствующему тепловому воздействию. Следовательно, в ходе расчета необходимо существенно изменять расчетную схему задачи.

Анализ трудностей, возникающих при учете разрывного движения границы области, показал, что целесообразно использовать зонное представление тела, где различным материалам соответствуют различные зоны. В этом случае разрывное движение границы можно интерпретировать как смещение зон друг относительно друга (рис. I). Генерация конечно-элементных сеток внутри зон осуществляется на каждом временном шаге независимо для каждой зоны. Такой подход привел к необходимости использования несогласованных сеток, у которых некоторые линии сетки заканчиваются на внутренних границах области так называемыми фиктивными узлами. На рис. I фиктивные узлы помечены крестиками.

В МКЭ исследование свойств несогласованных сеток началось сравнительно недавно. Этим вопросам посвящены работы Дж. Ямады, И. Нишигуши, Ю. М. Лаевского, С. А. Шишкина, В. С. Зарубина, Г. Н. Кувыркина, А. Г. Цицина, Ю. М. Темиса, М. В. Соболева.

Далее в главе рассмотрен вычислительный алгоритм решения краевой задачи теплопроводности методом конечных элементов с использованием несогласованных сеток. Для вывода уравнений МКЭ используется проекционный алгоритм Бубнова-Галеркина, который приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестного вектора узловых температур $\{T\}$

$$[C] \{\dot{T}\} + [K] \{T\} = \{F\}, \quad (1)$$

где $[C]$, $[K]$ - матрицы теплоемкости и теплопроводности, $\{F\}$ - вектор тепловой нагрузки.

Для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1) используется разностная схема с весами

$$\left(\frac{1}{\Delta t_n} [C_{n+\alpha}] + \alpha [K_{n+\alpha}] \right) \{T_{n+1}\} = \left(\frac{1}{\Delta t_n} [C_{n+\alpha}] - (1-\alpha) [K_{n+\alpha}] \right) \times \\ \times \{T_n\} + \{F_{n+\alpha}\}. \quad (2)$$

Здесь α - весовой параметр схемы интегрирования по времени, индекс $n+\alpha$ означает, что матрица вычисляется для момента времени $t_{n+\alpha}$, Δt_n - величина n -го временного шага.

Матрица теплоемкости $[C]$ используется в диагональной форме, что позволяет полностью снять ограничения на временной шаг по соображениям устойчивости и монотонности разностной схемы для неявной схемы интегрирования по времени и существенно ослабить эти ограничения для явной схемы. Вопросы устойчивости в МКЭ исследовались в работах Дж. Майерса, Р. Яманчили, С. Чу, Г. М. Големштока, В. К. Константинова.

Для учета несогласованности конечноэлементной сетки применяется метод исключения фиктивных узлов, предложенный в работах Дж. Ямады и И. Нишигуши, Г. Н. Кувыркина, С. А. Нерушай, А. Г. Цицина. Для исключения фиктивного узла j (рис. 2) из конечноэлементной модели используется следующее линейное интерполяционное соотношение

$$T_j = \beta T_i + (1-\beta) T_e \quad (3)$$

где коэффициент β характеризует положение узла j на отрез-

ке, определяемом узлами i, ℓ . Тогда уравнение, связывающее вектор $\{T\}$, содержащий все узловые переменные, и вектор $\{T'\}$, содержащий только независимые узловые переменные, можно записать в виде

$$\{T\} = [A] \{T'\}, \quad (4)$$

где матрица $[A]$ формируется на основе соотношений (3), построенных для всех фиктивных узлов.

Тогда, если переписать линейную алгебраическую систему уравнений (2) в виде

$$[K^*] \{T_{n+1}\} = \{F^*\}, \quad (5)$$

где

$$[K^*] = \frac{1}{\Delta t_n} [C_{n+\alpha}] + \alpha [K_{n+\alpha}], \quad (6)$$

$$\{F^*\} = \left(\frac{1}{\Delta t_n} [C_{n+\alpha}] - (1-\alpha) [K_{n+\alpha}] \right) \{T_n\} + \{F_{n+\alpha}\}, \quad (7)$$

то в соответствии с (4) уравнение (5) можно преобразовать следующим образом

$$[A^T][K^*][A] \{T'\} = [A^T]\{F^*\}, \quad (8)$$

где $[A^T]$ - транспонированная матрица $[A]$.

Рассмотренный метод исключения фиктивных узлов нуждается в обосновании, поскольку необходимо проверить, сохраняются ли при преобразовании системы уравнений МКЭ (5) к виду (8) аппроксимационные свойства, присущие стандартной конечноэлементной процедуре. Теоретическое исследование свойств МКЭ на несогласованных сетках проведено в работах Ю.М.Лаевского и С.А.Шипкина, где стандартный набор базисных функций дополнен функциями специального вида, ассоциированными с узлами внутренней границы. Авторами установлено, что построенная система функций является полной и линейно независимой, а также исследованы ее аппроксимационные свойства. В то же время авторами было отмечено, что вопрос поиска эффективных алгоритмов, позволяющих использовать рассмотренную систему базисных функций, остается открытым.

С этой точки зрения важным представляется следующий результат, полученный в диссертационной работе. Доказано, что матрица $[A^T][K^*][A]$, построенная методом исключения фиктивных узлов, эквивалентна матрице, полученной методом конечных элементов с использованием набора базисных функций спе-

циального вида. Это означает, что метод исключения фиктивных узлов может использоваться в качестве алгоритмической основы для организации вычислений с использованием несогласованных сеток.

Анализ формул (6), (8) показал, что при использовании известных способов диагонализации матрицы теплоемкости применение метода исключения фиктивных узлов приводит к потере диагональной формы итоговой матрицей теплоемкости. В работе предложен модифицированный способ диагонализации матрицы позволяющий избежать такого результата. Суть модификации состоит в том, что уже на этапе диагонализации фиктивные узлы не учитываются в конечноэлементной модели, а значение диагонального элемента матрицы $[C]$, соответствующего фиктивному узлу, распределяется между диагональными элементами, соответствующими соседним узлам сетки.

Во второй главе рассмотрены вопросы алгоритмической реализации предложенного метода решения задач теплопроводности с подвижными границами области.

Важную роль в алгоритмическом решении поставленной задачи играет генератор сеток. В рассматриваемом подходе генератор должен обеспечивать построение несогласованных сеток с формированием необходимых структур данных, реализацию разрывного движения границы области; кроме того, генератор должен обладать высоким быстродействием, поскольку регенерация сетки производится на каждом временном шаге.

Анализ различных методов, используемых для построения разностных и конечноэлементных сеток, показал, что с учетом сформулированных требований предпочтительным является подход, основанный на разбиении сложной области на зоны достаточно простой формы, построение сетки в которых можно проводить независимо сравнительно простыми методами.

При разработке генератора сеток зонного типа большое внимание было уделено созданию разнообразных и гибких структур данных, таких как матрица смежности зон, список смежности узлов, структуры, необходимые для эффективного вычисления матричного произведения $[A^T][K^*][A]$ и т.д. Это позволило реализовать эффективные алгоритмы переборного типа, необходимые для решения поставленных задач. Характерными чертами разработанного генератора являются малый объем входной информации,

возможность легко спускать сетку в произвольных местах, удобная форма задания информации о граничных условиях. Сетка строится из четырехугольных билинейных конечных элементов.

Перед использованием генератора геометрическую область необходимо представить в виде совокупности зон - криволинейных четырехугольников, не обязательно выпуклых. Точки, характеризующие изломы геометрии конструкции, будем называть суперузлами. На любой стороне зоны можно использовать произвольное число промежуточных суперузлов, что позволяет легко описывать криволинейные границы области.

Генерация сетки осуществляется в два этапа. На первом этапе строятся сетки внутри зон независимо для каждой зоны. Для этого зона отображается в квадрат путем проектирования каждой стороны зоны на соответствующую сторону квадрата с сохранением относительных расстояний образов граничных узлов от начала стороны. Далее в квадрате сетка строится путем соединения прямыми соответствующих образов граничных узлов, лежащих на противоположных сторонах квадрата, причем точки пересечения прямых внутри квадрата являются прообразами узлов сетки. После этого осуществляется обратное отображение квадрата в зону с использованием кусочно-линейной интерполяционной формулы Кунса. При построении сетки осуществляется автоматический контроль качества сетки по геометрическим критериям, предложенным Г.П.Прокоповым.

На втором этапе после того, как сетки внутри зон построены, производится стыковка зон и построение единой конечно-элементной модели области. При построении сеток независимо в каждой зоне общая граница смежных зон будет состоять из двух несовпадающих множеств узлов, принадлежащих разным зонам, причем, если не принять специальных мер, то эти множества могут иметь очень мало общих узлов или даже вообще не иметь их за исключением двух узлов, замыкающих границу. В этом случае применение метода исключения фиктивных узлов будет эквивалентно использованию очень большого конечного элемента, одной из сторон которого является граница раздела зон. Таким образом, вдоль границы раздела будет принудительно задано линейное распределение температуры, что приведет к значительной погрешности решения в окрестности границы раздела зон. Чтобы избежать этого, применяется следующий алгоритм

"склеивания" граничных узлов, принадлежащих соседним зонам. Пусть на границе первой и второй зон граничных узлов первой зоны меньше, чем граничных узлов второй зоны. Тогда каждый граничный узел первой зоны притягивается к ближайшему граничному узлу второй зоны.

После генерации конечноэлементной сетки осуществляется перенумерация узлов сетки. Дело в том, что матрица теплопроводности хранится и обрабатывается в профильной форме, т.е. она хранится в векторе столбец за столбцом, начиная с диагонального элемента столбца и заканчивая ненулевым элементом с минимальным номером строки, при этом профилем называется количество элементов в векторе. Профильная схема хранения позволяет экономить по сравнению с общепринятой ленточной схемой машинную память и сокращать время решения системы линейных алгебраических уравнений (8).

Как и ширина ленты в случае ленточной схемы хранения, профиль матрицы обычно меняется при перестановке строк и столбцов или, что то же самое, при перенумерации узлов сетки. Меньший профиль означает меньшие затраты памяти и меньшее число операций в вычислениях, выполняемых с матрицей. Одним из наиболее эффективных алгоритмов минимизации профиля является обратный алгоритм Катхилла-Макки, который и использован в данной работе. Алгоритм производит обработку неориентированного графа, связанного с матрицей, и требует задания стартовой вершины. Определяется квазиоптимальная нумерация графа, а затем строки и столбцы матрицы переставляются в соответствии с полученной нумерацией. Для определения стартовой вершины используется алгоритм Гиббса.

Учет движения границы области осуществляется после каждого временного шага решения задачи теплопроводности. Для этого с использованием соответствующей модели движения границы рассчитывается скорость движения границы по нормали к поверхности в текущий момент времени. Далее определяется новое положение границы области, затем регенерируется конечноэлементная сетка в области с новым положением границы, решение с предыдущей сетки переинтерполируется на новую сетку, а в случае образования новых участков граничной поверхности — на них задаются соответствующие граничные условия.

Реализация разрывного движения границы осуществляется сле-

дующим образом. На этапе подготовки исходных данных в тех точках, где предполагается разрыв граничной поверхности, вводятся сдвоенные суперузлы с совпадающими координатами. Пока на границе не образовался уступ, один из сдвоенных суперузлов игнорируется при построении сетки. Впоследствии, когда уступ возникает, игнорируемый ранее суперузел начинает смеяться по внутренней границе зон и определять вновь образующийся участок граничной поверхности, на этом участке ставятся соответствующие граничные условия, а со временем на нем могут появиться и дополнительные узлы сетки.

После того, как найдено новое положение границы и построена новая конечноэлементная сетка, необходимо перенести решение со старой сетки на новую. В отличие от метода конечных разностей в МКЭ решение определено в каждой точке области. В частности, для четырехугольного билинейного конечно-го элемента e

$$T^e(x, y, t) = \sum_{i=1}^4 T_i(t) \varphi_i(x, y), \quad (9)$$

где T_i — температура в узлах элемента, а φ_i — базисные функции, ассоциированные с узлами конечного элемента. Таким образом, зная координаты узла новой сетки и имея информацию о конечном элементе старой сетки, в который этот узел попадает, температуру в нем можно вычислить по формуле (9).

При решении задач теплопроводности с учетом разрывного движения границы области использование профильной схемы хранения матрицы теплопроводности помимо преимуществ, связанных с ее экономичностью, порождает и определенные проблемы. В связи с тем, что расчетная сетка регенерируется на каждом временном шаге, причем число узлов и ее топологическая структура может при этом значительно меняться, количество фиктивных узлов, их расположение, нумерация также постоянно изменяются. Следовательно, профиль матрицы необходимо пересчитывать на каждом временном шаге. Кроме того, в процессе исключения фиктивных узлов необходимо помимо изменения значений элементов матрицы теплопроводности одновременно изменять и ее структуру. Это связано с тем, что вновь образуемые в процессе исключения фиктивных узлов ненулевые элементы могут выходить за пределы профиля матрицы теплопроводности. В работе предложены эффективные алгоритмы модификации структуры хранения матрицы теплопроводности в процессе ре-

шения задачи.

В третьей главе исследованы возможности повышения вычислительной эффективности созданного программного комплекса за счет оптимизации пространственно-временного разбиения области.

Показано, что при решении задач теплопроводности в составных телах с существенно различными теплофизическими свойствами материалов использование несогласованных сеток позволяет значительно снизить вычислительные затраты. Для этого необходимо выбирать сеточные параметры в зонах, соответствующих различным материалам, таким образом, чтобы выровнять по всей области значение сеточного числа Фурье

$$\Delta Fo_i = \frac{\alpha_i \Delta t}{\Delta h_i^2} \approx const, \quad (10)$$

где α_i - коэффициент температуропроводности i -того материала, Δt - временной шаг, Δh_i - шаг сетки в зоне, соответствующей i -тому материалу, причем если материал анизотропный, то и шаги сетки в разных направлениях для этого материала должны быть различными. Таким образом, выигрыш достигается за счет того, что в более температуропроводных зонах, где решение меняется относительно плавно, используются более крупные конечные элементы.

Использование несогласованных сеток в составных телах при высокоинтенсивном нагреве позволяет вернуться к вопросу об эффективности применения явной схемы интегрирования по времени. Преимущество явной схемы заключается в том, что при использовании матрицы теплоемкости в диагональной форме отпадает необходимость решения системы линейных алгебраических уравнений. Однако для составных тел с резко различающимися теплофизическими свойствами материалов использование обычных близких к равномерным во всей области сеток приводит к жестким ограничениям на временной шаг для сохранения устойчивости схемы:

$$\Delta t \leq 2 \min_i (C_{ii} / \sum_{j=1}^N |K_{ij}|) \quad (11)$$

где C_{ii} , K_{ij} - элементы матриц теплоемкости $[C]$ и теплопроводности $[K]$, N - размерность матриц. Причину жесткости ограничения на временной шаг можно выявить более четко, если рассмотреть аналогичное выражение

$$\Delta F_0 = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta h^2} \leq \frac{1}{4} \quad (12)$$

для равномерной квадратной конечно-разностной сетки. Заметим, что жесткое ограничение на временной шаг Δt при постоянном по области Δh порождает зона, соответствующая самому температуропроводному материалу, решение в которой изменяется наиболее плавно. Следовательно, ограничение можно существенно ослабить, если использовать несогласованные сетки, выбирая размер конечных элементов в зонах в соответствии с (10).

При решении нестационарных задач теплопроводности определенные трудности вызывает обоснованный выбор временного шага, который влияет на точность и время решения. Проанализированы известные алгоритмы выбора временного шага.

Предложен новый критерий выбора временного шага, основанный на оценке локальной погрешности решения за один временной шаг. Доказано следующее предложение. Пусть $u_k, \bar{u}_k$ — соответственно точное и конечноэлементное решение в некотором узле сетки в момент времени t_k , $u_k = \bar{u}_k$, $u'_\theta, \bar{u}'_\theta \in [u'_k, u'_{k+1}]$ при $\theta \in [t_k, t_{k+1}]$ (штрих означает операцию дифференцирования по времени).

Тогда для того, чтобы локальная ошибка решения $|u_{k+1} - \bar{u}_{k+1}|$ на K -том временном интервале в рассматриваемом узле сетки не превышала ε , необходимо выбирать временной шаг Δt_k удовлетворяющим неравенству

$$\Delta t_k \leq \frac{\varepsilon}{|u'_{k+1} - u'_k|} \quad (13)$$

При практическом применении формулы (13) значение $|u'_{k+1} - u'_k|$ оценивается с помощью решения, вычисленного в момент времени t_k, t_{k-1}, t_{k-2} , т.е.

$$u'_{k+1} - u'_k = \frac{u_k - u_{k-1}}{\Delta t_{k-1}} - \frac{u_{k-1} - u_{k-2}}{\Delta t_{k-2}} \quad (14)$$

На основе критерия (13), а также ограничения на временной шаг по соображениям устойчивости (11) (отсутствующего для неявной схемы интегрирования по времени) сформулирован алгоритм автоматического выбора временного шага.

Для использования преимуществ явной и неявной схем интегрирования по времени разработан алгоритм динамического выбора схемы интегрирования по времени, основанный на критерии минимальной трудоемкости разностной схемы. Трудоемкость (машинное время) одного временного шага по явной $T_{\text{я}}$ и неявной $T_{\text{н}}$ схемам фиксируется на первых шагах решения задачи с помощью встроенного таймера ЭВМ. Далее, на каждом временном шаге определяются ограничения на размер временного шага по соображениям точности Δt_{τ} и устойчивости $\Delta t_{\text{у}}$. Тогда допустимый шаг по неявной схеме

$$\Delta t_{\text{н}} = \Delta t_{\tau}, \quad (I5)$$

по явной схеме

$$\Delta t_{\text{я}} = \min(\Delta t_{\tau}, \Delta t_{\text{у}}) \quad (I6)$$

Критерием для выбора схемы служит трудоемкость одного шага, отнесенная к величине допустимого временного шага для явной и для неявной схемы. Если

$$T_{\text{н}} / \Delta t_{\text{н}} \leq T_{\text{я}} / \Delta t_{\text{я}}, \quad (I7)$$

то выбирается неявная схема ($\alpha = 1$ в уравнении (2)), в противном случае выбирается явная схема ($\alpha = 0$).

В случае использования неявной схемы интегрирования по времени необходимым этапом решения задачи является решение системы линейных алгебраических уравнений. Использование одинарной точности представления вещественных чисел в ЭВМ при решении систем линейных уравнений прямыми методами может приводить к значительным ошибкам округления. Поэтому обычно применяется двойная точность представления чисел, что ведет к значительным затратам памяти ЭВМ.

В связи с этим предложен способ, позволяющий решать системы линейных алгебраических уравнений с использованием одинарной точности представления чисел в ЭВМ без увеличения погрешности расчетов. Суть алгоритма в использовании итерационного чебышевского метода для уточнения решения, полученного прямым методом Холесского.

Проведен ряд вычислительных экспериментов, подтверждающих эффективность предложенных алгоритмов.

В четвертой главе дано описание созданного программного комплекса (ПК) "РАНЕТ" (Расчет НЕстационарной Теплопроводности), реализующего алгоритмы и методы, предложенные в диссер-

тационной работе.

ПК "РАНЕТ" реализован на ПЭВМ типа ПМ РС АТ и состоит из функциональной и сервисной частей. В состав сервисной части входят операционная оболочка, препроцессор и постпроцессор. Операционная оболочка является интегрированной средой, находясь в которой пользователь может выполнять все необходимые при использовании ПК действия, такие как подготовка исходных данных для расчета, слежение за развитием физического процесса в ходе выполнения задачи, обработка результатов расчета. Интерфейс операционной оболочки организован в виде системы многоуровневых меню.

Для тестирования ПК получено аналитическое решение двумерной задачи о нагреве составной ортотропной пластины. Задача решена методом Фурье.

Кроме того, тестирование ПК проводилось на аналитическом решении двумерной задачи о нагреве однородного тепловыделяющего цилиндра, полученном в работе В.С. Загусина и А.Г. Цицина, а также - на аналитическом решении задачи о нагреве полубесконечного стержня с подвижной границей, приведенном в работе Э.М. Карташова.

Тестирование подтвердило достоверность результатов, получаемых с использованием данного ПК.

Приведены расчеты температурных полей в составной осесимметричной конструкции, обтекаемой высокосубзвуковым газом потоком (рис.3). Расчетная область была разбита на 3 зоны. Область составлена из двух материалов: в крайних зонах - углепластик, в средней зоне - углерод-углеродный композиционный материал (УУКМ). Разрыв в движении граничной поверхности произошел по границам между углепластиком и УУКМ. Вычисление массовой скорости уноса проводилось по методике В.И. Бояринцева и Д.В. Рязина, описывающей кинетический, переходный и диффузионный режимы окисления углерода.

В заключении сформулированы основные результаты работы.

1. Разработан метод решения задач теплопроводности в составных телах с подвижными границами, отличительной чертой которого является возможность проведения расчетов в случае, если скорость движения границы описывается функцией, имеющей разрывы i -го рода вдоль границы, т.е. если в теле соседствуют материалы с существенно различной скоростью разгущения

поверхности. Метод основан на зонном представлении тела и регенерации конечноэлементной сетки на каждом временном шаге. При этом сетки генерируются независимо в каждой зоне и не обязаны быть согласованными на внутренних границах между зонами, а разрыв в движении внешней граничной поверхности в местах стыковки материалов с различной скоростью разрушения поверхности интерпретируется как смещение зон друг относительно друга.

2. Изучены особенности применения несогласованных сеток при решении задач теплопроводности методом конечных элементов. Показано, что исключение фиктивных узлов из конечноэлементной модели путем наложения дополнительных линейных интерполяционных уравнений связи эквивалентно использованию проекционного метода со специальным образом выбранной системой базисных функций. Описан алгоритм преобразования профильной структуры матрицы теплопроводности в процессе исключения фиктивных узлов. Обобщен на случай несогласованных сеток метод диагностики матрицы теплоемкости.

3. Разработан генератор сеток зонного типа, предназначенный для построения как согласованных, так и несогласованных конечноэлементных сеток, а также - для реализации разрывного движения границы области.

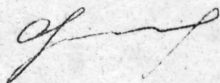
4. Рассмотрены вопросы повышения вычислительной эффективности разработанного метода. Исследованы возможности оптимизации пространственно-временного разбиения области при использовании несогласованных сеток в составных телах существенно различающимися теплофизическими свойствами материалов. Разработаны алгоритмы автоматического определения временного шага и динамического выбора схемы интегрирования по времени, рассмотрены вопросы экономичного решения системы линейных алгебраических уравнений.

5. Для тестирования программных комплексов по расчету двумерных температурных полей в составных анизотропных телах получено аналитическое решение задачи о нагреве составной ортотропной тепловыделяющей пластины.

6. Проведены численные эксперименты, подтвердившие эффективность построенного программного комплекса, а также проведены расчеты температурных полей в элементах конструкций летательных аппаратов, иллюстрирующие возможности разработанного метода.

По теме диссертации опубликованы следующие работы.

1. Филатов А.Я. Генератор сеток зонного типа // Всесоюзная выставка программных комплексов по численному решению задач термомеханики: Тезисы докладов. - М., 1990. - С. 46.
2. Филатов А.Я., Цидин А.Г. О принципах сравнения алгоритмов и программ построения двумерных сеток // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. - 1990. - Вып. 2. - С. 76-77.
3. Бондаренко М.И., Кузьмин И.А., Филатов А.Я. Автоматизированная система обеспечения тепловых и прочностных расчетов // Численно-аналитическое исследование процессов тепломассообмена: Сборник научн. тр., ДГУ. - Днепропетровск, 1990. - С. 105-109.
4. Математическое моделирование температурных полей в составных конструкциях переменного объема / В.В. Забелин, Е.Б. Мухин, А.Я. Филатов и др. // Математическое моделирование в машиностроении: Тезисы докладов Первой Всесоюзной школы-конференции. - Куйбышев, 1990. - С. 19-20.
5. Адаптивные методы решения задач термомеханики / А.Г. Цидин, С.Н. Лесовой, А.Я. Филатов, Т.П. Ярославцева // Труды МГТУ. - 1990. - № 542. - Термомеханика: Сборник статей. - С. 106-115.



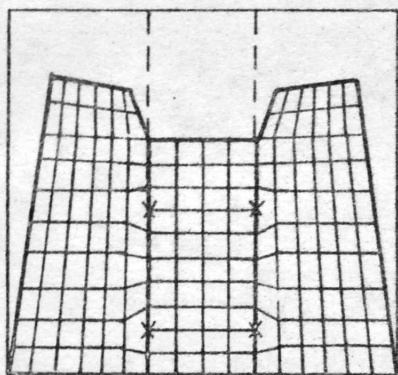


Рис. 1

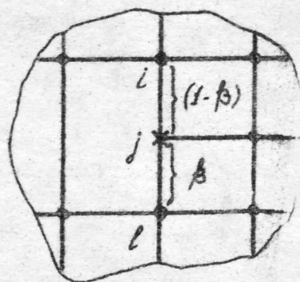


Рис. 2

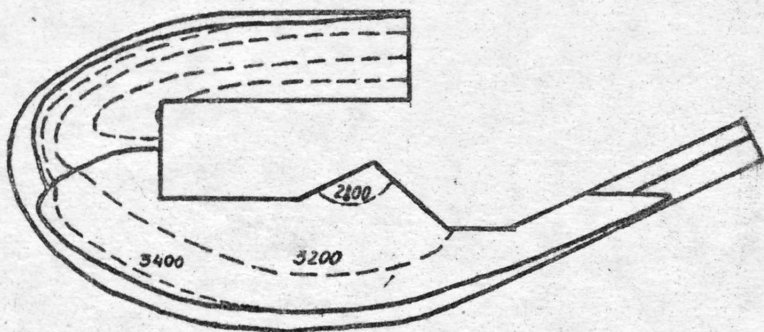


Рис. 3