

М 87099

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ, ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ
РОССИИ

Московский ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени государственный
технический университет им. Н.Э. Баумана

На правах рукописи

УДК: 517+518+536.24

Кочубей Александр Алексеевич

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ КОНВЕКТИВНО-ДИФфуЗИ-
ОННОГО ПЕРЕНОСА НА ОСНОВЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

05.13.18 - теоретические основы математического модели-
рования, численные методы и комплекс программ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук

А. Кочубей

Москва 1993

Работа выполнена в Днепропетровском государственном университете

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор Е.М.Шахов

доктор физико-математических наук, профессор Б.Н.Четверушкин

доктор технических наук, профессор В.М.Епифанов

Ведущее предприятие:

Институт проблем механики Российской Академии наук

Защита состоится 16 марта 1993г. в 11 час. 00 мин.
на заседании Специализированного Совета по защите докторских
диссертаций Д 053.15.12 при Московском государственном технику-
мическом университете им. Я.
2-я Бауманская ул., д. 1

С диссертацией можно
Просим Ваш отзыв на ав
направлять в одном экз

Авторефе

Ученый секретарь Спе-
лизованного Совета,
технических наук, д

М87099

Заказ 717. Тираж
Типография МГ



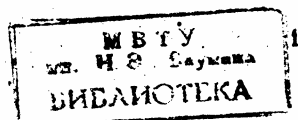
1087099

Кочубей А.А. Численное моделирование ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Совершенствование метода конечных элементов (МКЭ) как инструмента математического моделирования сложных процессов гидро- и газодинамики, тепло- и массообмена является одной из актуальных проблем вычислительной математики, так как открывает новые возможности в развитии этих предметных областей, дает перспективы создания базирующихся на МКЭ систем автоматического проектирования, управления геометрией объектов в технике и технологии и т.д. Важным с этой точки зрения аспектом развития метода является и поиск подходов его применения для решения новых классов двумерных и трехмерных задач переноса импульса и энергии, математические постановки которых описывают сложные физические эффекты взаимодействия полей переносимых субстанций, воздействия на движущиеся среды массовых сил различной природы, течения и теплообмена в материалах с неклассическими свойствами (проницаемые, пористые среды) и др.

Адаптация метода конечных элементов к новым задачам требует пересмотра концептуальных взглядов на отдельные этапы его реализации и, в частности, на подходы к аппроксимации решений на элементах. Это обусловлено как повышением степени сложности описываемых физических процессы математических моделей, так и необходимостью обеспечения высокой точности описываемых численных результатов.

Совершенствование метода в рамках традиционной полиномиальной аппроксимации путем использования более подробных конечноэлементных сеток или увеличения порядков самих полиномов представляет собой экстенсивный путь решения проблемы, так как в обоих случаях приводит к росту необходимой для расчетов памяти ЭВМ и увеличению числа выполняемых арифметических операций при решении задач. Кроме того, использование полиномов для аппроксимации функций в случае решения задач гидро- и газодинамики приводит к дискретным аналогам конвективных производных на конечноэлементных сетках, эквивалентным центрально-разностной аппроксимации по методу конечных разностей (МКР), что может явиться причиной неустойчивости численных решений. Поэтому перспективным направлением совершенствования МКЭ на этапе адаптивирования его к задачам механики жидкости и тепло-массообмена является улучшение аппроксимационных функций в смысле приближения их свойств к свойствам решений исходных



уравнений с сохранением в качестве носителей элементов с минимальным количеством узлов.

Актуальной с практической точки зрения является также проблема создания новых алгоритмов решения краевых задач переноса импульса в естественных переменных скорость – давление, так как в большинстве важных для техники и технологии случаев определение полей давления в движущихся средах является одной из основных целей численных расчетов.

Диссертация выполнялась в рамках госбюджетной темы 94-89 "Численное моделирование процессов переноса жидкости и газа на основе современных алгоритмических и программных средств", а также Программы ГКНТ СССР, ГКО СССР "Математическое моделирование в научных и технических системах" (разд. 28. Формирование комплексов алгоритмических программных средств и численных методов, реализующих математические модели течений и теплообмена жидкости и газа на современных ЭВМ).

Обзор состояния проблемы. Развитие и совершенствование МКЭ применительно к решению краевых задач гидродинамики и конвективного теплообмена ведется по двум основным направлениям. Первое из них связано с поиском новых способов построения схем метода для уравнений Навье-Стокса и энергии (массопереноса), а также организации процедур численного определения полей скорости, давления и температуры (концентрации). Второе – с повышением эффективности математического обеспечения и технологии реализации конкретных этапов метода на ЭВМ.

В рамках первого направления, где формируются концептуальные подходы применения МКЭ при решении задач механики жидкости и теплообмена, исследуются возможности решения задач в естественных переменных и переменных функция тока-завихренность, проходят апробацию способы аппроксимации функций на различных типах элементов, а также принципы построения систем разрешающих уравнений относительно узловых неизвестных искомым величин. Общей особенностью данного направления развития МКЭ является то, что оно стало источником новых алгоритмов и процедур вычислений на базе этого метода.

Несмотря на большое количество описанных в литературе алгоритмов МКЭ и их модификаций, основные схемы алгоритмизации расчетов при решении краевых задач переноса на основе уравнений Навье-Стокса уже определились и могут быть проиллюстрированы следующими подходами реализации метода:

– алгоритм прямого построения систем разрешающих уравнений

МКЭ для уравнений Навье-Стокса (В.И. Полежаев, А.И. Федосеев, C. Taylor, P. Hood, J.I. Oden, S.O. Will и др.);

- алгоритм, использующий уравнение Пуассона для давления (S.Y. Tuann, M.D. Olson, P.M. Grasho, S.T.K. Chan, R.L. Lee, C.D. Upson и др.);

- алгоритм метода штрафных функций (G.J. Fix, G. Liang, D.N. Lee, T.J.R. Hughes, W.K. Liu, A. Brooks, J.N. Reddy, J.T. Oden, N. Kikuchi, Y.T. Song и др.);

- алгоритм совместного применения МКЭ и метода характеристик (J.P. Benque, G. Labadie, B. Ibler, D.F. Griffiths, A.R. Mitchell, B. Latteux и др.);

- алгоритм Удзави (Ш. Лионс, Р. Тешам);

- алгоритм искусственной сжимаемости (R. Тешам, T.D. Taylor, R. Peyret и др.);

- метод проектирования на подпространство соленоидальных функций (Е.И. Горовая, В.Я. Ривкинд и др.).

Перечисленные выше алгоритмы носят характер базовых и часто применяются при реализации МКЭ для решения задач конвективно-диффузионного переноса. Тем не менее, наряду с эффективными процедурами организации вычислений, в большинстве из них используется классическая полиномиальная аппроксимация функций на элементах, что может вызывать проблемы, связанные с устойчивостью решений. Попытками преодоления недостатков полиномиальной аппроксимации были обусловлены разработки формулировок МКЭ (J.C. Heinrich, P.S. Huyakorn, O.C. Zienkiewicz, A.R. Mitchell, T.J.R. Hughes, A. Brooks, P. Lesaint и др.), обеспечивающих аппроксимацию конвективных членов уравнений переноса аналогами разностей "против потока" (upwind element).

Важным шагом в развитии МКЭ применительно к задачам гидродинамики и теплообмена явился подход реализации метода (B.R. Baliga, S.U. Patankar, T.T. Phan, C. Prakash и др.), базирующийся на понятии контрольных объемов и аппроксимации функций, строящейся на основе частных решений конвективно-диффузионной части исходных уравнений переноса. Расчеты с использованием этого подхода показали высокую точность полученных результатов, что является следствием использования на элементах близких к решению базисных функций.

Улучшение аппроксимаций искоемых функций в плане приближения их свойств к свойствам решений краевых задач и является, на наш взгляд, интенсивным путем развития МКЭ в области решения задач механики жидкости и конвективного тепло- и массообмена.

позволяющим значительно расширить класс моделируемых процессов переноса без существенного увеличения требуемых затратных показателей вычислительной техники при расчетах.

Цель работы. Исходя из сказанного выше, целью настоящей диссертационной работы является развитие перспективного направления численного моделирования задач механики жидкости и конвективного теплопереноса на основе метода конечных элементов с использованием аппроксимации функций на треугольных элементах, обладающей новыми качественными свойствами и строящейся как суперпозиция частных решений модельных уравнений конвективно-диффузионного переноса; создание на базе модифицированного метода конечных элементов алгоритмов и комплексов программ решения двумерных и трехмерных задач гидродинамики и теплообмена в областях сложной геометрической формы и каналах сложного сечения.

В соответствии с целью работы ставятся следующие задачи исследования:

- построение новых аппроксимационных зависимостей функций на треугольных элементах в декартовой и цилиндрической системах координат на основе частных решений неоднородных модельных уравнений конвективно-диффузионного переноса, проведение сравнительного анализа свойств известных аппроксимаций и предложенных в данной работе;

- формулировка обобщенной математической модели течения и теплообмена в двумерных плоских и осесимметричных областях сложной геометрической формы, разработка основанных на предлагаемой модификации МКЭ алгоритмов и комплексов программ численного решения сопряженных нестационарных задач переноса;

- теоретическое обоснование и численное подтверждение достоверности и точности результатов решения двумерных задач;

- разработка алгоритма совместного применения методов конечных элементов и разностей для решения нестационарных трехмерных задач гидродинамики и теплообмена в каналах сложного сечения с учетом эффекта их вращения, теоретическое исследование сходимости итерационной процедуры решения трехмерных задач переноса во вращающихся каналах;

- разработка комплекса прикладных программ решения задач гидродинамики и теплообмена во вращающихся каналах, численное подтверждение достоверности и точности расчетных результатов;

- формулировка (на основе параболизированных уравнений) математических моделей процессов конвективно-диффузионного переноса

са в скрученных каналах сложного поперечного сечения и каналах с изменяющейся по длине геометрией сечений;

- построение аппроксимационных зависимостей функций на элементах и разработка маршевых (на базе совместного применения МКЭ и МКР) алгоритмов расчета параметров течения и теплообмена в скрученных каналах сложного сечения и каналах типа "диффузор - конфузор";

- разработка комплексов прикладных программ решения краевых задач гидродинамики и теплообмена в скрученных каналах произвольного сечения и каналах с изменяющейся по длине геометрией сечений, численное подтверждение достоверности и точности расчетных результатов;

- решение прикладных задач конвективно-диффузионного переноса в двумерных областях сложной геометрической формы и каналах сложного поперечного сечения.

Научная новизна. В диссертации развито перспективное направление численного моделирования процессов гидродинамики и тепломассопереноса в областях сложной геометрической формы на основе метода конечных элементов, базирующегося на принципе контрольных объемов и новом подходе построения аппроксимации решений на треугольных элементах. Интерполянты искомых функций (компоненты вектора скорости, температура) строятся как суперпозиция частных решений неоднородных модельных уравнений конвективно-диффузионного переноса и учитывают их источники члены.

На основе данного подхода в работе:

- построены новые аппроксимационные зависимости функций на элементах для случаев решения двумерных плоских и осесимметричных задач механики жидкости и теплообмена, исследованы свойства этих аппроксимаций и обоснованы преимущества их использования по сравнению с известными;

- разработаны и теоретически обоснованы новые алгоритмы численного решения нестационарных краевых задач гидродинамики и теплообмена в двумерных расчетных областях, при этом построение математических моделей физических процессов на основе обобщенных уравнений переноса для пористых сред дает возможность использования этих алгоритмов для решения широкого класса сопряженных задач переноса импульса и энергии;

- разработан комплекс прикладных программ расчета характеристик течения и теплообмена в двумерных расчетных областях произвольной геометрической формы, позволяющий моделировать про-

цессы переноса при вынужденной и свободной конвекции, в пористых средах, решать сопряженные задачи типа "жидкость-твердое тело", "жидкость-пористая среда", "пористая среда-твердое тело" и их комбинаций;

- на основе совместного применения методов конечных элементов и разностей разработан новый маршевый алгоритм расчета характеристик течения и теплообмена на начальных участках вращающихся каналов произвольного поперечного сечения, проведено теоретическое исследование сходимости его итерационных решений;

- разработан комплекс прикладных программ расчета нестационарных трехмерных полей скорости, давления и температуры во вращающихся каналах произвольного поперечного сечения;

- с использованием неортогональных преобразований систем координат разработаны математические модели процессов переноса импульса и энергии в скрученных и винтообразных каналах произвольного поперечного сечения, а также в каналах с изменяющейся по длине геометрией сечений, дающие возможность реализации численных расчетов как и в случае прямых каналов;

- получены модельные уравнения конвективно-диффузионного переноса и функциональные выражения, аппроксимирующие на треугольных элементах решения задач гидродинамики и теплообмена в скрученных (винтообразных) каналах сложного сечения и каналах с изменяющейся по длине геометрией сечений;

- на основе единой концепции решения трехмерных нестационарных задач переноса в каналах разработаны новые алгоритмы и комплексы прикладных программ расчета характеристик течений и теплообмена в скрученных (винтообразных) каналах произвольного поперечного сечения и каналах с изменяющейся геометрией сечений;

- применение разработанных комплексов программ позволило решить ряд новых задач гидродинамики и теплообмена в двумерной и трехмерной постановках.

Практическая ценность. Разработанные на базе новой модификации МКЭ алгоритмы и комплексы программ позволяют эффективно и с малыми затратами памяти ЭВМ проводить численное исследование течений жидкости и теплообмена в двумерных областях сложной геометрической формы и каналах сложного сечения, решать широкий класс задач сопряженного теплообмена и гидродинамики, моделировать влияние различных массовых сил и геометрических факторов на структуру течения и теплообмен. Комплексы программ могут использоваться как инструмент численного

анализа процессов переноса на этапе проектирования энергетического оборудования и теплообменных систем.

Представленные в диссертации комплексы программ использовались при проведении численных расчетов в НИИ Энергетического машиностроения МГТУ им. Н.Э. Баумана (г.Москва), ВНИИПромгаз (г.Москва), КБ "Южное" (г.Павлоград), ИЯЭ АН Беларуси (пос. Сосны) и в других организациях.

Обоснованность и достоверность представленных в диссертации результатов основана на строгости математического описания моделей исследуемых процессов переноса, полученных оценках свойств приведенных аппроксимационных зависимостей и результатах исследования сходимости и точности решений, а также на данных тщательного и методического тестирования разработанных комплексов программ на решениях широко известных тестовых задач, сравнении полученных результатов расчетов с данными экспериментов и результатами расчетов других авторов.

Автор защищает:

- положение о том, что для повышения точности численных результатов, улучшения устойчивости и экономичности расчетных алгоритмов, реализующих метод конечных элементов при решении краевых задач гидродинамики и теплообмена в двумерных и трехмерных областях, целесообразно использовать аппроксимации исходных функций на элементах, строящиеся на основе аналитических решений модельных (элементных) уравнений конвективно-диффузионного переноса; аппроксимации функций должны строиться как суперпозиция частных решений неоднородных модельных уравнений и учитывать их источниковые члены;
- математические модели процессов переноса импульса и энергии в двумерных областях, в скрученных вдоль продольной оси каналах произвольного сечения и каналах с изменяющейся по длине геометрией сечений;
- методику построения аппроксимаций функций на треугольных элементах и аппроксимационные зависимости, полученные для случаев решения двумерных плоских и осесимметричных задач гидродинамики и теплообмена, а также трехмерных задач переноса в скрученных каналах и каналах с изменяющейся по длине геометрией сечений;
- результаты и выводы из сравнительного анализа свойств предложенных аппроксимационных зависимостей и известных аппроксимаций;
- основанный на совместном применении МКЭ и МКР подход постро-

ения алгоритмов решения двумерных и трехмерных задач гидродинамики и теплообмена, алгоритмы расчетов полей скорости, давления и температуры в двумерных плоских и осесимметричных областях, во вращающихся каналах произвольного сечения, в скрученных (винтообразных) каналах, в каналах с изменяющейся по длине формой сечений;

- результаты исследования сходимости реализуемых в алгоритмах итерационных процедур вычислений;

- комплексы прикладных программ расчета характеристик течения и теплообмена в двумерных областях сложной геометрической формы, во вращающихся и скрученных каналах произвольного сечения, а также в каналах с изменяющейся по длине геометрией сечений;

- результаты численного решения двумерных и трехмерных прикладных задач гидродинамики и теплообмена в областях сложной формы и каналах сложного сечения.

Апробация работы. Материалы настоящей диссертационной работы докладывались на секциях "Вычислительный эксперимент в задачах тепломассообмена и теплопередачи" Минских международных форумов 1988, 1992 гг.; Всесоюзном совещании "Аналитические методы расчетов процессов тепло- и массопереноса", Душанбе, 1986 г.; VI, VII, и VIII Всесоюзных школах-семинарах МВТУ им. Н.Э.Баумана "Современные проблемы газодинамики и тепломассообмена и пути повышения эффективности энергетических установок", Волгоград, 1987 г., Канев, 1989 г., Москва, 1991 г.; Всесоюзном семинаре "Тепломассообмен и гидродинамика тонких струй вязкой жидкости", Днепропетровск, 1989 г.; Отраслевом семинаре СФТИ "Современные проблемы теплофизического обеспечения электрофизических установок", Сухуми, 1990 г.; VIII Республиканской конференции "Повышение эффективности, совершенствование процессов и аппаратов химических производств", Днепропетровск, 1991 г.; Межотраслевой научно-технической конференции ЦИАМ, ХАИ "Проблемы функциональной диагностики газотурбинных двигателей и их элементов", пос. Рыбачье, 1990 г.; VII научно-технической конференции МГТУ им. Н.Э.Баумана, ЦНИИ им. А.Н.Крылова, ИТФ АН СССР "Опыт эксплуатации и пути совершенствования теплообменного оборудования", Севастополь, 1991 г.; III Всесоюзной школе-семинаре "Численные методы механики сплошной среды", пос. Дюрсо, 1991 г.; IV Всесоюзной школе-семинаре "Актуальные вопросы теплофизики и физической гидрогазодинамики", Алушта, 1991 г.; заседании секции ГКНТ СССР "Методы расчета процессов теплопереноса и физико-химических пре-

вращений в высокотемпературных материалах", Москва, 1991 г.; на итоговых научных конференциях ДГУ, Днепропетровск, 1985-1991 гг.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 5 разделов, заключения и списка литературы. Работа изложена на 385 стр. машинописного текста, содержит 108 рисунков, 3 таблицы. Список использованной литературы включает 156 источников.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дана характеристика актуальности проблемы, представлен краткий обзор существующих подходов моделирования процессов гидродинамики и теплообмена на основе метода конечных элементов, сформулированы цель работы и задачи исследования. Там же определены выносимые на защиту результаты, их новизна, а также приведена аннотация работы.

В первом разделе диссертации рассмотрены формулировка метода конечных элементов, а также вопросы построения аппроксимаций функций на треугольных элементах. Базисные функции элементов при решении задач гидродинамики и конвективного теплообмена предложено строить как суперпозиции частных решений неоднородных модельных уравнений конвективно-диффузионного переноса, записываемых для каждого элемента дискретного образа расчетной области. Модельный характер этих уравнений понимается в том смысле, что компоненты вектора скорости в конвективных, коэффициенты переноса в диффузионных составляющих и источниковые члены уравнений считаются отнесенными к центрам масс треугольников и постоянными на каждом из них. Так, в декартовой системе координат модельное уравнение записывается в виде

$$\rho_0 \frac{\partial f}{\partial x} + v_0 \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) + Q_0, \quad (1)$$

где индекс определенности его на конкретном конечном элементе опущен, индекс "0" подчеркивает отношение соответствующих величин к центрам масс треугольников. Функция f на элементе аппроксимируется зависимостью

$$\tilde{f} = Q_0 \eta + \alpha + \beta \xi_1 + \gamma \xi_2, \quad (2)$$

где

$\xi_1 = \frac{1}{Re u_0} \{ \exp [Re u_0 (x - x_0)] - 1 \}$, $\xi_2 = \frac{1}{Re v_0} \{ \exp [Re v_0 (y - y_0)] - 1 \}$ - решения одномерных по координатам однородных аналогов уравнения (1); $\hat{f}$ - частное решение (1) с единичным источником. Функция $\hat{f}$ определяется как

$$\hat{f} = (\psi + Re_\Delta \varphi) / (1 + Re_\Delta), \quad (3)$$

где

$\varphi = -\frac{Re}{2} \{ [\mu_0 (y - y_0) - v_0 (x - x_0)] / \omega_0^2 \}$, $\psi = [\mu_0 (x - x_0) + v_0 (y - y_0)] / \omega_0^2$ - решения модельных уравнений с единичными источниками, описывающих соответственно только диффузионный и только конвективный переносы субстанции f ; $Re_\Delta = Re \omega_0 d_\Delta$; d_Δ - характерный размер элемента; $\omega_0^2 = (\mu_0^2 + v_0^2)^{1/2}$. Легко видеть, что использование Re_Δ , φ и ψ позволяет обеспечивать переходы к предельным случаям аппроксимации функции f ($\hat{f} \rightarrow \varphi$ при $Re_\Delta \rightarrow 0$ ($\omega_0 \rightarrow 0$), $\hat{f} \rightarrow \psi$ при $Re_\Delta \rightarrow \infty$ ($\omega_0 \rightarrow \infty$)).

После нахождения параметров аппроксимации α , β , γ выражение (2) записывается следующим образом:

$$\bar{f} = Q_0 \hat{f} + [N] \{ f - Q_0 \hat{f} \}.$$

Здесь $[N]$ - матрица-строка базисных функций рассматриваемого треугольного элемента, которые определяются по формулам, совпадающим с формулами для базисных функций линейного элемента, где переменная x заменяется на ξ_1 , а y на ξ_2 ; $(*)$ - вектор-столбец узловых значений функции $f - Q_0 \hat{f}$.

Аппроксимационные зависимости на элементах в цилиндрической системе координат строились как суперпозиция частных решений неоднородного модельного уравнения

$$\mu_0 \frac{\partial f}{\partial x} + v_0 \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) \right] + Q_0, \quad (4)$$

и получены в предположении, что размеры треугольников по радиальной координате r таковы, что отношение r/r_0 близко к единице. Как и выше, функция f на элементе представлялась в виде

$$\bar{f} = Q_0 \hat{f}^* + \alpha + \beta \xi_1^* + \gamma \xi_2^*,$$

где

$$\xi_1^* = \xi_1; \quad \xi_2^* = [(r/r_0)^{Re v_0 r_0} - 1] / (Re v_0);$$

$$\zeta^* = \frac{\varphi^* + Re_\Delta \psi^*}{1 + Re_\Delta}; \quad \varphi^* = -\frac{Re}{2} \left\{ [u_\theta r_\theta \ln(r/r_\theta) - v_\theta^2 (x-x_\theta)] / \kappa_\theta^2 \right\};$$

$$\psi^* = [u_\theta (x-x_\theta) + v_\theta r_\theta \ln(r/r_\theta)] / \kappa_\theta^2,$$

Re_Δ - сеточное (элементное) число Рейнольдса.

Нетрудно проверить, что в рамках сделанного допущения функции ξ_1^* и ξ_2^* являются решениями однородного уравнения (4), а ζ^* - частным решением этого уравнения с единичным источником. Видно также, что, как и в декартовых координатах, при $\kappa_\theta \rightarrow 0$ функция ζ^* стремится к одному из частных решений уравнения теплопроводности с единичным источником, функции ξ_1^* и ξ_2^* переходят в решение уравнения Лапласа ($\xi_1^* \rightarrow x-x_\theta$; $\xi_2^* \rightarrow -r_\theta \ln(r/r_\theta)$).

В этом же разделе диссертации проведен сравнительный анализ аппроксимаций функций на элементах, строящихся на основе частных решений неоднородных модельных уравнений конвективно-диффузионного переноса, и наиболее часто используемых при реализации МКЭ полиномиальных (линейной и квадратичной) аппроксимаций.

Различные способы приближения функций на треугольных элементах исследовались в смысле выяснения их близости к решению исходного дифференциального уравнения переноса. Это было сделано в рамках следующего данного в работе определения.

* Пусть функция $f(x, y)$ является решением краевой задачи * для уравнения

$$\begin{aligned} Af + Bf &= Q, & x, y \in \Omega; \\ Cf &= G, & x, y \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (5)$$

* (Ω - ограниченная область ($\Omega \in R^2$), $\partial\Omega$ - ее граница;

* A, B, C - дифференциальные операторы; Q, G - известные

* функции; Ω_h - триангулированная область ($\Omega_h \subset \Omega$), вер-

*шины которой лежат на $\partial\Omega$). Функция $\tilde{f}(x, y)$ называется

* r -эквивалентной решению уравнения (5) (функции f) на

* элементе $\Omega^{(e)} \subset \Omega_h$, если

$$\| \varepsilon^{(e)}(x, y) \| = \| Af^{(e)} + Bf^{(e)} - Q \| = O(h^{(e)r}),$$

* где $h^{(e)}$ - длина наибольшей стороны элемента.

В работе показано, что линейная аппроксимация функций на элементах обеспечивает их ноль-эквивалентность решению уравне-

ния конвективно-диффузионного переноса, а для норм невязок этого уравнения, полученных с использованием квадратичной и построенных на частных решениях аппроксимаций, справедливы оценки

$$\|\varepsilon\|_{C(\Omega^{(e)})} \leq K^{(e)} h^{(e)} + \|O(h^{(e)2})\|_{C(\Omega^{(e)})}, \quad (6)$$

где $\|\psi\|_{C(\Omega^{(e)})} = \sup_{\Omega^{(e)}} |\psi(x, y)|$.

Выражения для констант $K^{(e)}$ в (6) имеют вид:

- квадратичная аппроксимация:

$$\begin{aligned} K^{(e)} = & 2(\|u\| \|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\| + \|v\| \|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\| + (\|u\| + \|v\|) \|\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\|) + \\ & + \frac{128}{3\pi^2 \sin^2 \theta^{(e)}} (\|\frac{\partial}{\partial x}\| + \|\frac{\partial}{\partial y}\|)^3 f + (\|\frac{\partial u}{\partial x}\| + \|\frac{\partial u}{\partial y}\|) \|\frac{\partial f}{\partial x}\| + \\ & + (\|\frac{\partial v}{\partial x}\| + \|\frac{\partial v}{\partial y}\|) \|\frac{\partial f}{\partial y}\| + \|\frac{\partial Q}{\partial x}\| + \|\frac{\partial Q}{\partial y}\|; \end{aligned} \quad (7)$$

- предлагаемая аппроксимация:

$$\begin{aligned} K^{(e)} = & (\|\frac{\partial u}{\partial x}\| + \|\frac{\partial u}{\partial y}\|) \|\frac{\partial f}{\partial x}\| + (\|\frac{\partial v}{\partial x}\| + \|\frac{\partial v}{\partial y}\|) \|\frac{\partial f}{\partial y}\| + \\ & + \|\frac{\partial Q}{\partial x}\| + \|\frac{\partial Q}{\partial y}\|. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь индексы $C(\Omega^{(e)})$ в знаках норм пущены.

Сравнение равенств (7) и (8) позволяет сделать вывод, что, несмотря на одинаковый порядок эквивалентности аппроксимаций решений уравнения конвективно-диффузионного переноса, построенные на частных решениях модельных уравнений аппроксимации функций имеет ряд существенных преимуществ по сравнению с квадратичной.

Во-первых, на сетках с одинаковым числом элементов и одинаковой их мерой мелкости реализация квадратичной аппроксимации требует большего объема памяти ЭВМ. Во-вторых, интерполанты, строящиеся на решениях, точно аппроксимируют функцию f когда $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, $Q = \text{const}$. Точность решения краевых задач может быть выше и в других случаях. В-третьих, из выражения

(7) следует, что при реализации квадратичной аппроксимации необходимо избегать использования в области $\mathcal{D}_h$ близких к вырожденным треугольных элементов ($\theta^{(e)} \rightarrow 0$). В оценке для аппроксимаций, строящихся на частных решениях модельных уравнений, такое ограничение (по крайней мере для возможности получения невязки порядка $\mathcal{O}(h^{(e)})$) отсутствует. В-четвертых, квадратичная аппроксимация может терять первый порядок эквивалентности решению на грубых сетках, когда

$$\max(\|u\|, \|v\|, \|u\| + \|v\|) \geq (2h^{(e)})^{-1}.$$

В работе также отмечено, что аппроксимации функций на элементах, построенные на частных решениях модельных уравнений конвективно-диффузионного переноса, становятся 1-эквивалентными решению исходного уравнения только в случае учета в них источников членов $\mathcal{Q}_\theta$. В противном случае точность численных решений может оказаться низкой.

Кроме рассмотренного выше исследования, в первом разделе проведено сравнение двух различных аппроксимаций функций, строящихся на решениях модельных уравнений (представленной в данной работе и предложенной в работах B.R. Baliga, S.V. Patankar). Критерием выбора базиса при построении аппроксимаций при этом явилась проверка степени несогласованности результирующих базисных функций при переходе через границы элементов. И в этом случае предпочтение было отдано предложенной в данной диссертации аппроксимации решений.

Таким образом, результаты выполненного в первом разделе диссертации анализа свойств различных аппроксимаций функций на треугольных элементах позволили обосновать целесообразность использования при решении краевых задач конвективно-диффузионного переноса предложенных в работе зависимостей и дали основания для их дальнейшего применения при построении на основе МКЭ алгоритмов численного расчета двумерных и трехмерных процессов гидродинамики и теплообмена в областях сложной геометрической формы.

Второй раздел диссертации посвящен изложению и обоснованию алгоритмов численного решения двумерных плоских и осесимметричных задач гидродинамики и конвективного тепломассообмена в областях сложной геометрической формы. Алгоритмы разработаны как процедуры решения краевых задач переноса, математические модели которых базируются на обобщении уравнений движения и энергии для пористых сред.

В качестве базовых при построении математических моделей двумерных процессов переноса использовались уравнения движения для пористых сред в приближении Дарси-Бринкмана-Форихаймера:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{Re}{\varepsilon x_2^y} \frac{\partial (x_2^y U_i U_i)}{\partial x_j} + \frac{\varepsilon Re}{Da} \left(\frac{1}{Re} + C \sqrt{Da} |\vec{N}| \right) U_i = \\ = \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{x_2^y} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(x_2^y \frac{\partial U_i}{\partial x_2} \right) - y \frac{U_i}{x_2^2} - \varepsilon \left(Re \frac{\partial \rho}{\partial x_j} - \right. \\ \left. - \frac{Gr}{Re} \theta \frac{\partial H}{\partial x_j} \right) + F_{U_i}, \quad (i = 1, 2); \end{aligned} \quad (9)$$

$$\partial (x_2^y U_j) / \partial x_j = 0;$$

$$\begin{aligned} \rho_T \left[\kappa_p \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{Re}{x_2^y} \frac{\partial (x_2^y U_j \theta)}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\Lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \right) + \\ + \frac{1}{x_2^y} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\Lambda x_2^y \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right) + F_\theta, \end{aligned}$$

где $y = 0, x_1 = x, x_2 = y$ - декартова система координат; $y = 1, x_1 = x, x_2 = R$ - цилиндрическая система координат; $U_i = U, U_2 = V$.

В системе (9): $t = \mu T / (\rho_{ж} l^2)$; $U_i = u_i / \bar{w}$; $x_i = x_i / l$;

$\theta = (T - T_0) / \Delta T$; $\rho = \rho / (\rho_{ж} \bar{w}^2)$; $Re = \rho_{ж} \bar{w} l / \mu$; $Da = k / l^2$;

$Gr = g \beta \rho_{ж}^2 l^3 \Delta T / \mu^2$; $H = h / l$; $Er = \mu c_{pж} / \lambda_{ж}$;

$\Lambda = \lambda_s / \lambda_{ж}$; $\kappa_p = (\rho c_p)_T / (\rho c_p)_{ж}$;

$l, \bar{w}, \Delta T$ - масштабные величины; C - коэффициент инерции; k - проницаемость среды; ε - пористость; индекс "ж", "Т", "с" - жидкая, твердая фазы и эквивалентная величина, соответственно.

В случае $\varepsilon = 1, Da = \infty, C = 0, \kappa_p = 1$ уравнения системы (9) описывают процессы гидродинамики и теплообмена в жидкостях. Для твердых тел $\varepsilon \rightarrow 0, Da(\varepsilon) \rightarrow 0$, в то же время стремление к нулю этих параметров происходит так, что $Da/\varepsilon^2 \rightarrow 0$, и в этом случае уравнения движения (9) переходят в тождества $U = V = 0$.

которые и дадут нулевое распределение компонент вектора скорости в подобластях расчетной области D , занятых твердой фазой. Дискретный аналог уравнения энергий при этом автоматически преобразуется в дискретный аналог уравнения теплопроводности. Идентификация же того или иного процесса и физических свойств веществ в различных подобластях расчетной области осуществляется заданием значений параметров ε , D_A , K_p , λ , которые могут вводиться в память ЭВМ уже на этапе построения конечно-элементной сетки.

Алгоритм решения двумерных задач гидродинамики и конвективного теплообмена построен на основе совместного применения методов конечных разностей (дискретизация уравнений переноса по времени) и элементов (аппроксимация решения по пространственным переменным) как процедура раздельного определения полей компонент вектора скорости, давления и температуры путем итерационного поиска поправок искомым величин. При этом выделяются два этапа вычислений – глобальные и локальные итерации. Глобальные итерации используются как метод решения систем нелинейных уравнений путем их линеаризации на каждом временном слое по значениям компонент вектора скорости, известным с предыдущего шага вычислений. Локальные – для нахождения полей скорости, давления и температуры на каждой глобальной итерации.

Так, линеаризация уравнений движения осуществляется путем определения сомножителей в конвективных членах в соответствии с равенствами

$$\tilde{U} = (1-\alpha)U^n + \alpha U^{n+1,S}; \quad \tilde{V} = (1-\alpha)V^n + \alpha V^{n+1,S},$$

где U^n, V^n – значения компонент вектора скорости на предыдущем временном слое; $U^{n+1,S}, V^{n+1,S}$ – компоненты скорости, рассчитанные на предыдущей глобальной итерации с номером S ; α – параметр ($0 < \alpha \leq 1$).

При определении U, V, p на этапе локальных итераций компоненты вектора скорости и давление представляются как

$$U = U' + U''; \quad V = V' + V''; \quad p = p' + p'',$$

где U', V' находятся в результате решения системы уравнений движения с исходными краевыми условиями по заданному (с предыдущей глобальной итерации, например) полю давления p' . Поправки U'', V'', p'' находятся итерационно как решение системы уравнений движения и неразрывности с однородными начальными

и граничными условиями. При этом уравнение для определения поправок давления строится на основе уравнения неразрывности и его элементный аналог (в декартовой системе координат, например) имеет вид

$$r \left[\frac{\partial^2(\delta p)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\delta p)}{\partial y^2} \right] = \nu_p \left[\frac{\partial(U' + \psi_U)}{\partial x} + \frac{\partial(V' + \psi_V)}{\partial y} \right],$$

где $r = \varepsilon Re [1/\Delta t + \varepsilon Re (1/Re + C\sqrt{Da}|\tilde{W}|)/Da]^{-1}$;

ν_p - параметр нижней релаксации ($0 < \nu_p < 1$);

ψ_U, ψ_V - аппроксимационные зависимости функций U'' и V'' на элементах, построенные в соответствии с (2); q - номер предыдущей локальной итерации.

Окончание расчетов на локальных итерациях производится при достижении заданной точности вычисления поправки давления δp (рассматривается как аналог невязки уравнения неразрывности). Расчет на глобальных итерациях заканчивается по достижении заданной точности для значений компонент вектора скорости на расчетном временном слое.

В данном разделе рассмотрены вопросы сходимости вычислительных процессов как на этапе глобальных, так и на этапе локальных итераций. Показана возможность получения сходящихся решений, определены способы ее реализации за счет выбора параметров ν_p и α . Показано, что условием сходимости глобальных итераций является требование положительной определенности матрицы системы алгебраических уравнений относительно узловых неизвестных компонент вектора скорости, а также получены неравенства, которым должны удовлетворять параметры краевой задачи, чтобы это условие выполнялось. Так, для случая решения задач переноса в пористых средах должно выполняться неравенство

$$\frac{\Delta t Re^2 \sup_{\mathcal{D}} [(U^{n+1,S})^2 + (V^{n+1,S})^2]}{Da + \varepsilon \Delta t} < 2 \frac{\varepsilon^2}{Da},$$

а при рассмотрении задач переноса в жидкостях ($\varepsilon \rightarrow 1, Da \rightarrow \infty$) -

$$\Delta t Re^2 \sup_{\mathcal{D}} [(U^{n+1,S})^2 + (V^{n+1,S})^2] < 2,$$

где $\mathcal{D}$ - расчетная область. Записи этих неравенств в терминах сеточных параметров, а именно

$$Re_\Delta^2 K_\Delta / (Re_\Delta Da_\Delta + \varepsilon K_\Delta) < 2\varepsilon^2 / Da_\Delta,$$

$$Re_\Delta K_\Delta < 2$$

(здесь $Re_\Delta = \rho \omega_{\Delta} h_\Delta / \mu$, $K_\Delta = \Delta T \omega_{\Delta} / h_\Delta$, $Da_\Delta = k / h_\Delta^2$ - сеточные (элементные) числа Рейнольдса, Куранта и Дарси, соответственно; $\omega_{\Delta}^2 = (u^{n+1, s})_\Delta^2 + (v^{n+1, s})_\Delta^2$, h_Δ - диаметр элемента; ΔT - шаг сетки по времени), можно расценивать как условия, которые необходимо выполнять при проведении пространственно-временной дискретизации расчетной области с целью получения сходящихся решений.

Тестирование комплексов программ, реализующих представленные алгоритмы решения двумерных задач, проводилось в результате расчетов полей скорости, давления и температуры в процессах свободной и вынужденной конвекции в различных двумерных областях. В качестве тестовых выбирались задачи, для которых известны аналитические или численные решения, либо имеются данные экспериментальных исследований. Так, были получены решения следующих краевых задач гидродинамики и теплообмена: о свободной конвекции в замкнутой квадратной полости при различных числах Грасгофа; о свободной конвекции в замкнутой цилиндрической емкости, заполненной тепловыделяющим газом; о течении жидкости в квадратной камере с движущейся стенкой для различных чисел Рейнольдса; о течении жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами, один из которых вращается; о вынужденном течении жидкости в плоском и осесимметричном каналах с препятствием и о течении в плоском канале с обращенной назад ступенькой; о течении жидкости в плоском канале с проницаемыми стенками.

Сравнение расчетных результатов с известными свидетельствами об их хорошем согласовании. Решение же задач на различных конечноэлементных сетках позволило получить апостериорные оценки, которые показали второй порядок точности метода.

Результаты теоретического исследования алгоритмов и тестирование дали основания для использования реализующих их комплексов программ с целью решения прикладных задач гидродинамики и теплообмена в двумерных постановках. Так, в данном разделе представлены результаты численного решения задачи о течении и теплообмене во вращающемся плоском тупиковом канале с проницаемой стенкой, а также сопряженной нестационарной задачи о сво-

бодной конвекции в осесимметричном теле сложной геометрической формы, которое находится в изменяющемся во времени поле гравитационной силы. Некоторые результаты решения задачи о течении жидкости в тупиковом канале для случаев задания различных значений параметра его вращения представлены на рис 1,2.

В третьем разделе работы представлен алгоритм решения трехмерных задач гидродинамики и теплообмена во вращающихся каналах сложного поперечного сечения (см. рис. 3а). Такие каналы являются конструктивными элементами систем охлаждения различных узлов энергетического оборудования, двигательных установок, и задача численного моделирования протекающих в них процессов переноса импульса и энергии является одной из актуальных проблем вычислительной гидродинамики и теплофизики.

Математическая модель процессов переноса во вращающихся каналах в данной работе строилась на основе параболизированных уравнений движения и энергии, что дало возможность создания экономичного маршевого алгоритма расчета параметров течения и теплообмена. Цели обеспечения экономичности вычислений подчинен и выбор комбинации методов, положенных в основу этого алгоритма. Он представляет собой совместное применение метода конечных разностей, используемого для аппроксимации в уравнениях переноса производных по времени и по продольной координате, и метода конечных элементов – для дискретизации расчетной области в плоскостях сечений каналов и аппроксимации решения по пространственным "поперечным" координатам. Такая комбинация методов позволяет сохранить требования по необходимому для расчетов объему памяти ЭВМ на уровне ее объемов при решении двумерных задач переноса.

Аппроксимация функций на элементах в данном случае осуществляется на основе интерполянтов, строящихся как суперпозиция частных решений неоднородных модельных уравнений переноса (1), источники членов которых представляют собой суммы значений определяемых в центрах масс треугольников компонент действующей в потоке силы Кориолиса и градиента модифицированного давления:

$$Q_{U_0} = -\partial \tilde{P} / \partial x - \bar{R}_0 (f_y W_0 - f_z V_0) + F_{Tx0};$$

$$Q_{V_0} = -\partial \tilde{P} / \partial y - \bar{R}_0 (f_z U_0 - f_x W_0) + F_{Ty0};$$

$$Q_{W_0} = -\partial \tilde{P} / \partial z - \bar{R}_0 (f_x V_0 - f_y U_0) + F_{Tz0};$$

где $\tilde{p} = [\rho - \rho(\vec{r} \times \vec{\omega})^2/2]/(\rho \omega^2)$; $\vec{r}$ - радиус-вектор частицы шидкости, перпендикулярный оси вращения канала; $\vec{\omega}$ - вектор угловой скорости вращения канала; U, V, W - компоненты вектора скорости; r_x, r_y, r_z - компоненты единичного вектора $\vec{\omega}/|\vec{\omega}|$; $R_0 = 2|\vec{\omega}|d/\omega$; d - характерный линейный размер сечения канала; ω - средняя скорость течения шидкости; $x = x/d, y = y/d, z = z/d$; $F_{rxg}, F_{ryg}, F_{rzg}$ - компоненты массовой силы, природа которой не обусловлена эффектом вращения канала.

Алгоритм вычислений построен на основе допущения, что давление $\tilde{p}$ в потоке шидкости представимо в виде суммы функций $\rho(x, y, t)$ - давление в плоскости сечения канала и $\tilde{p}(z, t)$ - осредненное по сечению канала давление. Последовательность расчета узловых значений вектора скорости, давления ρ , а также значения градиента давления $\tilde{p}$ в направлении продольной оси (на расчетном слое по времени и в расчетном сечении) представляет собой двухуровневую процедуру итерационных вычислений. На первом уровне (глобальные итерации) осуществляется линеаризация системы уравнений движения путем определения компонент вектора скорости в их конвективных членах в виде линейных комбинаций значений этих переменных, известных с предыдущего расчетного сечения и предыдущей глобальной итерации:

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= (1-\alpha)U_k^{n+1} + \alpha U_{k+1, g}^{n+1}; \quad \tilde{V} = (1-\alpha)V_k^{n+1} + \alpha V_{k+1, g}^{n+1}; \quad \tilde{W} = \\ &= (1-\alpha)W_k^{n+1} + \alpha W_{k+1, g}^{n+1}, \text{ где } n+1, k+1 - \text{номера расчетных моментов времени и сечения канала; } g - \text{номер предыдущей глобальной итерации; } 0 < \alpha \leq 1. \end{aligned}$$

Внутри каждого шага первого уровня вычислений проводятся итерационные вычисления узловых значений искомым величин (локальные итерации, второй уровень). Итерационный характер этих расчетов обусловлен как взаимосвязанностью уравнений движения, так и стремлением организации раздельного определения компонент вектора скорости, давления и его градиента. Искомые величины представляются в виде $U = U' + U'', V = V' + V'', W = W' + W'', \rho = \rho' + \rho'', \partial \tilde{p} / \partial z = (\partial \tilde{p} / \partial z)' + (\partial \tilde{p} / \partial z)''$, где $\rho', (\partial \tilde{p} / \partial z)'$ - заданные (с предыдущей глобальной итерации, например) распределения давления и его градиента. Составляющие вектора скорости U', V', W' определяются в результате решения системы уравнений движения с исходными начальными и граничными условиями. Поправки U'', V'', W'' и ρ'' находятся (при однородных

краевых условиях) из системы уравнений

$$\frac{U''}{\Delta t} + \tilde{V}_W U'' = \frac{1}{Re} \bar{\nabla}^2 U'' - \frac{\partial \rho''}{\partial x} - R_0 (\gamma_x W'' - \gamma_z V'');$$

$$\frac{V''}{\Delta t} + \tilde{V}_W V'' = \frac{1}{Re} \bar{\nabla}^2 V'' - \frac{\partial \rho''}{\partial y} - R_0 (\gamma_z U'' - \gamma_x W'');$$

$$\frac{W''}{\Delta t} + \tilde{V}_W W'' = \frac{1}{Re} \bar{\nabla}^2 W'' - \left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \right)'' - R_0 (\gamma_x V'' - \gamma_y U'');$$

$$\partial U'' / \partial x + \partial V'' / \partial y + W'' / \partial z = -(\partial U' / \partial x + \partial V' / \partial y + \partial W' / \partial z),$$

а для определения $(\partial \bar{\rho} / \partial z)''$ получено балансовое по расходу соотношение

$$-\left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \right)'' = \frac{\alpha_W}{S} \left[M \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{\tilde{W}_z}{\partial z} \right) + R_0 \iint_D (\gamma_x V'' - \gamma_y U'') dD \right].$$

Здесь $\tilde{V}_W = \tilde{U} \partial / \partial x + \tilde{V} \partial / \partial y + \tilde{W} / \partial z$; $\bar{\nabla}^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$; $\Delta t, \partial z$ — шаги разностной сетки по времени и координате z ;

$$M = R - \iint_D W' dD; \quad R = \iint_D W dD \quad - \text{расход шидкости};$$

S — площадь сечения канала (области D); $\tilde{W}_z = (\iint_D \tilde{W} dD) / S$; α_W — релаксационный параметр ($\alpha_W > 1$). Рекуррентные соотношения нахождения поправок ρ'' и $(\partial \bar{\rho} / \partial z)''$ имеют вид

$$\left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \right)'' = \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \right)''_i; \quad W'_{k+1} = W'_k + W''_k; \quad \left| \left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \right)''_k \right| \leq \varepsilon_{\bar{\rho}}, \quad k=1,2,\dots$$

и $\rho''_m = \rho''_{m-1} + \delta \rho_m$ ($\rho''_0 = 0$, m — номер локальной итерации). Поле давления $\delta \rho_m$ находится в результате решения уравнения Пуассона (строящегося на основе уравнения неразрывности), элементный аналог которого имеет вид

$$\left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{\tilde{W}_z}{\partial z} \right)^{-1} \bar{\nabla}^2 (\delta \rho_m) = \gamma_p \left[\frac{\partial (U' + \varphi_{Um})}{\partial x} + \frac{\partial (V' + \varphi_{Vm})}{\partial y} + \frac{\partial (W' + W'')}{\partial z} \right],$$

где $\varphi_{Um}, \varphi_{Vm}$ — аппроксимационные зависимости для составляющих вектора скорости U''_m, V''_m ; $0 < \gamma_p < 1$.

Расчеты на шаге выполнения локальных итераций прекращаются по достижению необходимой точности вычисления давления и его градиента, на шаге глобальных итераций — точности вычисления

компонент вектора скорости.

Проведенное в этом разделе исследование сходимости решений на этапах локальных и глобальных итераций позволило получить априорные оценки для параметра нижней релаксации γ_p и параметра α , используемого в качестве веса при линеаризации уравнений движения, которые свидетельствуют о возможности реализации сходящихся решений. Как и в случае двумерных задач, получены неравенства, связывающие параметры математической модели и сеточные параметры ее дискретного аналога, в соответствии с которыми необходимо согласовывать шаги разностной сетки по времени, по продольной координате, а также размеры конечно-элементной сетки с целью получения сходящихся решений.

Тестирование комплекса программ, реализующего представленный в работе алгоритм расчета полей скорости, давления и температуры при течении жидкостей во вращающихся каналах сложного поперечного сечения, проводилось путем численного решения задач гидродинамики и теплообмена в каналах квадратного, полукруглого, треугольного сечений, в продольно обтекаемых пучках стержней для предельного случая – без учета эффектов вращения, а также во вращающихся каналах прямоугольного сечения.

Сравнение расчетных данных с известными свидетельствует об их хорошем согласовании, апостериорные оценки погрешностей показали, что алгоритм имеет второй порядок точности по координатам в плоскостях сечений каналов и первый по продольной координате.

В этом же разделе диссертации представлены результаты решения прикладных задач гидродинамики и теплообмена во вращающихся вокруг произвольно ориентированной в плоскости входного сечения оси каналах квадратного, полукруглого и треугольного сечений. В ходе численных расчетов анализировалось влияние ориентации оси вращения на структуру течения и теплообмен на начальных гидродинамических и тепловых участках каналов. Эти задачи решены в данной работе впервые. На рис. 4-6 приведены отдельные результаты расчетов течения и теплообмена во вращающихся каналах треугольного и квадратного сечений.

Четвертый раздел диссертации посвящен разработке математических моделей и алгоритмов численного решения трехмерных краевых задач гидродинамики и теплообмена в скрученных каналах сложного сечения и каналах с изменяющейся по длине геометрией сечений (см. рис 3 б, в). Актуальность рассмотрения этой проблемы обусловлена, с одной стороны, широким использованием та-

ких каналов в качестве конструктивных элементов теплообменного оборудования, вентиляции, коллекторов, с другой, — отсутствием системных подходов численного моделирования процессов переноса в них.

Математическая модель течения и теплообмена в скрученных каналах строилась с использованием вращающейся (жестко связанной с поперечными сечениями) системы координат. Уравнения переноса импульса и энергии в случае каналов с изменяющейся по длине геометрией сечений преобразовывались путем замены переменных таким образом, что законы трансформации геометрических размеров сечений учитывались формой записи уравнений, а расчетной по длине канала оставалась область его входного сечения. Использование локальных координат в обоих случаях позволило избежать преобразований переменных на этапах дискретизации расчетных областей и построения дискретных аналогов уравнений переноса и использовать для решения этих задач подход реализации МКЭ, во многом схожий с алгоритмом реализации метода для прямых каналов постоянного сечения. Уравнения процессов переноса были получены (безразмерная форма) в виде

— для скрученных каналов:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (\vec{N} \cdot \nabla) U + \frac{U}{Re} \left(\frac{\partial \theta}{\partial Z} \right)^2 = \frac{1}{Re} \left\{ (\bar{V}^2 + \tilde{V}^2) U + \frac{\partial \theta}{\partial Z} \left[Re W V - 2 \left(\tilde{V} U + \frac{\partial U}{\partial Z} \right) \right] - V \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} \right\} - \frac{\partial \rho}{\partial x} + F_x;$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (\vec{N} \cdot \nabla) V + \frac{V}{Re} \left(\frac{\partial \theta}{\partial Z} \right)^2 = \frac{1}{Re} \left\{ (\bar{V}^2 + \tilde{V}^2) V - \frac{\partial \theta}{\partial Z} \left[Re W U - 2 \left(\tilde{V} U + \frac{\partial U}{\partial Z} \right) \right] + U \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} \right\} - \frac{\partial \rho}{\partial y} + F_y;$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + (\vec{N} \cdot \nabla) W = \frac{1}{Re} (\bar{V}^2 + \tilde{V}^2) W - \tilde{V} \rho - \frac{\partial \rho}{\partial z} + F_z;$$

$$\operatorname{div} \vec{N} = 0;$$

$$\rho r \left[\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\vec{N} \cdot \nabla) \theta \right] = \frac{1}{Re} (\bar{V}^2 + \tilde{V}^2) \theta;$$

$$\{t > 0; Z > 0; x, y \in D\}$$

$$\begin{aligned}\vec{W} &= \vec{U}\vec{i} + \vec{V}\vec{j} + W\vec{k}; \quad \vec{v} = \vec{i}\partial/\partial x + \vec{j}\partial/\partial y + \vec{k}\partial/\partial z; \\ \vec{v}^2 &= \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2; \quad \vec{v} = \frac{\partial}{\partial z} (y\partial/\partial x - x\partial/\partial y); \\ \hat{U} &= U + yW\partial/\partial z; \quad \hat{V} = V - xW\partial/\partial z,\end{aligned}$$

$q = q(z)$ - параметр закрутки канала,

- для каналов с изменяющейся по длине геометрией сечений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial(\hat{U}U)}{\partial x} + \frac{\partial(\hat{V}U)}{\partial y} + f_x f_y \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{NU}{f_x f_y} \right) &= \frac{1}{Re} (\vec{v}^2 + \vec{v}^2) U - \\ &- f_x \partial P / \partial x + F_x;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial(\hat{U}V)}{\partial x} + \frac{\partial(\hat{V}V)}{\partial y} + f_x f_y \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{NV}{f_x f_y} \right) &= \frac{1}{Re} (\vec{v}^2 + \vec{v}^2) V - \\ &- f_y \partial P / \partial y + F_y;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial(\hat{U}W)}{\partial x} + \frac{\partial(\hat{V}W)}{\partial y} + f_x f_y \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{W^2}{f_x f_y} \right) &= \frac{1}{Re} (\vec{v}^2 + \vec{v}^2) W - \\ &- \vec{v} \rho - \partial P / \partial z + F_z;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{U}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{V}}{\partial y} + f_x f_y \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{W}{f_x f_y} \right) &= 0; \\ \rho \left[\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial(\hat{U}\theta)}{\partial x} + \frac{\partial(\hat{V}\theta)}{\partial y} + f_x f_y \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{N\theta}{f_x f_y} \right) \right] &= \frac{1}{Re} (\vec{v}^2 + \vec{v}^2) \theta,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\hat{U} &= f_x U + x f'_x W / f_x; \quad \hat{V} = f_y V + y f'_y W / f_y; \\ \vec{v} &= x \frac{f'_x}{f_x} \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{f'_y}{f_y} \frac{\partial}{\partial y}; \quad f'_x = \frac{\partial f_x}{\partial z}; \quad f'_y = \frac{\partial f_y}{\partial z};\end{aligned}$$

$f_x = f_x(z)$, $f_y = f_y(z)$ - функции, характеризующие сжатие (растяжение) размеров сечений канала по переменным x и y соответственно.

Сохраняя в рассматриваемых случаях единый концептуальный подход построения маршевых алгоритмов решения трехмерных задач гидродинамики и теплообмена в каналах, дифференциальные уравнения представленных математических моделей были частично параметризованы. Как и ранее, расчетный алгоритм строился на основе совместного применения методов конечных элементов и раз-

ностей. Поскольку дифференциальные операторы уравнений движения и энергии содержат смешанные производные, а коэффициенты переноса в них являются функциями координат, были рассмотрены отличные от использованных в разд. 2,3 модельные уравнения конвективно-диффузионного переноса и получены модифицированные аппроксимационные зависимости для функций на элементах. Так, для обоих классов краевых задач модельное уравнение переноса на элементах может быть записано в виде

$$\hat{U}_0 \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{V}_0 \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{Re_{x0}} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{2}{Re_{xy0}} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{1}{Re_{y0}} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + Q_0.$$

Здесь $\hat{U}_0$ и $\hat{V}_0$ — отнесенные к центрам масс треугольников значения функций $\hat{U}$ и $\hat{V}$, параметры Re_{x0} , Re_{xy0} , Re_{y0} в случае скрученных каналов определяются как

$$Re_{x0} = \frac{Re}{1 + g'^2 y_0^2}; \quad Re_{xy0} = \frac{Re}{g'^2 x_0 y_0}; \quad Re_{y0} = \frac{Re}{1 + g'^2 x_0^2}$$

и в случае каналов с изменяющейся геометрией сечений как

$$Re_{x0} = \frac{Re}{f_x^2 + (x_0 f_x' / f_x)^2}; \quad Re_{xy0} = -\frac{f_x f_y Re}{f_x' f_y' x_0 y_0}; \quad Re_{y0} = \frac{Re}{f_y^2 + (y_0 f_y' / f_y)^2}.$$

Аппроксимация f на элементах строилась в виде (1), где

$$\xi_1(x, y) = \frac{1}{Re_{x0} \hat{U}_0} \{ \exp [Re_{x0} \hat{U}_0 (x - x_0)] - 1 \};$$

$$\xi_2(x, y) = \frac{1}{Re_{y0} \hat{V}_0} \{ \exp [Re_{y0} \hat{V}_0 (y - y_0)] - 1 \};$$

$$\hat{\eta} = (\varphi + Re_\Delta \psi) / (1 + Re_\Delta); \quad Re_\Delta = Re_\Sigma (\hat{U}_0^2 + \hat{V}_0^2)^{1/2} \Delta;$$

$$Re_\Sigma = \frac{\hat{U}_0^2 + \hat{V}_0^2}{\hat{U}_0^2 / Re_{y0} + 2 \hat{U}_0 \hat{V}_0 / Re_{xy0} + \hat{V}_0^2 / Re_{x0}}$$

$$\varphi = -\frac{Re_\Sigma}{2} [\hat{U}_0 (y - y_0) - \hat{V}_0 (x - x_0)]^2 / (\hat{U}_0^2 + \hat{V}_0^2);$$

$$\psi = [\hat{U}_0 (x - x_0) + \hat{V}_0 (y - y_0)] / (\hat{U}_0^2 + \hat{V}_0^2).$$

В данном разделе описаны алгоритмы итерационного решения краевых задач течения жидкости и теплообмена в рассматриваемых каналах, отмечены отличия их реализации от случая расчетов для

вращающихся каналов сложного сечения. Отмечены также особенности процедуры теоретического исследования вопросов сходимости решений на локальных и глобальных итерациях, приведены неравенства, связывающие сеточные параметры краевых задач и определяющие условия реализации сходящихся решений.

Тестирование реализующих представленные алгоритмы комплексов программ проводилось по схеме выявления свойств численных решений в предельных случаях постановок краевых задач, а также путем сравнения расчетных значений с известными данными численных исследований и аналитическими решениями. Результаты тестирования позволили сделать вывод о хорошей точности получаемых результатов и возможности использования комплексов программ при решении практически важных задач переноса импульса и энергии в скрученных каналах произвольного поперечного сечения и каналах с изменяющейся по длине геометрией сечений.

В этом разделе приведены данные расчетов полей скорости, давления и температуры на начальных участках скрученного канала квадратного сечения и в трубе со скрученной лентой, а также в канале, геометрические размеры сечений которого одновременно увеличиваются и уменьшаются по различным направлениям (координатам) вдоль продольной оси (сечение на входе в канал имеет форму квадрата). Эти задачи решены в данной работе впервые. С целью иллюстрации возможностей комплексов программ, на рис. 7 представлены расчетные параметры течения в линейно расширяющемся по длине канале квадратного сечения.

В пятом разделе работы представлено описание пакета прикладных программ численного решения двумерных и трехмерных задач конвективно-диффузионного переноса в областях сложной геометрической формы и каналах сложного поперечного сечения. Структурно модули пакета объединены в проблемно ориентированные комплексы программ, реализующие описанные в разд. 2-4 алгоритмы расчетов. На ЭВМ данные комплексы программ используются независимо друг от друга. Общей особенностью их работы является резервирование внешней памяти вычислительной машины на магнитных дисках, которая позволяет экономить оперативную память ЭВМ, и сократить время расчетов при восстановлении матриц систем разрешающих уравнений МКЭ при переходе с одной локальной итерации на другую. Кроме того, реализуются возможности многократного прерывания расчетов и их возобновления с места останова программы без значительных потерь времени вычислений и информации, выбора формы обработки расчетных данных, коррек-

ции расчетных схем и т.д.

В данном разделе описаны также подпрограммы математического обеспечения реализации МКЭ в пакете программ (подпрограммы дискретизации расчетных областей, формирования матриц систем разрешающих уравнений, учета граничных условий Дирихле, решения систем алгебраических уравнений), приведены блок-схемы комплексов программ решения двумерных задач конвективно-диффузионного переноса и трехмерных задач во вращающихся каналах произвольного сечения.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. В диссертации теоретически обосновано и развито перспективное направление численного моделирования процессов гидродинамики и конвективного теплообмена на основе модификации метода конечных элементов, базирующейся на новом подходе построения аппроксимационных зависимостей функций на треугольных элементах.

2. Построены новые интерполанты функций в декартовой и цилиндрической системах координат, обоснована целесообразность их использования по сравнению с традиционной полиномиальной аппроксимацией функций на конечных элементах.

3. Разработаны алгоритмы и реализующие их комплексы программ численного решения в естественных переменных нестационарных задач переноса импульса и энергии в двумерных плоских и осесимметричных областях сложной геометрической формы. Положенная в основу формулировок математических моделей физических процессов обобщенная форма записи уравнений краевых задач, проведенное теоретическое исследование сходимости итерационных решений, а также результаты тестирования комплексов программ дают основание утверждать, что в работе представлен эффективный метод решения широкого класса двумерных задач гидродинамики и теплообмена.

4. На основе совместного применения предлагаемой модификации МКЭ и метода конечных разностей разработан и теоретически обоснован экономичный по затратам памяти ЭВМ маршевый алгоритм решения нестационарных трехмерных задач гидродинамики и теплообмена во вращающихся каналах.

5. Создан комплекс прикладных программ расчета характеристик течения и теплообмена во вращающихся каналах произвольного сечения, тестирование которого свидетельствует о высокой

точности получаемых численных результатов и дает основание считать возможным использование этого комплекса при проведении исследовательских расчетов.

6. Разработаны удобные для алгоритмизации вычислений математические модели нестационарных трехмерных процессов переноса импульса и энергии в скрученных и винтообразных каналах сложного поперечного сечения и каналах с изменяющейся по длине геометрической формой сечений.

7. Получены новые модельные уравнения конвективно-диффузионного переноса в скрученных (винтообразных) каналах и каналах с изменяющейся по длине геометрией сечений, построены модифицированные интерполанты функций на элементах.

8. Разработаны экономичные маршевые алгоритмы расчета течений и теплообмена в скрученных (винтообразных) каналах произвольного сечения и каналах с изменяющейся по длине геометрией сечений. Результаты тестирования реализующих алгоритмы комплексов программ свидетельствуют о достоверности расчетных результатов и возможности использования данных комплексов в практике численного моделирования задач механики жидкости.

9. Разработанные комплексы программ успешно применены для решения новых практически важных двумерных и трехмерных задач механики жидкости и теплообмена и использованы при проведении расчетов в ряде организаций.

10. Материалы диссертационной работы включены в учебные пособия "Метод конечных элементов в задачах тепломассопереноса" (соавтор А.А. Рядно) - Днепропетровск: ДГУ, 1986 г., "Реализация метода конечных элементов на ЭВМ при решении задач тепломассопереноса" (соавтор А.А. Рядно) - Днепропетровск: ДГУ, 1987 г., "Гидродинамика и теплообмен во вращающихся трубах и каналах" (соавторы Е.М. Ракита, А.А. Рядно) - Днепропетровск: ДГУ, 1991 г. и используются в учебном процессе в Днепропетровском государственном университете.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ ИЗЛОЖЕНО В РАБОТАХ

1. Кочубей А.А., Давыдова Н.Н. Алгоритм дискретизации области для метода конечных элементов // Математические методы механики жидкости и газа. - Днепропетровск: ДГУ, 1981. - С.74-76.

2. Кочубей А.А., Рядно А.А. Алгоритм совместного применения методов конечных элементов и разностей для решения нестационарных трехмерных задач переноса импульса, массы и энергии

при параболических течениях жидкости в каналах //Теплофизика высоких температур. - 1984. - Т. 22, N 4. -С. 715-719.

3. Кочубей А.А., Рядно А.А. Пакет прикладных программ расчета процессов тепло- и массопереноса в каналах сложной формы //Известия АН БССР. Серия физико-энергетических наук. - 1986. - N 2. -С. 60-63.

4. Кочубей А.А., Рядно А.А. Некоторые аспекты применения метода конечных элементов в задачах гидродинамики //Численное моделирование гидрогазодинамических течений. - Днепропетровск: ДГУ, 1987. -С. 110-116.

5. Кочубей А.А., Рядно А.А. Реализация метода конечных элементов на ЭВМ при решении задач тепломассопереноса. - Днепропетровск: ДГУ, 1987. - 60с.

6. Беляев Н.М., Кочубей А.А., Рядно А.А. Нестационарный теплообмен в каналах сложного сечения при аэродинамическом нагреве //Прикладные вопросы аэрогазодинамики. - Киев : Наукова думка, 1987. -С. 92-95.

7. Кочубей А.А., Ниценко О.В., Рядно А.А. Алгоритм метода конечных элементов для решения задач конвективного переноса в каналах //Математические методы тепломассопереноса. - Днепропетровск: ДГУ, 1987. -С. 43-47.

8. Кочубей А.А., Мельник С.Е., Рядно А.А. О выборе аппроксимационных функций при решении двумерных и осесимметричных задач конвективного переноса методом конечных элементов //Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. -Днепропетровск: ДГУ, 1988. -С. 8-12.

9. Ниценко О.В., Кочубей А.А., Рядно А.А. О конечноэлементном методе расчета течения несжимаемой жидкости в канале с переменным поперечным сечением //Гидродинамика и тепломассообмен летательных аппаратов. - Киев: Наукова думка, 1988. -С. 84-87.

10. Кочубей А.А., Мельник С.Е., Рядно А.А. Применение метода конечных элементов при численном моделировании процессов конвективного теплообмена в областях сложной геометрии //Тепломассообмен - МИФ: Избранные доклады Минского международного форума. (Секции 8,9 - Вычислительный эксперимент в задачах тепломассообмена и теплопроводность). -Минск, 1989. -С. 79-89.

11. Кочубей А.А. Алгоритм метода конечных элементов решения трехмерных задач гидродинамики в каналах сложного сечения //Инженерно-физический журнал. -1989. -Т.57, N 3. -С. 506-511.

12. Рядно А.А., Кочубей А.А., Ниценко О.В. О влиянии цент-

робежной силы на гидродинамику и теплообмен во вращающейся замкнутой полости //Известия высших учебных заведений. Энергетика. - 1990. - № 9. -С. 110.-112.

13. Кочубей А.А., Мельник С.Е., Рядно А.А. Применение метода конечных элементов при численном моделировании процессов конвективно-диффузионного переноса в осесимметричных областях //Теплофизика высоких температур.-1990.-Т.28, № 4.- С.742-746.

14. Кочубей А.А., Ракита Е.М., Рядно А.А. Численное моделирование конвективного переноса во вращающихся каналах сложного поперечного сечения методом конечных элементов //Промышленная теплотехника. - 1991. - Т.13, № 1. -С. 16-22.

15. Кочубей А.А., Ракита Е.М., Рядно А.А. Расчет гидродинамики и теплообмена во вращающихся каналах на основе метода конечных элементов //Сибирский физико-технический журнал.-1991.- Вып.1. -С. 129-130.

16. Кочубей А.А., Ракита Е.М., Рядно А.А. Исследование процессов гидродинамики и теплообмена во вращающемся канале с параболическим обводом границы на основе метода конечных элементов //Численные методы и математическое моделирование тепло-массопереноса. -Днепропетровск: ДГУ, 1991. -С. 4-10.

17. Кочубей А.А., Татарко Л.Г. Алгоритм численного исследования гидродинамики и теплообмена в каналах с изменяющейся по длине геометрией сечений на основе метода конечных элементов //Численные методы и математическое моделирование тепломассопереноса. -Днепропетровск: ДГУ, 1991. -С. 15-21.

18. Кочубей А.А., Ракита Е.М., Рядно А.А. Гидродинамика и теплообмен во вращающихся трубах и каналах. - Днепропетровск: ДГУ, 1991. - 99с.

19. Кочубей А.А., Татарко Л.Г. Алгоритм численного исследования гидродинамики и теплообмена в закрученном канале сложного сечения на основе метода конечных элементов //Инженерно-физический журнал. - 1991. -Т. 60, № 3. -С. 487-494.

20. Кочубей А.А., Рядно А.А. Численное моделирование процессов конвективного переноса на основе метода конечных элементов. -Днепропетровск: ДГУ, 1991. - 227с.

21. Численное моделирование двумерных и трехмерных задач конвективно-диффузионного переноса в областях сложной геометрии и каналах сложного сечения /А.А. Кочубей, С.Е. Мельник, Е.М. Ракита и др. //Тепломассообмен - МИФ -92. - 1992. - Т. 9, ч.1. -С. 111-119.

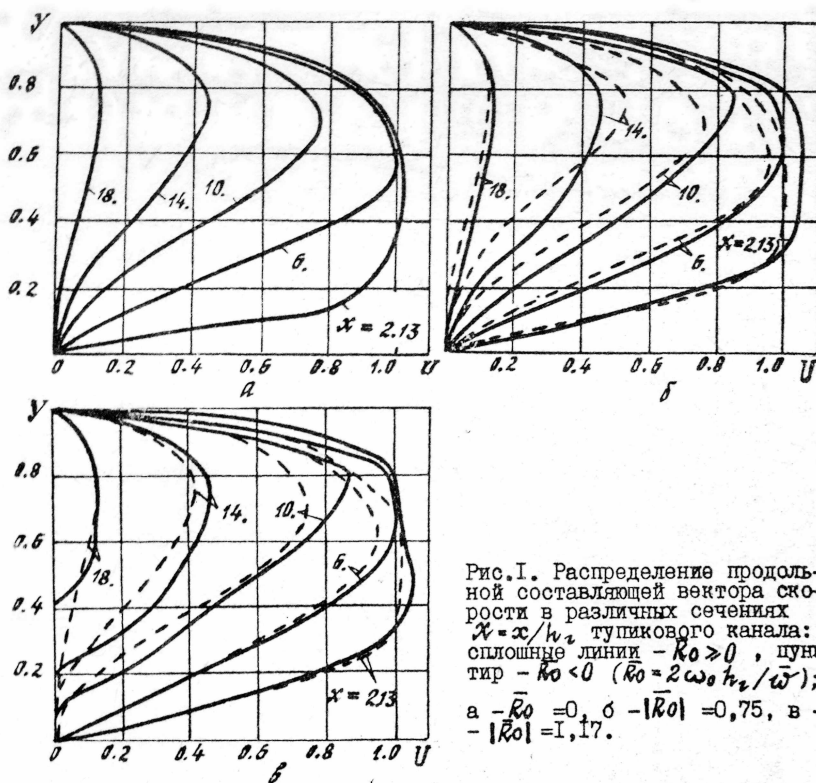


Рис.1. Распределение продольной составляющей вектора скорости в различных сечениях $x = x/h_2$ тупикового канала: сплошные линии $-Ro \geq 0$, пунктир $-Ro < 0$ ($Ro = 2\omega_0 h_2 / \bar{\omega}$); а $-Ro = 0$, б $-Ro = 0,75$, в $-Ro = 1,17$.

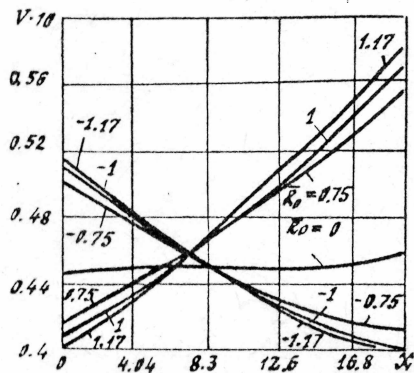


Рис.2. Изменение поперечной компоненты вектора скорости на внешней поверхности пористой стенки вращающегося тупикового канала.

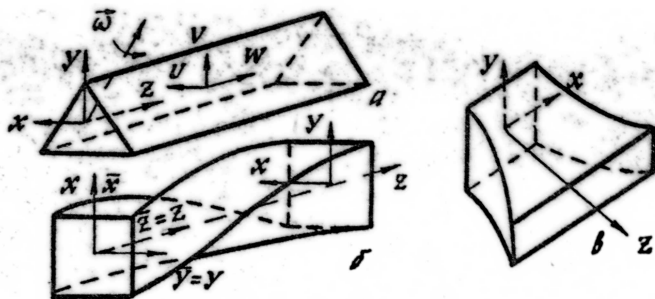


Рис.3. К вопросу о постановке трехмерных краевых задач переноса в каналах

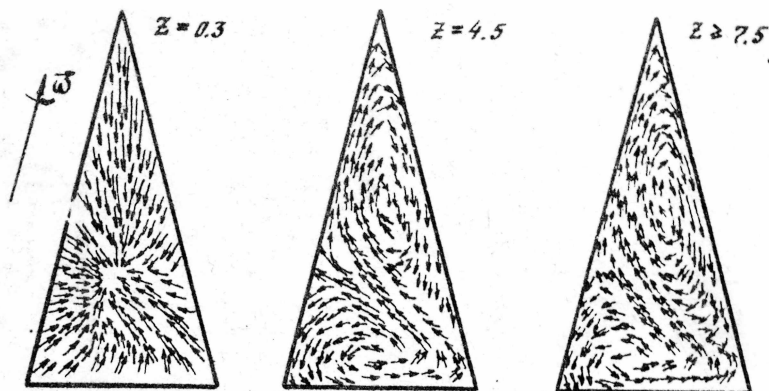


Рис.4. Проекция вектора скорости на плоскости поперечных сечений канала ($Re = 300, Ro = 1$)

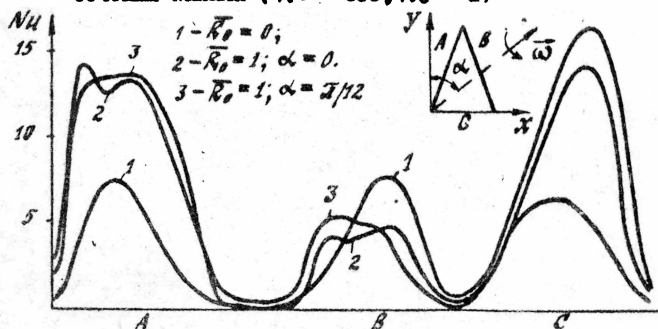


Рис.5. Распределение числа Нуссельта по развертке грани сечения канала в области стабилизации течения

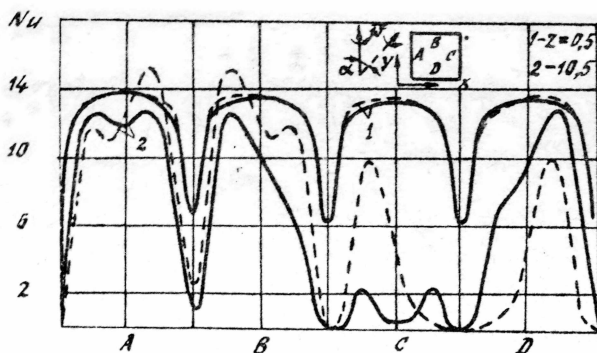


Рис.6. Распределение числа Нуссельта по развертке границы сечений канала: $\alpha = 0$ - сплошные линии, $\alpha = \pi/4$ - пунктир

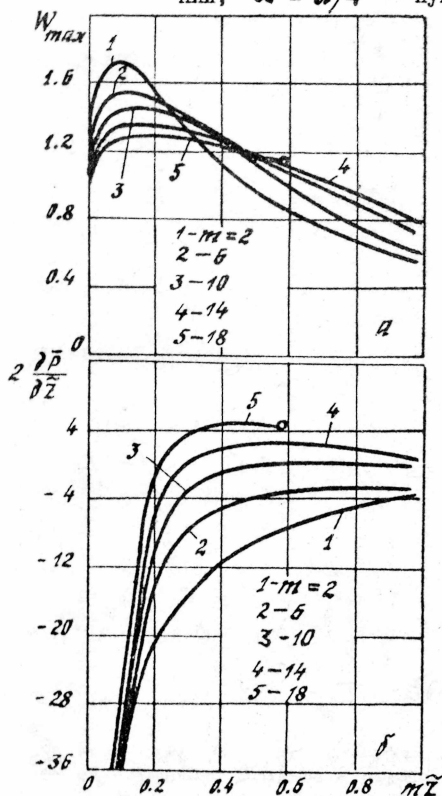


Рис.7. Изменение максимального значения продольной компоненты вектора скорости (а) и градиента давления (б) по длине канала ($f_x = f_y = (1 + m \tilde{Z})^{-1}$, $\tilde{Z} = Z/Re$),
о - точка разделения потока