

4555804

Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана

На правах рукописи
УДК 519.31

КАНЧАВЕЛИ Лиана Давидовна

**М О Д Е Л И
ПРОГНОЗИРОВАНИЯ НАДЕЖНОСТИ
БЕЗ ДЛИТЕЛЬНЫХ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫХ
ИСПЫТАНИЙ**

05.13.16 — Применение вычислительной техники,
математического моделирования и математических методов
в научных исследованиях

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 1997

На правах рукописи

УДК 519.31

КАНЧАВЕЛИ ЛИАНА ДАВИДОВНА

**МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ НАДЕЖНОСТИ БЕЗ ДЛИТЕЛЬНЫХ
ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ**

05.13.16 - Применение вычислительной техники, математического
моделирования и математических методов в научных исследованиях.

1555-804
НТБ МГТУ им. Н.Э. Баумана



1555804

Канчавели Л. Д. Модели прог.

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Л. Канчавели

**Работа выполнена в Московском государственном техническом
университете им. Н.Э. Баумана.**

Научный руководитель - д.т.н., профессор, академик Международной
славянской академии Карташов Г.Д.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор Кравченко В.Ф.;
кандидат физико-математических наук
Грошев А.Н.

Ведущая организация: 22 Центральный научно-исследовательский
испытательный институт Министерства Обороны РФ

Защита диссертации состоится _____ 1997 г. в 11.00 час. на заседании
диссертационного совета по защите докторских диссертаций Д053.15.12 при
Московском государственном техническом университете им. Н.Э.Баумана по
адресу: 107005 Москва, 2-я Бауманская ул., д.5.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Автореферат разослан « ____ » _____ 1997 г.

Ваш отзыв на автореферат в одном экземпляре, заверенный печатью
учреждения, просим высылать по адресу: 107005 Москва, 2-я Бауманская ул.,
д.5, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Ученому секретарю диссертационного совета.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д.ф.-м.н., профессор



ВОЛКОВ И.К.

Актуальность проблемы. Одной из центральных проблем теории надежности является проблема ускоренных испытаний. Сокращения продолжительности испытаний можно добиться разными способами. В данной диссертации рассматриваются ускоренные испытания, которые основаны на статистических методах прогнозирования. Решение проблемы ускоренных испытаний посвящено большое количество публикаций, исчисляемое тысячами. Поэтому отметим лишь некоторые из них. Это работы Г.В. Дружинина, Г.Д. Карташова, О.И. Тескина, А.Н. Яврияна, Б.С. Сотскова, С.Я. Гродзенского, А.И. Перроте, О.В. Гаскарова, В.Н. Федюнина, Я.А. Рипса, Ф. Розенблата. В большинстве публикаций по прогнозированию надежности разрабатывается один и тот же подход. Вначале устанавливают параметрическую модель, описывающую изменение во времени технических параметров $X(t)$. А затем, считая ее справедливой для других партий, оценивают неизвестные параметры модели и требуемый показатель надежности по результатам сокращенных испытаний. Для построения математической модели проводят предварительные испытания изделий в течении времени T , на которое в последующем будет осуществляться прогнозирование. В процессе испытаний измеряют значения технических параметров. По полученным данным, аппроксимируя реализации случайного процесса $X(t)$, подбирают математическую модель.

Такой подход (назовем его аппроксимацией по времени) был вполне приемлем на начальном этапе развития теории ускоренных испытаний, когда время T исчислялось сотнями часов. В связи с бурным развитием техники резко возросли требования к надежности изделий. Теперь для многих типов изделий время T исчисляется годами, а порой, и десятилетиями. В таких случаях практически невозможно, а точнее, бессмысленно проведение испытаний выборки в течении времени T . В связи с этим в теории надежности очень актуальной стала проблема сокращения длительности предварительных испытаний, несмотря на то, что еще не получены ответы на многие вопросы (особенно статистического характера), возникающие при построении методов

прогнозирования. Решению этой проблемы и посвящена настоящая диссертация.

Понятно, что сокращение продолжительности предварительных испытаний невозможно без привлечения дополнительной информации о технических и надежностных характеристиках изделий. Здесь возникает противоречивая ситуация. С одной стороны, хотелось, чтобы привлекалась минимальная априорная информация, но при этом метод ускоренных испытаний может, оказаться настолько «грубым», что он станет практически неприемлемым. С другой стороны, требование знание более подробной информации о надежности изделий сужает область применимости методов ускоренных испытаний.

Удачный компромисс был найден Г.Д. Карташовым, который предложил другой подход при построении математической модели. А именно: вместо аппроксимации по времени технических параметров использовать аппроксимацию по ансамблю. Он основан на следующем факте. Пусть $X_{[t, t+\tau]}(x)$ - множество значений технических параметров $X(t+\tau)$ в момент времени $t+\tau$ всех изделий, у которых $X(t) = x$. Доказано, что для представительной партии имеет место свойство вложенности $X_{[0, \tau]}(x) \supseteq X_{[t, t+\tau]}(x)$ для всех $t \geq 0, \tau \geq 0, x \in R_m$. Множества $X_{[0, \tau]}$ принято называть определяющим. Зная их, можно построить приближенные методы прогнозирования надежности, точнее, найти, так называемые, накрывающие множества $X_k^*(x)$, которым принадлежат значения $X(k\tau)$ технических параметров X в момент времени $k\tau, k = 1, 2, \dots$

Целью диссертации является:

- построение математической модели вложенных множеств, описывающей закон изменения во времени технических параметров изделий;
- исследование других моделей при наличии дополнительной информации о надежности изделий;
- разработка методов прогнозирования, основанных на этих моделях и не требующих проведения длительных предварительных испытаний;
- экспериментальное апробирование этих методов.

Основные задачи исследования состояли в следующем:

1. Нахождение определяющих множеств в рамках гауссовской, эллипсоидной, прямоугольной и линейной регрессионной моделях.
2. Определение накрывающих множеств в рамках указанных в п.1 моделей.
3. Оценка вероятности принадлежности технических параметров изделий определяющим множествам.
4. Оценка вероятности принадлежности допусковой области в момент времени T в рамках гауссовской модели.
5. Оценка средней наработки на отказ для случая, когда изменение во времени технического параметра описывается однородным в пространстве марковским процессом.
6. Нахождение нижней и верхней границ для ряда показателей надежности в рамках логарифмически нормальной модели.
7. Определение точечных и интервальных оценок вероятности безотказной работы изделий за время T .
8. Экспериментальное апробирование основных результатов диссертации.

Основные результаты диссертации, выносимые на защиту:

1. Показано, что как для гауссовской, так и линейно регрессионной моделей в качестве определяющих множеств, могут быть выбраны эллипсы рассеивания и прямоугольники со сторонами, параллельными координатным осям. При этом получаются подобные определяющие множества в том смысле, что от начальных значений технических параметров зависят лишь их центры, причем линейно.

2. Дано обобщение правила несколько сигм на многомерный случай. С помощью этого правила определена вероятность P , с которой двухмерный гауссовский вектор принимает значения в соответствующем прямоугольнике. Показано, что вероятность P зависит только от коэффициента корреляции r . Функция $P(r)$ является возрастающей при $r \geq 0$, причем значения $P(0)$ и $P(1)$ не существенно отличаются между собой, если использовать правило трех сигм.

3. Для двухмерной гауссовской модели (т.е. когда значения технических параметров в момент времени 0 и t распределены по нормальному закону)

разработан метод вложенных множеств, позволяющий оценить вероятность того, что в момент времени T прогнозируемые значения технических параметров принадлежат допусковой области.

4. Предложен метод экспресс оценок показателей надежности (средней наработки на отказ, вероятности безотказной работы) в рамках логарифмически нормальной модели.

5. Решена задача о нахождении границ для индивидуальной долговечности изделий, изменение во времени технических параметров которых, описывается однородным в пространстве марковским процессом. Благодаря этому может быть осуществлен отбор изделий с повышенной надежностью.

6. Установлены точечная и интервальная оценки надежности изделий, когда прогнозирование осуществлялось по методу вложенных множеств.

Достоверность и обоснованность полученных результатов подтверждается выбором достаточно общей математической модели, описывающей закон изменения во времени технических параметров, корректным использованием математического аппарата, совпадением частных выводов диссертации с известными результатами других авторов и их экспериментальным апробированием на ряде технических изделий: резисторах, вентиляторах и др.

Практическая ценность работы состоит в том, что теоретические и экспериментальные исследования позволили сократить в несколько раз продолжительность предварительных испытаний и исследований, на стадии которых проверяются правильность выбора математической модели и исходных предпосылок метода прогнозирования. Благодаря этому расширена область применимости методов ускоренных испытаний. Экспериментальное апробирование методов прогнозирования без длительных предварительных испытаний на резисторах и вентиляторах показало, что с помощью их можно в 5 - 25 раз сократить продолжительность испытаний на надежность. Полученные результаты использовались в РД В 319.01.XX. «Радиоэлектронная аппаратура и электрорадиоэлементы военного назначения. Типовые методики ускоренных испытаний на безотказность и долговечность.»

Диссертация выполнялась в рамках НИР «Мороз - 6» и «Оценка надежности и эффективности сложных систем при нестандартных дисциплинах обслуживания.» Шифр ГАСНТИ №27.43.15 (МГТУ им. Н.Э. Баумана).

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на межрегиональной научно-технической конференции «Энерго и ресурсосберегающие экологически чистые технологии, повышение конструктивно-технологических показателей качества промышленной продукции народного хозяйства РФ.» (г. Фрязино, 1995 г.), научно-технической конференции, посвященной 165-летию МГТУ им. Н.Э. Баумана (Москва, 1995 г.), на 52-ой научной сессии, посвященной дню Радио (Москва, 1997 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 4 научных работах.

Объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 101 наименования. Текст изложен на 134 странице, включая 22 рисунка и 9 таблиц.

Содержание работы

Во **введении** дается краткий обзор работ по проблеме ускоренных испытаний на надежность. Показывается, что большинство существующих методов прогнозирования требует проведения вначале длительных предварительных исследований, на стадии которых проверяется правильность выбранной математической модели. Формулируется решаемая в диссертации проблема, состоящая в сокращение продолжительности предварительных испытаний. Описаны ее цель, основные задачи исследований и их практическая значимость.

В **первой главе** вначале вводятся основные понятия и обозначения, которые используются в диссертации. Предполагается, что все испытания проводятся в, так называемом, нормальном режиме, указанном в нормативно-технической документации. Работоспособность изделий характеризуется набором технических параметров $X(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_m(t))$. Изделие

считается годным в момент времени t , если его параметры $X(t)$ принимают значения в допустимой области

$$a \leq X(t) \leq b. \quad (1)$$

Здесь $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ и $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ - соответственно нижние и верхние границы поля допуска.

Момент времени ξ , при котором впервые нарушается одно из неравенств (1), называется наработкой на отказ, а его функция распределения $F(t, c) = P(\xi < t) [P(t) = P(\xi > t)]$ - распределением отказов [безотказной работы] изделий за время t , а $T = E(\xi)$ - средней наработкой на отказ.

В первой главе решается задача о выборе определяющих множеств, знание которых необходимо для прогнозирования показателей надежности методом вложенных множеств. Сущность этого метода состоит в следующем. Пусть $t > 0, \tau > 0$ - некоторые моменты времени, а $X_{[t, t+\tau]}(x)$ - множество возможных значений технических параметров $X(t + \tau)$ всех изделий, у которых $X(t) = x, x \in R_m$. Г.Д. Карташовым было установлено, что для представительной партии справедливо свойство вложенности $X_{[0, t]}(x) \supseteq X_{[t, t+\tau]}(x)$ для любых $t \geq 0, \tau \geq 0$ и $x \in R_m$. Уточним понятие представительной партии. Согласно принципу инвариантности существует такой набор конструктивных параметров ω , начальные значения которого ω_0 однозначно определяют закон изменения во времени t технических параметров изделия с $\omega = \omega_0$. Обозначим Ω_t множество возможных значений конструктивных параметров партии изделий, испытанной в течении времени t . Партию считают представительной, если $\Omega_t \subseteq \Omega_0, \forall t \geq 0$.

На основе этого соотношения можно построить приближенный метод прогнозирования. Предположим, что имеется бесконечно большая партия изделий. Испытаем ее в течении некоторого времени τ , непрерывно наблюдая у каждого изделия значения его технических параметров. Тогда по полученным

данным, в принципе, можно найти множества $X_{[0,t]}(x)$. С помощью $X_{[0,t]}(x)$ легко определить множество

$$X_{(k+1)\tau}^*(x) = \bigcup_{x' \in X_{[0,t]}(x)} X_{k\tau}^*(x'), \quad k = 1, 2, \dots, \quad X_{k\tau}^*(x) = X_{[0,t]}(x), \quad (2)$$

которому будет принадлежать значение технических параметров $X(k\tau)$ изделия с $X(0) = x$, и тем самым осуществить приближенное прогнозирование показателей надежности.

Принято называть множества $X_{[0,t]}(x)$ и $X_{k\tau}^*(x)$ соответственно определяющими и накрывающими, а метод прогнозирования, основанный на соотношении (2), - методом вложенных множеств.

Очевидно, множество $X_{[0,t]}(x)$ представляет собой область сосредоточения условной плотности вероятностей $f(y|x)$ случайного вектора $X(\tau)$, когда $X(0) = x \in R_m$. Не зная вид плотности $f(y|x)$, трудно восстановить эту область. Поэтому с практической точки зрения целесообразно описать структуру множеств $X_{[0,t]}(x)$ с помощью числовых характеристик распределения $f(y|x)$.

В диссертации это делается вначале для гауссовской модели, когда 2m-мерный случай вектор $(X(0), X(\tau))$ распределен по нормальному закону. Поскольку в этом случае условная плотность вероятностей $f(y|x) > 0$ для всех $y \in R_m$, то в качестве $X_{[0,t]}(x)$ надо выбирать некоторую усеченную область сосредоточения функции $f(y|x)$. Понятно, что целесообразно включать в $X_{[0,t]}(x)$ такие X_0 при которых плотность $f(X_1|x)$ принимает наибольшие значения, т.е. полагать $X_{[0,t]}(x) = \{X \in R_m | f(X|x) \geq c\}$, а константу c определять из условия, чтобы

$$\int_{\{t(y|x) \leq c\}} f(y|x) dy = P_d, \quad (3)$$

где P_d - допустимое значение вероятности.

Таким образом при $m=1$ получим в качестве $X_{[0,t]}(x)$ отрезок с концами $m'_t \pm \lambda \tau'_t$ (если параметр X_1 задан двусторонний допуск). Здесь $m'_t = m_t - \mu(x - m_0)$, $(\sigma'_t)^2 = \sigma_t^2(1 - \rho^2)$, $m_t = EX_1(t)$, $\sigma_t^2 = DX_1(t)$ ($t=0, 1$), $\rho = \text{cor}(X_1(0), X_1(1))$, $\mu = \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \rho$ - коэффициент регрессии, а λ - константа зависящая от c и определяемая из условия (3). В частности, согласно правилу трех сигм при $\lambda=3$ получим значение $P_d = 0.9973$, близкое к единице. При одностороннем допуске нижнем или верхнем можно устремить один конец отрезка к $+\infty$ или $-\infty$.

При $m=2$ множество $X_{[0,t]}(x)$ будет представлять собой эллипс рассеивания $X_{[0,t]}(x) = \left\{ (X_1, X_2) \in R_2 \mid \frac{1}{2(1-\tau^2)} (X_1^2 - 2\tau X_1 X_2 + X_2^2) \leq \lambda^2 \right\}$, где $X_i = \frac{X_i - m_i(x_1, x_2)}{S_i}$, $m_i(x_1, x_2)$ и S_i^2 - соответственно условные математическое ожидание и дисперсия случайной величины $X_i, i=1, 2$, а τ - условный коэффициент корреляции. Значение параметра $\lambda = \sqrt{-\ln(1 - P_d)}$ находится из условия (3). Эллипсы рассеивания имеют одинаковые полуоси и лишь их центры зависят от $x = (x_1, x_2)$, причем линейно. Они подобны между собой в том смысле, что при соответствующем переносе, параллельно координатным, осям они равны.

Использование для прогнозирования надежности эллипсов рассеивания вызывает определенные технические трудности. Дело в том, что (как показано в главе 3) на их основе получаются накрывающие множества $X_{k,t}^*(x)$, имеющие сложное строение. Поэтому представляет практический интерес выбор более

простых определяющих множеств $X_{[0,1]}(x)$. Наиболее удобной для приложения является прямоугольная модель, согласно которой

$$X_{[0,1]}^{(1)}(x_1, x_2) = \{X_1, X_2\} \in R_2 \{X_i - m_i(x_1, x_2) \leq \lambda S_i, i=1,2\}$$

$$X_{[0,1]}^{(2)}(x_1, x_2) = \{X_1, X_2\} \in R_2 \{X_i - m_i(x_1, x_2) \leq \lambda S_i, (X_2 - m_2(x_1, x_2)) \geq \lambda S_2\}$$

$$X_{[0,1]}^{(3)}(x_1, x_2) = \{X_1, X_2\} \in R_2 \{X_i - m_i(x_1, x_2) \geq \lambda S_i, i=1,2\}$$

Эти множества соответствуют случаям, когда на технические параметры заданы двухсторонние, смешанные и односторонние допуски. Константа λ определяется из условия типа (3), чтобы

$$J_i = P\{X_1(\tau), X_2(\tau) \in X_{[0,1]}^{(i)}(x_1, x_2) | X_1(0) = x_1, X_2(0) = x_2\} = P_d, i=1,2,3.$$

Доказано, что вероятности $J_i, i=1,2,3$ не зависят от переменных x_1, x_2 , условных математических ожиданий m_i , дисперсий $S_i, i=1,2$ и равны

$$J_1 = 1 - 4Q(\varphi_0), J_2 = 1 - 3Q(-\varphi_0) - Q(\varphi_0).$$

$$\text{Здесь } Q(\varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2} + \varphi_0} \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2\cos^2\varphi}\right\} d\varphi, \text{ а } \varphi_0 = \arccos \sqrt{\frac{1+r}{2}}.$$

Установлено, что интегралы $J_i, i=1,2,3$ являются строго возрастающими функциями коэффициенты корреляции $r \geq 0$.

Аналогичным образом определяются в многомерном случае m -мерные эллипсоиды рассеивания и прямоугольники.

До сих пор рассматривалась гауссовская модель. Если она не имеет места, то нахождение определяющих множеств проводят в рамках линейной регрессионной модели. При этом получаются такие же определяющие множества, только значения вероятностей $J = P(X(\tau) \in X_{[0,1]}(x) | X(0) = x)$ могут быть другими. Константа λ выбирается на основе гауссовской модели и такой, чтобы вероятность J была бы близка к единице. Поэтому полученными определяющими множествами можно воспользоваться для широкого класса распределений случайного вектора $(X(0), X(\tau))$.

Во второй главе предлагаются методы прогнозирования и экспресс оценок показателей надежности. В разделе 1.1 решается задача об ускоренном оценивании вероятности безотказной работы $P(T)$. Рассматривается случай, когда работоспособность изделий характеризуется двумя техническими параметрами $X := X_1, Y := X_2$, значения которых $(X(t), Y(t), t=0, \tau)$ распределены по нормальному закону с $\text{cor}(X(\tau), Y(\tau))=0$. Последнее ограничение оправдано тем, что для широкого класса случайных процессов $\{X(t), Y(t)\}$ корреляционная связь между компонентами X и Y ослабевает во времени. К этому следует добавить, что на практике стремятся выбирать такие технические параметры, которые дополняли бы друг друга.

В рамках гауссовской модели прогнозирования $P(T)$ на основе метода вложенных множеств можно осуществить другим путем, не находя вспомогательные характеристики: определяющие и накрывающие множества. Введем двумерную марковскую последовательность $(X_i, Y_i), i=1, 2, \dots$ с переходной вероятностью

$$f(x_i, y_i | x_{i-1}, y_{i-1}) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_i} P(X(\tau) < x_i, Y(\tau) < y_i | X(0) = x_{i-1}, Y(0) = y_{i-1}), i = 2, 3, \dots$$

С помощью $f(x_i, y_i | x_{i-1}, y_{i-1})$ найдем условное распределение $f(x_m, y_m | x_1, y_1)$.

Доказано, что

$$f(x_m, y_m | x_1, y_1) = \frac{1}{2\pi \Sigma_m \delta_m} \exp \left\{ -\frac{(x_m - c_m - \alpha^m x_1)^2}{2\Sigma_m^2} - \frac{(y_m - d_m - \chi^m y_1)^2}{2\delta_m^2} \right\} \quad (4)$$

Здесь $c_m = [m_{x_2} - \alpha m_{x_1} + \beta(y_1 - m_{y_1})](1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-1})$,

$d_m = [m_{y_2} - \chi m_{y_1} + \gamma(x_1 - m_{x_1})](1 + \chi + \dots + \chi^{m-1})$, $\Sigma_m^2 = \Sigma^2(1 + \alpha^2 + \dots + \alpha^{2(m-1)})$,

$\delta_m^2 = \delta^2(1 + \chi^2 + \dots + \chi^{2(m-1)})$, $m_{x_i}, m_{y_i}, i=1, 2$ - соответственно математические

ожидания $X(t), Y(t), t=0, t_2 = \tau$; Σ^2 и δ^2 - условные дисперсии $X(\tau)$ и $Y(\tau)$.

$$\alpha = \frac{\sigma_{x_2 y_1}}{\sigma_{x_1 y_1}} \rho_{x_2 x_1 | y_1}, \quad \beta = \frac{\sigma_{x_2 x_1}}{\sigma_{x_1 y_1}} \rho_{x_2 y_1 | x_1}, \quad \beta = \frac{\sigma_{y_2 y_1}}{\sigma_{x_1 y_1}} \rho_{y_2 x_1 | y_1}, \quad \gamma = \frac{\sigma_{y_2 x_1}}{\sigma_{x_1 y_1}} \rho_{y_2 y_1 | x_1},$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \sqrt{1 - \text{cov}^2(x, y)}.$$

$\rho_{xy|z}$ - коэффициент корреляции между X и Y при условии, что исключено линейное влияние случайной величины Z .

На основе (4) прогнозирование вероятности $P(T)$ осуществляется так. Испытываем изделия в течении некоторого времени τ , измеряя значения $X(i), Y(i), i=0, \tau$ технических параметров. По полученным данным находим числовые характеристики, входящие в (4). Определяем наименьшее целое число m , при котором $m\tau \geq T$. С помощью (4) рассчитываем вероятности

$$P(T|x_1, y_1) = \iint_{\substack{[x_1, x_m, b_1] \\ [y_1, y_m, b_2]}} f(x_m, y_m | x_1, y_1) dx_m dy_m, \quad P(T) = EP(T|x_1, y_1)$$

Согласно методу вложенных множеств характеристики $P(T|x_1, y_1)$ и $P(T)$ можно положить в качестве нижней границы безотказной работы за время T соответственно изделий с $X(0)=x_1, Y(0)=y_1$ и всей партии. Если значение $P(T)$ не меньше допустимого, то прогноз считается положительным. При малых значениях $P(T)$ партия бракуется. Когда нельзя отдать предпочтение ни одному из решений, следует продолжить испытания до некоторого времени $\tau_1 > \tau$ и проделать описанную выше процедуру. Это делается до того предельного времени τ_* , при котором коэффициент ускорения испытаний $\frac{T}{\tau_*}$ является

приемлемым. С помощью характеристики $P(T|x_1, y_1)$ можно осуществить отбор изделий с повышенной надежностью. (Статистические вопросы, обусловленные ограниченностью объема выборки, рассматриваются в главе 3.)

В разделе 2.2 предлагается метод экспресс оценок средней наработки на отказ при следующих предположениях. Работоспособность изделий характеризуется одним техническим параметром X , а отказ наступает при

$X \leq 0$. Изменение во времени $X(t)$ описывается однородным в пространстве марковским процессом с неизвестными коэффициентами сноса $b(t)$ и диффузии $a(t)$; удовлетворяющем условию

$$0 \leq \alpha(t) \leq u(t) \equiv \sqrt{\int_0^t a^2(t) dt} \leq \beta(t), t \geq 0. \quad (5)$$

Здесь $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ - заданные монотонно возрастающие функции. Для одной партии изделий установлены плотности вероятностей $\Gamma(x)$ и $p(t)$ соответственно начальных значений $X(0)$ и наработок на отказ ξ . Ставится задача о нахождении нижней I_- и верхней I_+ границ для средней наработки на отказ I новой партии изделий, у которой значения $X(0)$ распределены по закону $\pi(x) = P(\dot{X}(0) < x)$.

Обозначим $Q(t|x) = P(\xi < t | X(0) = x)$. Тогда можно записать, что

$$\int_0^\infty Q(t|x) \Gamma(x) dx = \int_0^1 p(t) dt \equiv \bar{P}(t), I = \int_0^\infty T(x) d\pi(x), T(x) = \int_0^\infty t dQ(t|x). \quad (6)$$

Известно, что определение экстремумов I_- и I_+ сводится к решению сложного нелинейного уравнения. Поэтому предлагается приближенный метод их нахождения. Он основан на том, что при вычислении $Q(t|x)$ пренебрегается влиянием границы отказовой области. В результате получается

$$Q(t|x) \approx 1 - \bar{\Phi}\left(\frac{m(t) - x}{u(t)}\right), \text{ где } m(t) = \int_0^t b(t) dt, \text{ а } \bar{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp\left\{-\frac{\xi^2}{2}\right\} d\xi.$$

Из уравнения (6) заданием u однозначно определяется $m = \varphi(u, t)$. Это позволяет свести исходную задачу к нахождению экстремума функционала

$$I^u = \int_0^\infty d\pi(x) \int_0^\infty \bar{\Phi}\left(\frac{\varphi(u, t) - x}{u}\right) dt,$$

где варьирование осуществляется в классе кусочно непрерывных возрастающих функций $u(t)$, удовлетворяющих условию (5). В частном случае, когда $\pi(x) \sim N(\mu_0, \sigma_0)$ получаем

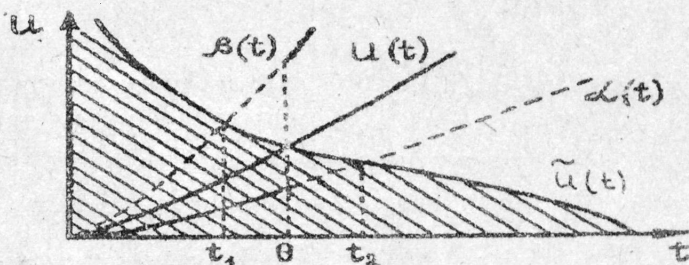
$$I'' = \int_0^{+\infty} \Phi(G(u, t)) \chi dt,$$

здесь $G(u, t) = (u^2 + \sigma_0^2)^{-\frac{1}{2}} (\varphi(u, t) - \chi)$.

Доказано, что существует единственное решение $\bar{u}(t)$ уравнения $G'_u(u, t) = 0$. График функции $\bar{u}(t)$ разделяет область $u \geq 0, t \geq 0$ на две части, в каждой из которых сохраняется знак G'_u . Зная $\bar{u}(t)$, несложно указать вид экстремалей. Поясним это схематично. Пусть $\bar{u}(t)$ является убывающей функцией (см. рис., где заштрихованная область соответствует $G'_u > 0$). Выберем произвольно допустимую функцию $u(t)$. Обозначим Θ и t_1, t_2 координату t точек пересечения кривых $u(t)$ и $\bar{u}(t)$. Очевидно, что для

$$u(t) = \begin{cases} \alpha(t), & 0 \leq t < \Theta \\ \beta(t), & \Theta \leq t < +\infty \end{cases} \quad (7)$$

справедливо неравенство $I'' \geq I''$. (График функции $\bar{u}(t)$ на рис. изображен жирной линией). Значит, экстремаль $u''(t)$ имеет вид (7), а параметр Θ находится из условия, чтобы функция I'' от Θ достигала максимума на отрезке $[t_1, t_2]$. Тем самым исходную задачу свели к нахождению экстремума функции. Аналогично рассматриваются другие случаи.



С помощью описанного метода найдены границы I_* и I^* при $\alpha(t) = 0$ и $\beta(t) = +\infty$, которые позволяют не только получать экспресс оценки средней наработки на отказ контролируемой партии, но и отбирать изделия с повышенной надежностью.

В разделе 2.3 решается аналогичная задача об экспресс оценках показателей надежности изделий при более общих предположениях. А именно: вместо допущения о марковском характере изменения во времени технического параметра считается, что средняя наработка на отказ $T(x)$ - неубывающая функция x . Известно, что в этом случае нахождение экстремума I_* сводится к установлению, так называемого, $(\pi - F)$ - разбиения числовой оси на непересекающиеся отрезки $\{I_\alpha\}$, удовлетворяющего двум условиям:

$$1) P_F(X_0 < x | X_0 \in I_\alpha) \geq P_F(X_0 < x | X_0 \in I_\alpha),$$

2) неравенство 1) не должно быть выполнено для любого объединения

$\bigcup_{\alpha \leq 0 < \beta} I_\alpha$, если его можно разбить на два подмножества с

$$P_F\left(\bigcup_{\alpha \leq 0 < k} I_\alpha\right) > 0, P_F\left(\bigcup_{k \leq 0 < \beta} I_\alpha\right) > 0.$$

Кроме того, установлено, что экстремум I^* достигается на условном распределении $Q_*(t|x) = \frac{F(t) - \alpha}{\beta - \alpha}$, $t_1 \leq t \leq t_2$, $x \in I_k$, где $\alpha = P_F\left(\bigcup_{0 < k} I_0\right)$, $\beta = P_F\left(\bigcup_{0 \leq k} I_0\right)$.

а t_1 и t_2 - любые решения неравенств
$$\begin{cases} \bar{P}(t_1 + 0) \geq \alpha \\ \bar{P}(t_1 - 0) \leq \alpha \end{cases} \begin{cases} \bar{P}(t_2 + 0) \geq \beta \\ \bar{P}(t_2 - 0) \leq \beta \end{cases}$$

Знание $(\pi - F)$ разбиения позволяет найти его для любых распределений $\pi(x) = \pi(\psi(x))$ и $\bar{F}(x) = \bar{F}(\psi(x))$, когда $\psi(x)$ - строго монотонная функция. Доказано, что $(\pi - \bar{F}) = \{\psi(I_\alpha)\}$, на основе этого утверждения найдены границы средней наработки на отказ для логарифмически нормальных распределений

$F(x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)$, $\pi(x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu_0}{\sigma_0}\right)$ и $P(t) = \exp\{-\lambda t\}$. Так например, при $\sigma > \sigma_0, \mu > \mu_0$

$$I_1 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \Phi\left(\frac{\mu_0 - x}{\sigma_0}\right) \exp\left\{-\frac{x - \mu}{2\sigma^2}\right\} dx.$$

В третьей главе приводится экспериментальное апробирование методов прогнозирования. Вначале обсуждаются вопросы, связанные с установлением накрывающих множества $X_{kt}^*(x)$. Для эллипсоидной модели эти множества имеют сложное строение. Даже при отсутствии тренда их граница описывается

уравнением $b' = b \sqrt{1 - \left(\frac{a'}{a}\right)^2} + b(i-1), (i-1) \leq a \leq a' \leq a, i = 1, k$, записанное для

первой октанты координатной плоскости $O'a'b'$, центр которой совпадает с x , а оси $O'a'$ и $O'b'$ с полуосями эллипса $X_{10,1}(x)$. Для прямоугольной модели

множества $X_{kt}^*(x)$ представляют собой прямоугольники со сторонами, параллельными координатным осям. Для удобства выбора параметра λ

рассчитаны необходимые для приложений значения $J_i(r, \lambda), i = 1, 2, 3$. Оказалось, что вероятности J_i слабо зависят от коэффициента корреляции r . Так,

$J_1(0,3) = 0,997$, а $J_3(1,3) = 0,998$. Это позволяет при практическом использовании прямоугольной модели считать $r = 0$, а в случае гауссовского распределения,

технические параметры - независимыми между собой. Другими словами, многомерную задачу прогнозирования свести к одномерной. Установлено, что

по каждому техническому параметру X накрывающие множества $X_{kt}^*(x)$ представляют собой отрезки с концами $\Theta(1 + \mu + \dots + \mu^{k-1}) + \mu^{k-1}x \pm \lambda \Sigma_k$,

$\Sigma_k^2 = \delta^2(1 + \mu^2 + \dots + \mu^{2(k-1)})$, где $\Theta = m_x - \mu x_0$, $\delta^2 = (1 - r^2)\sigma_x^2$.

Точечные и интегральные оценки параметров Θ, μ, δ находились следующим образом. Считалось, что испытано n изделий в течении времени t и у каждого изделия измерены значения технического параметра

$X(0)$ и $X(\tau)$, $i = 1, n$. В качестве исходных точечных оценок выбирались хорошо известные выборочные моменты. Определение интервальных оценок осуществлялось в рамках гауссовской модели, считая вектор $(X(0), X(\tau))$, распределен по нормальному закону. Известно, что ими можно пользоваться и в более общем случае, если объем выборки n составляет несколько десятков. Для параметров Θ, δ и μ установлены независимые друг от друга γ -доверительные интервалы $[\underline{\Theta}_\gamma, \bar{\Theta}_\gamma], [0, \bar{\delta}_\gamma]$ и $[\underline{\mu}_\gamma, \bar{\mu}_\gamma]$, где

$$\underline{\Theta}_\gamma = \hat{\Theta} - u_{\frac{\gamma+1}{2}} \frac{\delta}{\sqrt{n}}, \quad \bar{\Theta}_\gamma = \hat{\Theta} + u_{\frac{\gamma+1}{2}} \frac{\delta}{\sqrt{n}}, \quad \bar{\delta}_\gamma = \sqrt{\frac{(1-\hat{r}^2)}{n z_{n-2}(\gamma)}} \hat{\delta},$$

$$\underline{\mu}_\gamma = \hat{\mu} \left(1 - t_{n-2} \left(\frac{\gamma+1}{2} \right) \sqrt{\frac{\hat{r}^2 - 1}{n-2}} \right), \quad \bar{\mu}_\gamma = \hat{\mu} \left(1 + t_{n-2} \left(\frac{\gamma+1}{2} \right) \sqrt{\frac{\hat{r}^2 - 1}{n-2}} \right),$$

$u_{\gamma}, z_{n-2}(\gamma)$ и $t_{n-2}(\gamma)$ - γ - квантили соответственно распределения нормального хи-квадрат с $n-2$ степенями свободы и Стьюдента с $n-2$ степенями свободы. На их основе получен γ -доверительный интервал $[\underline{EX}_k - \lambda \sqrt{\overline{DX}_k}, \bar{EX}_k + \lambda \sqrt{\overline{DX}_k}]$ для накрывающего множества $X_{k*}^*(x)$. Здесь

$$\underline{EX}_k = \underline{\Theta}_{\gamma_1}^* (1 + \underline{\mu}_{\gamma_2} + \dots + \underline{\mu}_{\gamma_2}^{k-1}) + \underline{\mu}_{\gamma_2}^{k-1} x, \quad \bar{EX}_k = \bar{\Theta}_{\gamma_1}^* (1 + \bar{\mu}_{\gamma_2} + \dots + \bar{\mu}_{\gamma_2}^{k-1}) + \bar{\mu}_{\gamma_2}^{k-1} x,$$

$$\overline{DX}_k = \bar{\delta}_{\gamma_1}^* (1 + \bar{\mu}_{\gamma_2}^2 + \dots + \bar{\mu}_{\gamma_2}^{2(k-1)}), \quad \underline{\Theta}_{\gamma_1}^* = \hat{\Theta} - u_{\frac{\gamma_1+1}{2}} \frac{\bar{\delta}_{\gamma_2}}{\sqrt{n}}, \quad \bar{\Theta}_{\gamma_1}^* = \hat{\Theta} + u_{\frac{\gamma_1+1}{2}} \frac{\bar{\delta}_{\gamma_2}}{\sqrt{n}},$$

а $\gamma_i, i = 1, 2, 3$ - любые вероятности, удовлетворяющие условию $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \gamma$.

Предложенные методы были использованы для прогнозирования показателей надежности и сохраняемости резисторов и вентиляторов. Полученные результаты представлены в таблице.

№ п/п	Тип изделия	Вид испытаний и режим	Продолжитель- ность испытаний, ч. t_n	Объем выборки n	Коэффициент ускорения K_y	Нижняя граница вероятности безотказной работы $P(t)$
1	Переменные резисторы РП1-48А	Безотказность	1000	20	25	0,942
2	Набор резисторов 302НР1ГВ-АВ	Сохраняемо- сть (полевой склад)	5 (лет)	21	5	0,997
3	Фольговые резисторы С5- 60В	Долговечност- ь ($T = 50^\circ \text{C}$, $P_n = 0,5 \text{ Вт}$)	3000	32	10	0,974
4	Толстопленоч- ные наборы резисторов НР1-300-1К3	долговечност- ь ($T = 85^\circ \text{C}$, $P_n = P_{ном}$)	2000	49	25	0,892
5	Вентиляторы: 8133-0/11Ф93 8132-0/17К	Безотказность $T=20^\circ \text{C}$ $U=27 \text{ В}$	400	4	2,5	0,99

Результаты апробирования показали, что основные выводы теоретических исследований диссертации согласуются с опытными данными и могут быть рекомендованы к практическому использованию.

Публикации по теме диссертации

1. Kanchaveli A.D. Kanchaveli L.D. Kartashov G.D. THE ASYMPTOTIC DISTRBUION OF MINIMUM VALVES OF VARIATIONAL // Dynamics of Non-Homogenous System - Moscow: Institute for System Analysis, 1996 - P. 71 - 75.

2. Канчавели Л.Д. Прогнозирование надежности методом вложенных множеств // Тезисы докладов С. 21 - 23 Российского научно-технического общества радиотехники - электроники и связи им. А.С. Попова. Научная сессия посвящается Дню радио. - М., 1997. - Часть I.

3. Канчавели Л.Д. Многомерное правило трех сигм. // Надежность и контроль качества. - 1997. - №6. - С. 51 - 52.

4. Аппаратура и электрорадиоизделия военного назначения. - Типовые методы укоренных испытаний на безотказность и долговечность. / О.А. Бархатова, Г.Д. Карташов, Л.Д. Канчавели и др. - М.: 22 ЦНИИИ; 1996. - 115 с.