

и 484498

МОСКОВСКОЕ ОРДЕНА ЛЕНИНА, ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ВЫСШЕЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ УЧИЛИЩЕ
ИМЕНИ Н.Э.БАУМАНА

На правах рукописи

КЛЕНИКОВ СЕРГЕЙ СЕРГЕЕВИЧ

УДК 621.8

РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ И РАЦИОНАЛЬНЫХ
АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ СТАТИКИ И ДИНАМИКИ
СИЛОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ
ВОЛНОВЫХ ПЕРЕДАЧ

01.02.06. - Динамика, прочность машин,
приборов и аппаратуры

05.02.02. - Машиноведение и детали
машин

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора технических наук

Москва-1988

Работа выполнена в Заводе-втузе при Московском автомобильном
заводе им. И.А.Лихачева

Официальные оппоненты: - доктор технических наук,
профессор Э.Л.Айрапетов,
- доктор технических наук,
профессор Г.Б.Иосилевич,
- доктор технических наук,
профессор Л.А.Шаповалов
доктор физмат. наук
Г.Н.Чернышев

Ведущее предприятие - Научно-производственное объединение
ВНИИредуктор, г.Киев

20^ю апреля 1989 года в 14

ованного Совета Д 053.15.08

рьской Революции и ордена

ического училища имени

2-я Бауманская ул., 5, МВТУ.

экземплярах, заверенные

Ученый Совет МВТУ имени

библиотеке МВТУ имени

М 484798

а 1989 года.

К.Т.Н., доцент

В.В.Дубинин

Дуб

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы . Предусмотренное "Основными направлениями экономического и социального развития СССР на 1986-1990 годы и на период до 2000 года" повышение производительности труда предполагает обеспечение отечественного производства современным оборудованием. Его создание связано с разработкой принципиально новых надежных скоростных приводов, обладающих высокими эксплуатационными показателями, улучшенными весовыми, прочностными, динамическими и кинематическими характеристиками. Острая необходимость в таких приводах имеет место при создании робототехнических систем, станков с ЧПУ, систем управления и автоматического регулирования, механизмов вакуумного ввода и приводов специального назначения. Указанным требованиям во многом отвечают компактные приводы, создаваемые на базе волновых механических передач (ВП). Несмотря на значительный объем исследований этих механизмов, их проектирование ведется по упрощенным методикам, применение которых не обеспечивает наиболее полного использования всех положительных качеств нового вида передач.

В отличие от других видов механических передач ВП содержат несколько высокоподатливых элементов со сложной геометрией в виде оболочек, колец и пластин. Их гибкие колеса (ГК) имеют нестационарные условия опирания. Мелкомодульные венцы ГК деформируются в стесненных условиях профилированных зазоров при наличии односторонних ограничений на их упругие перемещения. Учет одностороннего контакта и подвижности нагрузок между элементами ВП существенно усложняет задачу их корректного расчета на прочность, жесткость и устойчивость. Главными трудностями этой проблемы являются вопросы, связанные с выявлением зон контакта и нагрузок между элементами. Величины и характер распределения сил находятся в сложной зависимости от уровней и режимов нагружения ВП, от геометрических и жесткостных параметров и условий закрепления сопряженных элементов, а также от точности их изготовления и сборки, от степени износа.

Разработка надежных методов и алгоритмов достоверных расчетов контактных нагрузок между элементами ВП является крупной научной проблемой, имеющей важное народнохозяйственное значение. Ее решение представляется актуальным, поскольку открывает путь к проектированию рациональных конструкций ВП и приводов на их основе.

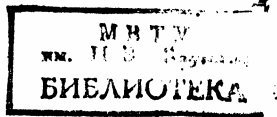
Цель работы состояла в создании общего расчетного аппарата

НТБ МГТУ им. Н.Э. Баумана



1484798

Клеников С.С. Разработка ме



и алгоритмов решений широкого круга нелинейных задач статики и динамики контактного взаимодействия высокоподатливых элементов волновых передач на базе использования современных методов строительной механики, теории упругости, теории тонких упругих оболочек и методов расчёта упругих систем, содержащих односторонние связи (ОС) и деформируемых динамическими подвижными нагрузками.

В соответствии с поставленной целью на защиту выносятся следующие основные положения, имеющие научную новизну:

- обоснован системный подход и разработана единая методология решения широкого класса нелинейных задач о силовом взаимодействии упругих систем с подвижными и неподвижными ОС, деформируемых подвижными нагрузками;

- для решения существенно нелинейных задач разработаны: вариант шагового метода расчёта систем с односторонними ограничениями с эффективной процедурой линейного нормирования этапных решений; итерационные алгоритмы в форме метода сил, в форме метода перемещений и в комбинированной форме; предложен метод расчёта систем с ОС введением и пошаговым наращиванием в "неправильных" связях "востанавливающих" сил, объединяющий положительные качества шагового и итерационного подходов;

- на новой научной основе разработаны физические и математические модели упруго-силового взаимодействия всех звеньев волновых механизмов с разными конструктивными схемами изготовления их узлов, учитывающие подвижность ОС между элементами, их упругие податливости, технологические погрешности изготовления и все виды исходных зазоров между недеформированными элементами в размерной цепи "жёсткое колесо - кулачок". Достоинство таких моделей состоит в полноте описания исследуемых объектов. Они одинаково приемлемы для изучения всех режимов нагружения ВП. Для формирования матриц динамических податливостей упругих элементов ВП в установившихся и переходных режимах разработан итерационный алгоритм, в основу которого положен статический расчёт оболочек МКЭ от сил инерции предыдущего приближения;

- в основу предложенных расчётных дискретных моделей ВП положены дискретные аналоги, всестороннее обоснование которых в части вопросов точности и сходимости решений и выравнивания контактной нагрузки выполнено в результате исследования контакта между плоским и объёмным штампом и упругой полуплоскостью и полупространством; и между профильными штампами и консольными, свободными

и шарнирно-закреплёнными балками;

- машинным моделированием на ЭВМ последствий износа элементов ВП, подвижностей тел качения, технологических погрешностей изготовления зубьев колёс выявлена склонность волновых механизмов к параметрическим колебаниям, что обусловлено цикличностью изменения диаграмм их крутильной жёсткости.

Достоверность предложенных методов и алгоритмов расчёта контактных нагрузок и результатов выполненных исследований обеспечена: применением теоретически и экспериментально обоснованных физических и математических моделей одностороннего контакта элементов ВП и методов их расчёта; сохранением равной точности при решении всех задач расчётного плана; соответствием расчётных данных о границах зон контакта элементов ВП результатам экспериментов, полученных на основе предложенного электроконтактного способа замера размеров зон контакта; соответствием расчётных и экспериментальных интегральных характеристик ВП - диаграмм их крутильной жёсткости.

Практическая ценность работы состоит в предложенных методах и реализованных на их основе программных алгоритмах расчёта упругих систем с подвижными односторонними связями. Их применение в практике проектирования волновых механизмов позволяет облегчить работу проектировщиков по улучшению качественных и технико-экономических показателей и совершенствованию конструкций ВП путем уточнения их расчётов и замены значительного объёма дорогостоящих натурных экспериментов машинным моделированием на ЭВМ всех задач исследовательского плана. Кроме этого, предложенные алгоритмы могут использоваться и в практике рационального проектирования подвижных узлов и соединений, содержащих подшипники качения и скольжения.

Работа была начата в МВТУ им. Н.Э.Баумана (1969-1975 гг.) и явилась в дальнейшем составной частью важнейших хозяйственных НИР Завода-вуза при ЗИЛе, выполняемых под научным руководством и при непосредственном участии автора в период с 1976 по 1987 годы. Материалы диссертации послужили основой для выполнения нескольких кандидатских диссертаций. Подтверждённый экономический эффект от внедрения результатов работы составил свыше 360 тыс. рублей. Одна из тем была премирована приказом по Минвузу РСФСР.

Апробация работы. Результаты работы докладывались и обсуждались на конференции "Новые конструкции точных механизмов и приборов", Ленинград, ЛДНП, 1973; на IX научно-технической конферен-

ции Владимирского политехнического института (г. Владимир, 1974); на семинаре "Опыт повышения нагрузочной способности редукторов общего назначения", Укр. Респ. НТО машпром, Киев, 1978; на семинаре "Использование волновых зубчатых передач в промышленности", Бел. Респ. НТО машпром, Минск, 1978; на научно-технической конференции "Снижение металлоёмкости зубчатых передач и редукторов", Свердлов. НТО машпром, Свердловск, 1984; на ежегодных научно-технических конференциях Завода-вуза при Зиле 1976-1987 годы; на Московском научном семинаре по волновым передачам, МВТУ, 1974, 1980, 1984, 1987 годы; на семинаре "Динамика и прочность" каф. М-1 (1982, 1984 гг.) и К-5 (1985 г.), МВТУ им. Н.Э.Баумана.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 36 печатных работ, получено 2 положительных решения на изобретения. В соавторстве с А.П. Панферовым и Э.П. Амосовой депонирован в трёх томах "Библиографический обзор работ по волновым передачам, опубликованных в период с 1960 по 1982 годы". Материалы работы отражены в шести научно-технических отчётах по хозяйственным НИР.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из шести разделов, заключения и списка литературы из 397 наименований. Общий объём диссертации составляет 378 страниц, в том числе 249 страниц основного текста, 83 рисунка и 29 таблиц. Приложения к диссертации оформлены отдельной книгой на 250 страницах.

Содержание работы.

Первый раздел работы содержит обзор работ. В нём отмечено, что основной объём исследований ВП и приводов на их основе выполнен под руководством Волкова Д.П., Гавриленко В.А., Гинзбурга Е.Г., Зиновьева В.В., Иванова М.Н., Ковалёва Н.А., Крайнева А.Ф., Левитского Н.И., Рубцова В.К., Рудницкого В.И., Скворцовой Н.А., Семина Ю.И., Цейтлина Н.И., Щуалова С.А. и др. Показано, что в комплексе взаимосвязанных проблем, возникающих при проектировании волновых механизмов, проблема выявления контактных нагрузок между их подвижными односторонне контактирующими упругими элементами является центральной. В связи с этим сделан подробный обзор работ других исследователей, посвящённых этой наиболее сложной проблеме.

Отмечен большой объём выполненных экспериментов по определению сил контакта элементов ВП методами тензометрирования. Несмотря на их невысокую точность из-за неизбежного изменения геометрии и жесткости сопряжённых зубьев в зоне контакта, такие ис-

следования послужили основным источником информации о величине и характере распределения нагрузки между звеньями ВП и сыграли главную роль на стадии становления отечественного волнового редукторостроения.

Среди теоретических работ, посвящённых этой проблеме, отмечаются работы Ковалёва Н.А., Сергеева В.В., Рафаловича Л.Б., Цейтлина Н.И., Шувалова С.А., а также ряд работ Александрова К.К., Александровского В.Н., Таглоева А.А., Гварамадзе Н.В., Косова М.Г., Колесника А.И. и др. исследователей, посвящённых решению частных задач этой проблемы. Отмечена возможность использования в расчётах ВП итерационного метода, разработанного Айрапетовым Э.Д., для анализа планетарных и косозубых передач.

На основе анализа состояния вопроса и проведённого обзора литературных источников сформулированы цель работы и сделана постановка задач исследования. Разработанные методы решения этих задач и результаты исследования изложены в последующих разделах работы.

Во втором разделе дано обоснование предлагаемых в работе физических и геометрических моделей динамического контакта элементов ВП как упругих систем с подвижными ОС. Анализ работ по расчёту систем с ОС Журавского Д.И., Рабиновича И.М., Баженова В.А., Гордеева В.Н., Перельмутера А.В. и мн. др. позволил сформулировать основные требования к расчётным моделям ВП. С целью обеспечения возможности использования для выявления спектров контактных нагрузок аппарата строительной механики и линейной теории оболочек предложен и обоснован (раздел 4) геометрический переход к дискретной схеме контакта элементов ВП. Схему такого перехода можно понять из рис. 1, а динамическую модель ВП как упругой системы с подвижными ОС и подвижными нагрузками, из рис. 2. Односторонний контакт между профилированной тележкой (аналог кулачка) и упругим основанием (аналог ГК и др. элементов) реализуется через подвижный сепаратор с телами качения. В задачу расчёта динамических моделей ВП входит определение амплитуд динамических контактных сил между упругими элементами и подвижными ОС, упругих перемещений и внутренних усилий, а также проверка системы на резонансы.

Составной частью расчётов является построение матриц динамических податливостей контактирующих элементов $[A(\omega, \varepsilon)]$ для тех точек, где возможен их односторонний контакт. Учёт параметров оболочки ГК (её геометрии, размеров, условий закрепления) и возника-

ющих в системе инерционных нагрузок выполняется на стадии построения динамических функций влияния (функций Грина) от соответствующих подвижных единичных нагрузок. Скорости их движения принимаются равными относительным скоростям взаимного движения элементов в ВП. Функции Грина используются затем для формирования динамических матриц $[A]$, а после расчёта контактных нагрузок – для определения деформированных форм контактирующих элементов.

Для практических расчётов динамических функций Грина для ПК разработан итерационный алгоритм. В его основу положен статический расчёт оболочки ПК МКЭ. В качестве искомого вектора амплитудных перемещений i -ого узла оболочки ПК принимается вектор $\{\delta_i\}^T = \{u_i, v_i, \theta_i\}$. Амплитудные силы инерции определяются соотношением $\{F_i^a\} = \omega^2 [m_i] \{\delta_i\}$, а силы вязкого сопротивления $-\gamma \omega [m_i] \{\delta_i\}$. Здесь $[m_i]$ – диагональная матрица масс, отнесённых к i -ому узлу, γ – экспериментальный коэффициент вязкого сопротивления, а ω – известная угловая скорость движения соответствующих единичных нагрузок. Итерационная процедура по определению вектора амплитудных отклонений узловых перемещений k -ого приближения сводится к решению систем уравнений равновесия узлов сетки МКЭ

$$[C] \{\delta^k\} = \{\bar{R}\} + (\omega^2 - \gamma \omega) [m] \{\delta^{k-1}\}. \quad (I)$$

Здесь $[C]$ – глобальная матрица жёсткости ПК, $\{\bar{R}\}$ – вектор единичных сил, приложенных в соответствующих узлах венца ПК. Итерации повторяются до условия $\max |\delta^k - \delta^{k-1}| \leq \varepsilon$, где ε – принятая точность. Расчёт вектора $\{\delta\}$ для ПК ВЗ-80 показал, что сходимость обеспечивается за 3–5 итераций. Их число возрастает при значениях ω близких к собственной частоте оболочки, соответствующей тону, форма которого предопределяется деформированием ПК единичными силами. В этом случае возникает необходимость введения сил сопротивления.

Экономия машинных затрат достигается за счёт разового преобразования матрицы $[C]$ в треугольную с последующими многократными вычислениями узловых перемещений в процессе обратного хода.

На основе качественного анализа механизма передачи подвижных усилий на венец ПК при наличии у генератора углового ускорения ε предложен алгоритм расчёта динамических матриц податливостей для оценки переходных процессов. Они представляются в виде

$$[A(\omega, \varepsilon)] = [A(\omega_1)] + [\bar{A}(\varepsilon)], \quad (2)$$

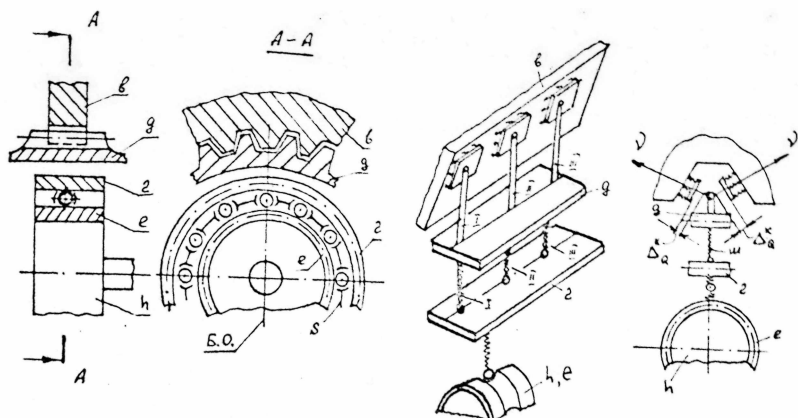


Рис. 1. Схема и физическая модель дискретного контакта упругих элементов ВП. 6 - жёсткое колесо (ЖК); 9 - гибкое колесо (ГК); 2 - наружное кольцо г. подшипника (НКП); S - сепаратор; e, h - профилированный кулачок $W(\varphi)$; БО - больш. ось

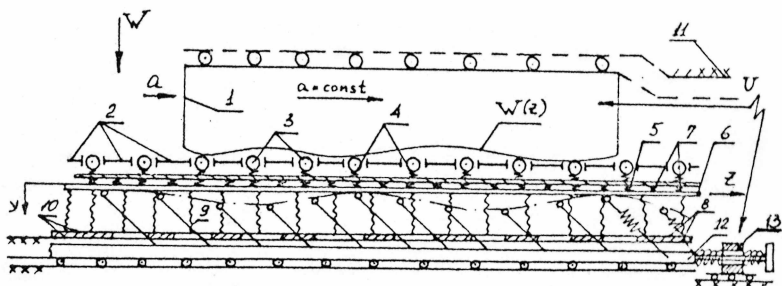


Рис. 2. Динамическая модель контакта упругих элементов системы с подвижными односторонними связями (ОС). $a(\omega)$ - скорость, I - тележка с профилем $W(z)$; 2, 3 - подвижный сепаратор с телами качения (ОС); 4 - нелинейные пружины (контактная податливость тел качения с беговыми дорожками колес); 5 - бесконечная балка № I (аналог НКП); 6 - балка № 2 (аналог венца ГК); 7 - упругое основание шероховатого поверхностного слоя; 8 - наклонные упругие ОС (аналоги зубьев); 9 - упругое основание (аналог оболочки); 10, 11, 12 - аналоги корпуса ВП; 13 - упругий упор (аналог выходного вала)

где $[H(\omega)]$ - матрица податливости, построенная для полного набора точек ПК при установившемся режиме, а $[A(\varepsilon)]$ - матрица добавок, состоящая из отклонений упругих перемещений тех же точек, вызванных наличием ускорения. На основе исследований нестационарного деформирования упругих систем от подвижных грузов, выполненных Кохманюком С.С., в качестве расчётного для ВП выбран наиболее неблагоприятный режим равнозамедленного торможения генератора. Соотношения между касательными и радиальными составляющими силами инерции, вызванными ускорением единичных грузов, при их движении по спиралевидным траекториям, приняты постоянными. Это позволило свести нестационарную задачу к последовательности квазистатических задач, а для расчёта матриц $[A(\varepsilon)]$ использовать тот же итерационный алгоритм.

Составной частью алгоритмов контактных задач является расчёт вектора состояния оболочек ПК. На основе анализа исследований по теории оболочек, выполненных Балабухом Л.И., Бидерманом В.Л., Власовым В.З., Гольденвейзером А.Л., Новожиловым В.В. и др. учёными, сделан вывод о достаточности для расчётов ПК аппарата линейной теории. Выбраны и обоснованы три наиболее приемлемые для этих целей метода расчёта. Среди них метод прогонки, метод конечных элементов и приближённый метод расчёта перемещений в венце ПК по аналитическим формулам. Такие формулы получены в рядах Фурье на основе расчётной схемы кольца, сопряжённого с безмоментной оболочкой. С целью расширения границ применения формул для расчётов ПК, не вписывающихся в расчётную схему безмоментной оболочки, предложены приёмы их коррекции заменой фактических жёсткостных параметров кольца и оболочки эквивалентными параметрами. Они подбираются либо на основе параллельных численных расчётов ПК прогонкой или МКЭ, либо экспериментально. В этом случае формулы выполняют лишь роль аппроксимирующих функций. Их применение существенно упрощает процедуру многократных перестроений матриц податливостей опорных систем при наличии подвижных связей.

На основе решения плоской задачи теории упругости МКЭ разработан шаговый алгоритм расчёта упруго-пластического деформирования гибких зубчатых венцов с учётом их сложной собственной геометрии. Выявлены зависимости от основных геометрических параметров концентрации напряжений в ободе, эквивалентных толщин венцов и собственных податливостей зубьев.

При выборе методов расчёта ПК и их зубчатых венцов учитывались не только достоинства самих методов, но и наличие их програм-

много обеспечения. В комплексе программ, разработанный ^{для расчетов} ВП под руководством и при непосредственном участии автора Ивановым Д.С., Ломинарским И.Е., Сергеевым В.С., Семиным И.И., отдельными модулями вошли программы Антонова А.С. (расчёт подкреплённых оболочек прогонкой), Комкова К.Ф. (решение плоской задачи для венца МКЭ) и Скопинского В.Н. (расчёт оболочки ГК МКЭ).

Как показывают исследования, характер распределения нагрузки между зубьями колёс существенно зависит от исходных зазоров между ними. Представление зазоров в виде их геометрических и упругих составляющих позволило использовать геометрические составляющие зазоров в качестве неизменной базы отсчёта постоянно меняющихся упругих составляющих. Расчёт зазоров в этом случае упрощается и сводится к определению через функции Грина упругих перемещений кромок зубьев ГК. Для контроля возможной "интерференции" зубьев колёс введена функция, координирующая их взаимное положение. При анализе процесса нагружения ВП смена знака этой функции позволяет выявлять те уровни нагружения ВП, при которых наступает заедание зубьев колёс, приводящее к их повышенному износу.

Остановившись на общей характеристике второго раздела, следует отметить, что определённая неоднородность его материала обусловлена характером тех работ, выполнение которых предшествует исследованиям сил контакта элементов ВП. Уровень рассмотренных здесь вопросов определялся исходя из сохранения равной точности для всех взаимосвязанных задач расчётного плана.

Третий раздел работы посвящён обоснованию формулировок контактных задач, разработке методов и алгоритмов их решений.

Задача формулируется следующим образом. Для системы подвижных упругих элементов, рис.2., параметры взаимного смещения которых (скорости $-\dot{\omega} \rightarrow a$, и ускорения $-\ddot{\epsilon}$) и величины передаваемого передач момента $-T_{(nm)}$ известны, требуется рассчитать векторы сил их одностороннего контакта

$$\{X\}^T = \{Q^T, F^T, P^T\}, \quad (3)$$

а затем - и векторы их деформированного состояния.

Здесь: $\{Q\}$ - подвекторы сил взаимодействия зубьев колёс;

$\{F\}$ - тоже, венца и наружного кольца гибкого подшипника (НКП),

а $\{P\}$ - тел его качения с беговыми дорожками колец.

Поскольку деформирование элементов ВП стеснено наличием

между ними ОС, силы их взаимодействия $\{X\}$ и зазоры между ними $\{\Delta\}$ всегда должны удовлетворять неравенствам:

$$\{X\} \geq \{0\} \quad (4); \quad \{\Delta\} \geq \{0\} \quad (5); \quad \{X\} \cdot \{\Delta\}^T = \{0\}. \quad (6)$$

В развёрнутой форме система неравенств (5) принимает вид

$$[A(\omega, \varepsilon)]\{X\} + \{\lambda\} \leq \{\Delta^0\}. \quad (7)$$

Здесь: $\{X\}$ – искомые векторы контактных сил; $\{\lambda\}$ – векторы геометрических смещений точек упругой системы, определяемых формой генератора волн и уровнем нагружения ВП (или заданной нагрузкой от толкателей генератора); $\{\Delta^0\}$ – вектор исходных зазоров между недеформированными элементами системы, определяемых лишь их геометрией. Динамическая матрица податливости элементов $-[A(\omega, \varepsilon)]$ строится (раздел 2) для полного набора точек их взаимного контакта. В последующих расчётах такая расширенная матрица многократно используется для построения матриц податливостей опорных систем нагруженных ОС меньших размерностей.

По мере изменения режимов (ω, ε) и уровней (T) нагружения ВП зоны контакта между упругими элементами перестраиваются. Таким изменениям соответствуют переменные структуры неравенств (4) – (7). При решении задач для вполне определённых значений параметров T, ω, ε наиболее сложным является вопрос выявления опорной системы нагруженных ОС, т.е. выяснение того, какие связи при заданном режиме и уровне нагружения ВП работают, а какие выключаются. Для решения этой задачи в работе используются два традиционных подхода строительной механики: шаговый и итерационный.

Разработанный для расчётов ВП вариант шагового метода базируется на сочетании метода последовательных нагружений с методом сил. Решение задачи по шагам строится следующим образом. Требуется определить значения параметров $(\{X^k\}, \{\Delta^k\})$, характеризующих состояние системы в пределах K -ого этапа нагружения ВП, ($K = 0, 1, 2, \dots$) при известных значениях этих же параметров в момент окончания $(K - 1)$ -го этапа.

Искомое состояние системы представляется суммой двух состояний: основного, соответствующего окончанию $(K - 1)$ -ого этапа нагружения ВП $(\{X^{k-1}\}, \{\Delta^{k-1}\})$ и т.п.; и дополнительного $-(\{\delta_k X\}, \{\delta_k \Delta\})$, соответствующего догружению системы на K -ом этапе

$$\{X^k\} = \{X^{k-1}\} + \{\delta_k X\}; \quad \{\Delta^k\} = \{\Delta^{k-1}\} + \{\delta_k \Delta\}. \quad (8)$$

Здесь под "этапом" понимается интервал нагружения ВП, к окончанию которого число работающих ОС между элементами системы изменяется

на единицу (связь включается или выключается). В пределах отдельных этапов число работающих связей не изменяется. Их одностороннее действие выражается в виде неравенств:

$$\text{для работающей связи } X_i > 0 \text{ и } \Delta_i = 0; \quad (9)$$

$$\text{для неработающей связи } X_i = 0 \text{ и } \Delta_i > 0; \quad (10)$$

$$\text{для смены состояния связи } X_i = 0 \text{ и } \Delta_i = 0. \quad (11)$$

Очевидно, что приведённые неравенства не накладывают прямых ограничений на приращения реакций ОС - $\delta_k X$. Последние могут быть положительными, равными нулю или отрицательными. Однако, в последнем случае они должны быть такой величины, чтобы номинальные значения самих реакций всегда удовлетворяли условиям (9) - (11). Между приращениями упругих перемещений и приращениями сил контакта элементов в пределах этапов имеет место линейная связь

$$[A^k] \{\delta_k X\} = \{\delta_k \lambda\}. \quad (12)$$

Матрицы податливости $[A^k]$ строятся на каждом этапе из элементов расширенной матрицы (?) для опорной системы нагруженных ОС. Её вид определяется в момент окончания (K - I)-ого этапа. Размер матриц $[A^k]$ всегда равен числу работающих ОС. Они используются и в проверочных расчётах, для построения деформированных форм упругих элементов ВП непосредственно от недеформированного состояния. Такие расчёты выполняются с целью периодического устранения накапливающихся ошибок машинных вычислений, что позволяет обеспечить правильную последовательность смены опорных состояний ОС.

Вектор $\{\delta_k \lambda\}$ - состоит из приращений кинематических смещений ОС вдоль линий действия их реакций. Такие смещения вызваны либо наличием упругой осадки ОС, либо известными перемещениями контактирующих с венцом точек волнообразователя за счёт дополнительного нагружения ВП моментом - $\delta_k T$.

Использование в качестве основных неизвестных приращений реакций ОС отличает предложенный подход от подхода Ковалёва Н.А., где в качестве основных неизвестных используются номинальные значения реакций ОС. Выбор в качестве основных неизвестных приращений реакций ОС оправдан тем, что они всегда имеют одинаковый порядок и рассчитываются из (12) с одинаковой погрешностью. Повышенные требования к точности расчёта приращений реакций ОС связаны с острой необходимостью выявления строгой последовательности чередования опорных систем нагруженных ОС. Момент перехода от одного этапа к другому может быть установлен и последовательным дроблением шага нагружения ВП, как это предлагается Ковалёвым Н.А. Однако, в этом случае,

принципиальным является вопрос выбора требуемого шага нагружения ВП, поскольку в моменты подключения ОС в работу или сразу после их выхода из работы наблюдается явление резкого уменьшения абсолютных величин реакций и зазоров этих ОС. Вследствии этого, существенно увеличивается относительная погрешность расчёта этих величин. Кроме того, дробление шага в пределах этапов при анализе пространственного контакта элементов ВП (число ОС велико) приводит к неоправданно большим машинным затратам. Они значительно сокращаются при использовании эффективной процедуры нормирования этапных решений. В этом случае для каждого из этапов нагружения САУ (I2) решается лишь один раз. Основа такой процедуры состоит в поиске нормирующих множителей - L^k . Для этого силы и зазоры на К-ом этапе представляются в виде:

$$\{X^k\} = \{X^{k-1}\} + [L_X] \{\delta X\}^k; \{\Delta^k\} = \{\Delta^{k-1}\} + [L_\Delta] \{\delta \Delta\}^k. \quad (I3)$$

Здесь $\{\delta X\}$ - найденные из (I2) приращения сил для произвольного шага нагружения системы ($\delta T \rightarrow \{\delta \lambda\}$), а $\{\delta \Delta\}$ - соответствующие им приращения зазоров $\{\delta \Delta\} = [A(\omega_i)] \{\delta X\}$. Для расчёта множителей $\{L\}$ каждая из компонент векторов (I3) $\{X^k\}$ и $\{\Delta^k\}$ последовательно приравнивается нулю. Для i -ой связи ($i=1, 2, \dots, N$) $L_{Xi} = L_{Xi}^{k-1}$, $L_{\Delta i} = L_{\Delta i}^{k-1}$, где N - общее число ОС. Формулы для расчёта указанных величин получают вид:

$$L_{Xi} = -X_i^{k-1} / \delta X; \quad L_{\Delta i} = -\Delta_i^{k-1} / \delta \Delta_i. \quad (I4)$$

Из $2N$ -найденных чисел, лишь N не равны нулю. Парным сравнением из них выбирается наименьшее положительное число L_i^k , которое и будет являться линейным нормирующим множителем К-ого этапа. Такой множитель показывает во сколько раз нужно изменить выбранный шаг нагружения, чтобы одно из неравенств (9) или (10) для связи $i = j$ первым перешло в соответствующее равенство (II). Он используется затем в процедуре обратного хода при нормировании всех этапных приращений сил $\{\delta_k X\} = L_i^k \{\delta X\}$, - зазоров $\{\delta_k \Delta\} = L_i^k \{\delta \Delta\}$ и упругих перемещений.

Точность расчётов нормирующих множителей должна быть достаточно высокой. Ответ на этот вопрос даёт лишь расчётная практика. Если в пределах какого-либо этапа нормирующие множители для 2-х или более ОС оказались одинаковыми, точность их расчёта следует увеличить. Это позволяет выявить множитель с меньшей положительной величиной, и тем самым, правильно "направить" процесс деформирования системы.

В передачах с подвижными ОС координаты точек приложения реакций работающих связей зависят от общего уровня нагруженности конструкций. Такие системы проявляют нелинейность и в пределах отдельных этапов нагружения. Процесс их деформирования описывается кусочными функциями, состоящими из набора отдельных нелинейных функций. Уровень их локальной нелинейности в значительной мере определяется степенью подвижности ОС, под которой понимается величина изменения координат связей при переходе от одного этапа нагружения к другому.

Изменение координат ОС из-за их подвижностей приводит к изменению структуры матриц податливостей опорных систем $[A^k]$ (I2). Поскольку в качестве подвижных ОС в ВП выступают контактирующие элементы генераторов, то в матрице $[A^k]$ будут изменяться лишь элементы блоков $[PP]$, $[Pf]$ и $\{fP\}$. Они формируются из коэффициентов влияния точек приложения сил $\{P\}$ и $\{F\}$. Подвижность ОС приводит и к изменению компонент вектора $\{\delta, \lambda\}$. Внесение соответствующих изменений в САУ (I2) приводит к необходимости "вложения" в расчётные процедуры шагового метода итерационных или дополнительных расчётных процедур, направленных на уточнение координат работающих подвижных ОС. Возникающие при этом вопросы сходимости и точности расчётов решаются сравнением векторов состояния системы, построенных для выборочных уровней нагружения ВП от исходного недеформированного состояния с векторами состояния, полученными шаговым методом.

Расчёты ВП шаговым методом начинаются от недеформированного состояния или от известного деформированного состояния и связаны с необходимостью строгого перехода от одного опорного состояния системы к другому. При параметрических исследованиях ВП часто возникает необходимость в анализе близких, но несмежных деформированных состояний. Невозможность непосредственного перехода к какому-либо опорному состоянию ОС, минуя ряд предшествующих опорных состояний, приводит к неоправданно большим машинным затратам. Например, вариант расчёта по шагам сдвоенных передач, где общее число ОС по приемлемой сетке контакта достигает 500, а число работающих связей колеблется от 100 до 160, занимает около 1,5 часов процессорного времени ЭВМ ЕС-1033. В подобных случаях более целесообразными представляются итерационные алгоритмы. Они разработаны в форме метода сил (МС), в форме метода перемещений (МП) (несколько модификаций) и в комбинированной форме. Для этих же целей

предложен метод поиска опорных систем нагруженных ОС введением в "неправильных" связях и пошаговым наращиванием "восстанавливающих" сил.

В основу итерационных алгоритмов поиска опорных ОС положен метод последовательных попыток И.М. Рабиновича. Поиск опорных ОС методом сил начинается с замены определённой части неравенств (7) соответствующими уравнениями. Тем самым системе "навязывается" ложное деформированное состояние. Найденный из такой САУ вектор ложных реакций ОС и рассчитанный затем соответствующий ему вектор зазоров проверяются поэлементно на условия (4) – (6). Последовательной сортировкой тех связей, где указанные условия не удовлетворяются и перестроением САУ, из (7) выявляется та опорная система ОС, для которой вектор реакций и вектор зазоров полностью удовлетворяют условиям (4)–(6). Согласно Жикера Г. такая система является истинной. Исследовано несколько схем пересортировки ОС. Сходимость процесса контролировалась последовательным снижением рассчитываемой параллельно потенциальной энергии упругой системы.

Как показала расчётная практика МС оправдан лишь в тех случаях, когда порядок истинной опорной системы ОС не превышает 50 и незначительно отличается от порядка исходной системы опорных ОС. Использование МС при исследовании пространственного контакта элементов ВП, когда размерности решаемых задач резко возрастают, приводит к неоправданно большим машинным затратам. Они вызваны тем, что перестроение неравенств (7) сопровождается многократным обращением матриц податливостей высоких размерностей. Их порядок понижается от предельно высокого до порядка, равного числу работающих ОС. Возникают здесь и проблемы оперативной памяти.

Метод перемещений (МП) в таких случаях более эффективен. Экономия времени достигается тем, что для поиска реакций и вида истинной опорной системы ОС многократно используется сформированная лишь один раз матрица жёсткости упругих элементов $[C(\omega, \varepsilon)]$. Реакции связей определяются её перемножением на векторы узловых перемещений. Неизвестные узловые перемещения, для ненаходящихся в контакте точек, в этом случае определяются из САУ с более низким, чем в МС расширяющимся порядком. Максимальный порядок таких САУ равен разности между общим числом ОС и количеством работающих ОС. Поиск контактных усилий в системе с ОС МП сводится к направленному преобразованию к истинной априорно выбранной "ложной" опорной

системы ОС. Для сопряжённых деталей строится расширенная матрица податливости $[A(\omega, \varepsilon)]$. Её размерность определяется количеством степеней свободы конечно-элементной сетки, числом предварительно выбранных точек возможного контакта, а также количеством точек приложения внешних заданных сил. Разовым обращением такой матрицы строится расширенная матрица жёсткости упругой системы $[C(\omega, \varepsilon)] = [A(\omega, \varepsilon)]^{-1}$. Затем формируется система уравнений равновесия всех точек и узлов указанного набора

$$[C(\omega, \varepsilon)]\{\delta\} = \{R\}. \quad (I5)$$

Здесь $\{\delta\}$ – вектор искомых перемещений, а $\{R\}$ – полный вектор узловых сил. Его отдельные компоненты неизвестны, поскольку представляют собой реакции ОС. Вектор реакций ОС определяется из условия $\{X\} = \{R\} - \{P\}$, где $\{P\}$ – вектор заданных сил.

Между узловыми перемещениями $\{\delta\}$ и начальными зазорами вследствие одностороннего контакта элементов имеют место неравенства

$$\{\Delta^0\} - \{\delta\} = \{\Delta\} \geq \{0\}. \quad (I6)$$

В вектор $\{\delta\}$ системы (I5) в точках возможного контакта элементов вводятся известные величины начальных зазоров. То есть принимается, что $\{\delta^k\}_1 = \{\Delta^0\}_1$, где $\{\delta^k\}_1$ – подвектор вектора $\{\delta^k\}$. Из условия (I6) следует, что "навязанные" перемещения отдельным узлам $\{\delta^k\}_1 = \{\Delta^0\}_1$ всегда будут больше их истинных значений. Для определения перемещений других узлов (где ОС нет или они не в контакте) исключением из (I5) строк и переносом в правую часть столбцов с порядковыми номерами узлов, перемещения которых приняты начальным зазором, формируется новая подсистема

$$[C^k]\{\delta^k\}_2 = \{P^k\}, \quad (I7)$$

где $\{P^k\}$ – скорректированный по (I5) вектор заданных сил.

Описанные преобразования (I5) аналогичны процедуре конденсации систем уравнений МКЭ при решении задач с кинематическими граничными условиями. Размерность микроматрицы $[C^k]$ значительно меньше размерности исходной матрицы $[C(\omega, \varepsilon)]$ и не превышает разности между общим числом ОС и количеством работающих связей. Подвектор неизвестных перемещений определяется из условия $\{\delta^k\}_2 = [C^k]^{-1}\{P^k\}$. Совместно с навязанными перемещениями части узлов $\{\delta^k\}_1$, перемещения $\{\delta^k\}_2$, дают полный вектор перемещений K -ой итерации $\{\delta^k\}$. Его перемножением на расширенную матрицу $[C(\omega, \varepsilon)]$ строится полный вектор сил $\{R^k\}$, соответствующих "навязанному" K -ому состоянию, т.е. $\{R^k\} = [C(\omega, \varepsilon)]\{\delta^k\}$. Элементы фальшвектора реакций ОС определяются

из условия $\{X^k\} = \{R^k\} - \{P\}$. Все компоненты вектора $\{X^k\}$ и соответствующего ему вектора зазоров $\{\Delta^k\} = \{\Delta^0\} - \{\delta^k\}$ проверяются на условия (4)–(6). Тем самым устанавливаются порядковые номера тех ОС, где условия (4)–(6) не выполняются. После их сортировки и решения новой САУ типа (I7), сформированной по той же схеме, что и на предыдущей итерации, определяются "новые" значения вектора перемещений $(K+1)$ -ой итерации $-\{\delta^{k+1}\}$.

Показано, что описанный переход к истинному деформированному состоянию через ряд "навязанных" состояний, является сходящимся процессом, поскольку упругая система последовательно освобождается от одной или нескольких внешних дополнительных сил, которые всегда совершают положительную работу. Она, очевидно, и является разностью потенциальных энергий упругой системы для двух смежных "навязанных" состояний.

Построение рациональных алгоритмов поиска нагруженных ОС связано с необходимостью сокращения машинных затрат. В задачах с высокой размерностью среди компонент вектора перемещений $\{\delta^k\}_2$, определяемых многократно из решения САУ (I7) возрастающих порядков, имеется весьма большое число тех узловых перемещений, которые в дальнейшем непосредственно не используются при решении силовой задачи. Для направленного поиска опорной системы ОС в этом случае целесообразно использовать сокращённую матрицу жёсткости $[C_0(\omega, \varepsilon)]$. Она строится лишь для тех точек, над которыми расположены активные ОС. В набор включаются и те точки, в которых приложены заданные внешние силы. Такая матрица получается обращением сокращённой матрицы податливости $[A_0(\omega, \varepsilon)]$, построенной предварительно для указанных точек $[C_0(\omega, \varepsilon)] = [A_0(\omega, \varepsilon)]^{-1}$. Такой путь получения матрицы жёсткости снимает ограничение на выбор местоположения узлов конечно-элементной сетки при расчёте матрицы $[A_0(\omega, \varepsilon)]$ МКЭ, не требуя полного соответствия положения узлов положению ОС. Последнее особенно важно при исследовании ВП, где для разных групп контактов не удаётся подобрать единую приемлемую для практических расчётов конечно-элементную сетку. В этом случае расчёт значений функций Грина для точек упругих элементов, расположенных над ОС и лежащих в пределах границ отдельных конечных элементов, сравнительно легко выполняется через узловые перемещения последних.

Процедура поиска опорной системы работающих ОС и использованием сокращённой матрицы жёсткости остаётся той же. В ней расширенная матрица $[C(\omega, \varepsilon)]$ заменяется сокращённой $[C_0(\omega, \varepsilon)]$.

867288711

Дальнейшая оптимизация алгоритма достигается приближением разными способами к истинному состоянию навязанного системе исходного ложного состояния. Речь идёт об исключении из поиска пассивных для рассматриваемого уровня нагружения ОС. Эффективность алгоритма повышается, если использовать приём исключения отдельных групп пассивных ОС в несколько стадий. После ограниченного числа итераций (K_i), начатых с включения в работу всех ОС, процесс поиска останавливается. По величинам рассчитанных сил и зазоров выявляется и исключается из рассмотрения группа явно пассивных ОС. Матрица жёсткости очередной стадии поиска формируется лишь для точек, расположенных над оставшимися ОС. Затем вновь делается ограниченное число итераций, по результатам которых выявляется новая группа пассивных ОС. Их исключение позволяет вновь сократить размеры матрицы $[C(\omega, \varepsilon)]$. Расчётное время сокращается потому, что искомые перемещения на каждой стадии определяются из решения САУ (17) с низким расширяющимся порядком от $(I \times I)$ до $(K_i \times K_i)$, а САУ более высокого порядка каждый раз отсекаются. Достоинство такого подхода состоит и в возможности ограничения максимального порядка решаемых САУ (K_i), что позволяет экономить и машинную память. Однако необоснованное уменьшение (K_i) приводит к увеличению числа необходимых расчётных стадий. Это связано с дополнительными затратами времени, поскольку матрица $[C(\omega, \varepsilon)]$ каждой стадии получается трудоёмкой процедурой обращения соответствующей ей матрицы податливости $[A_0(\omega, \varepsilon)]$. В этом случае экономия времени, достигнутая за счёт исключения на каждой стадии САУ высокого порядка, снижается его затратами на расчёт и обращение матриц податливости. При $K_i = I$, что соответствует пересортировке связей после каждой итерации, расчётная процедура МП становится тождественной процедуре МС, когда на каждой итерации исключается лишь одна ОС.

Для решения подобных задач положительно зарекомендовал себя комбинированный алгоритм, разработанный совместно с Ю.С. Ивановым и реализованный им для численных исследований 2-х кромоного контакта зубьев ВП с плунжерными генераторами волн. На первых итерациях используется расчётная процедура МП с расширением порядка САУ до $N/2$, а на последующих — процедура МС с сокращением САУ от $N/2$ до N , где N — число работающих ОС. Эффективность метода достигается исключением САУ с высокими порядками. Причём, чем сильнее неравенство $N \ll N/2$, тем решение комбинированным методом эффектив-

нее. Если число нагруженных ОС подчиняется условию $n > N/2$, то порядки решаемых САУ обоими методами не пересекаются, задача автоматически решается более эффективным методом перемещений.

Эффективность изложенных выше разных подходов к решению одной и той же тестовой задачи по расчёту сил взаимодействия ПК ВЗ-80 с жёсткой обоймой наглядно иллюстрируется содержанием таблицы I

Таблица I

п/п	Метод решения	Время расч. сек.	Начальный поря- док САУ
1.	МП с матрицей сетки МКЭ [С]	890	925x50 987x50
2.	МП	208	6 66
3.	МП с удачной исходной зоной [С ₀]	20	I I3
4.	МС	230	69 9
5.	МП / МС	80	6 / 37 37 / 9
6.	МС / МП	361	69 / 37 37 / 66

На основе анализа предложенных алгоритмов, сделан вывод о возможности их применения в "усечённом виде". Поскольку на заключительной стадии поиска рассматриваются, как правило, энергетически близкие деформированные состояния, при повторных расчётах ВП, когда вид кривой изменения энергии по итерациям для одного пакета исходных данных уже известен, от выполнения большого количества заключительных итераций можно отказаться, довольствуясь при этом расчётом приближённого деформированного состояния. В этом случае все условия одностороннего контакта связей (4)–(6) строго, конечно, не удовлетворяются. Однако, в итерационных методах строгое выполнение указанных условий не обязательно, как это требуется в шаговом методе, где строгая фиксация их нарушений предопределяет дальнейшее направление всего шагового процесса.

Для целей анализа близких деформированных состояний совместно с Лхминарскими разработан метод расчёта реакций и зазоров в системах с ОС восстанавливающими силами. Он объединяет в себе положительные качества шагового и итерационных подходов. Поиск

приближенной опорной системы ОС начинается итерациями. Найденные для неё силы и зазоры восстанавливаются затем к истинному состоянию с помощью введения и пошагового наращивания в "неправильных" связях восстанавливающих сил. Введенные силы прикладываются к упругим элементам сразу или группами, или поочередно к тем связям, где условия (4)–(6) не выполняются. Вопрос о сходимости решения к истинному в этом случае решается автоматически, поскольку однопараметрическое разгружение кусочно-линейной системы "восстанавливающими" силами выполняется с использованием изложенной выше расчётной процедуры шагового метода и аппарата линейного нормирования эталонных решений. Переход от исходного к истинному состоянию, сопровождается последовательным переводом ложных ОС в группу правильных связей.

Как показали расчёты этим методом сдвоенных передач, наиболее экономичным является процесс одновременного введения восстанавливающих сил во всех ложных связях исходного состояния. При небольших отклонениях границ исходной зоны контакта от действительной алгоритм пошагового восстановления более экономичен в сравнении с шаговым методом последовательных нагружений. Однако, если исходная зона контакта задана неудачно, с большими отклонениями от действительной (т.е. $N-N \neq N$), то более эффективным будет шаговый метод.

Четвёртый раздел работы посвящён обоснованию перехода от континуальной модели контакта элементов ВП к дискретным аналогам. Исследованы вопросы точности и сходимости дискретных решений. С целью выявления интенсивностей распределённых контактных нагрузок предложен обратный переход от дискретных аналогов с редкой сеткой к модели контакта элементов ВП с более мелкой сеткой. В основу такого перехода положена модифицированная схема итераций Зейделя для ^{матрицы} податливости высокой размерности. Такая матрица строится для мелкой сетки с приемлемым шагом. В процессе получения решения она не обращается. В качестве исходного приближения для вектора контактных усилий в этом случае принимается вектор усилий, полученный аппаратом строительной механики для доступной по размерности редкой сетки. Искомая интенсивность распределённой нагрузки получается равномерным размазыванием дискретных сил, полученных для мелкой сетки по всей площади внутренних участков, а сил, расположенных у границ зон контакта – на половине шага дискретизации.

В предложенном алгоритме выравнивания контактных нагрузок

показано, что "управлять" характером их распределения можно несколькими способами. Наиболее просто такая задача решается направленным подбором жёсткостей самих упругих связей и их исходных осадков. Алгоритм выравнивания нагрузок между связями иллюстрирован примерами расчёта узлов с подшипниками качения и скольжения и показательными балочными примерами. Они изложены в приложении к работе.

Применение дискретных аналогов в расчётах сил контакта элементов ВП оправдано тем, что зоны их контакта формируются в основном за счёт деформаций изгиба. Переход к дискретному аналогу основан на замене искоемых функций распределённых контактных усилий статически эквивалентными системами сосредоточенных сил. Такая замена позволяет перейти от сложного аппарата интегро-дифференциальных уравнений к системам линейных алгебраических уравнений. Однако, в этом случае, возникает необходимость в дополнительном исследовании вопросов точности и сходимости дискретных решений. Поскольку исследование этих вопросов для реальных ВП связано с большими машинными затратами из-за меняющихся высоких размерностей задач, они рассмотрены с методологической точки зрения на более простых показательных примерах. Исследовано взаимодействие консольной, шарнирной и свободной балок с тремя видами профильных штампов. Количество точек дискретизации контакта варьировалось от 3 до $N = 101$. Расчётом установлено, что точность решения САУ с ростом её порядка в указанном диапазоне практически не снижается. Она колеблется от 10^{-14} до 10^{-13} . Точность зависит лишь от условий закрепления балок, что объясняется изменением структуры функций Грина и соответствующих матриц податливостей и практически не зависит от формы штампа.

Интегральная сходимость решений достигает величины порядка 1% при $N \leq 16$. Увеличение количества точек дискретизации для консольных балок до 101 приводит к улучшению сходимости до 10^{-3} - 10^{-4} , однако, для шарнирной и свободной балок при $N \approx 41 + 43$ сходимость начинает ухудшаться, достигая при $N \approx 51 + 61$ величины 10^{-1} .

Сравнение дискретных решений с численными, полученными реализацией методом трапеций интегральных уравнений Фредгольма I рода с ядром Гильберта-Шмидта, показало их полное совпадение.

В дискретной постановке рассмотрена задача о контакте плоского и объёмного штампов с упругой полуплоскостью и полупространством. Сходимость решений проверялась сопоставлением расчётных

интенсивностей нагрузок с их аналитическими значениями в трёх точках: в центре зоны; в середине и в "плавающей" точке. Такая точка была выбрана на один шаг дискретизации от границ контакта потому, что в граничных точках аналитическое решение терпит разрыв. Установлена зависимость сходимости решений, которая для плоского штампа достигает -1% уже при $N = 11$. Лучшая сходимость (от 10% до 1%) имеет место в центральных точках зоны. В пригнущенной точке сходимость решения не превышает $20 - 15\%$. Такое расхождение связано с высоким градиентом контактной нагрузки в этой зоне.

Количество точек контакта вдоль одной стороны объёмного штампа варьировалось в пределах от 5 до 17. Как показывают расчёты, уже при $N = 9$ сходимость достигает величины порядка 1% .

Результаты исследований позволили установить, что для получения приемлемых по точности и сходимости решений для ВП, каждую область контакта достаточно разбивать всего лишь на 8 - 12 участков. При этом сетки контакта между разными элементами ВП следует выбирать и располагать так, чтобы совпадали положения их узлов.

В пятом разделе представлены расчётные модели и результаты исследования сил взаимодействия элементов и диаграмм жёсткости ВП с тремя схемами волновых генераторов. Рассмотрены наиболее перспективные волнообразователи - плунжерный, дисковый и кулачковый.

Волновые передачи с плунжерными генераторами имеют малую инерционность. Они преобразуют энергию находящихся под давлением жидкости или газа (или энергию электромагнитного поля - респонсивны) в энергию вращательного движения выходного звена. Являясь по существу тихоходными безредукторными двигателями эти механизмы особенно перспективны для автономных бортовых приводов.

Отличительная особенность ВП с плунжерными генераторами состоит в том, что бегущая волна деформации ИК создаётся системой переменных сил со стороны толкателей (плунжеров) $\{P(t)\}$. Координаты точек приложения этих сил к венцу ИК остаются неизменными. Характер их изменения во времени однозначно определяется только рабочим давлением и конструктивными параметрами распределительного золотника. Изменение сил в толкателях при медленном вращении золотника происходит по трапециoidalному или близкому к нему закону, рис. 4. Каждому положению золотника (фазе) соответствует своя система сил взаимодействия толкателей с венцом ИК, а следовательно, и единственной образом соответствующая ей ответная система сил взаимодействия упругих зубьев колёс.

С ростом скорости вращения золотника импульсы сил видоизменяются, приближаясь по форме к треугольной. Это хорошо подтверждается осциллограммами рабочих давлений в полостях толкателей, полученными Ивановым Ю.С. и Николаевым В.Ф. При определённых скоростях золотника возможны уменьшения амплитудных значений сил со стороны толкателей, что приводит к понижению предельного для данной ВП передаваемого крутящего момента. Все это выявляется в процессе решения контактной задачи. Многократными расчётами устанавливаются и те частоты следования импульсов сил, при которых нарушаются условия зацепления зубьев колёс.

Решение задачи для таких ВП по шагам сводится к расчёту из (12) спектров сил контакта зубьев колёс $\{Q\}$. Составной частью пакета исходных данных задачи являются осциллограммы давлений в полостях толкателей. По ним формируются векторы сил взаимодействия толкателей с венцом $\{P\}$, соответствующее разным фазам распределительного золотника.

Вектор $\{\delta_k \lambda\}$ - в этом случае состоит из приращений упругих осадок точек контакта зубьев колёс за счёт их собственных податливостей в направлении сил $\{Q\}$. Зависимость элементов данного вектора с элементами вектора $\{\delta_k Q\}$ принимается линейной, т.е. $\{\delta_k \lambda\} = [Z]\{\delta_k Q\}$, здесь $[Z]$ - ленточная матрица собственных податливостей зубьев колёс. Их величины, как правило, не превышают 5 - 10% от соответствующих элементов главной диагонали матрицы $[A^k]$. Поэтому в практических расчётах учитывались лишь элементы главной диагонали матрицы $[Z]$. Они принимались равными $Z_{ii} = C_i^2 C_i^0 / (C_i^2 + C_i^0)$, где значения жёсткостей зуба ЖК (C_i^0) и зуба ПК (C_i^2) - определялись из решения плоской задачи теории упругости МКЭ (разд. 2.).

Итерационный поиск нагруженных зубьев на разных уровнях нагружения ВП сводится к направленному выбору из расширенной системы (7) таких подсистем (тех уравнений), решений которых дают векторы искомых сил $\{Q\}$. Последние, совместно с соответствующими им зазорами $\{\Delta\}$, должны удовлетворять всем неравенствам (4) - (6).

В целях улучшения сходимости поиск опорной системы ОС целесообразно начинать от ближайшего к искомому известному деформированного состояния. Сходимость заметно ухудшается лишь при приближении к предельному уровню нагружения ВП.

Исследования показывают, что в таких ВП зубья колёс контактируют обеими кромками. По мере нагружения ВП рабочие кромки до-

гружаются, а нерабочие – разгружаются. Контакт зубьев по обеим кромкам исключает наличие люфтов, особенно нежелательных для высокоточных приводов. Нагрузка по рабочим кромкам распределена существенно неравномерно. По всей длине нагружена лишь часть зубьев. С ростом частоты вращения золотника неравномерность нагрузки по зубьям несколько сглаживается. Однако, при наличии у золотника ускорения, неравномерность нагрузки ещё более усиливается. Типовые эпюры сил $\{Q\}$ для ВП на базе ВЗ-80 даны на рис. 3. На рис. 5. представлены диаграммы крутильной жёсткости той же ВП, построенные для двух (крайних) фаз золотника. Они определяют границы "коридора" изменения жёсткости ВП при повороте золотника на один угловой шаг между толкателями. Периодическое изменение жёсткости таких ВП и предельного момента служат одной из причин появления параметрических колебаний управляемого объекта.

Дисковые генераторы относительно просты в изготовлении и имеют сравнительно небольшие моменты инерции. Они создают кинематическое нагружение венца ИК. Между венцом и дисками устанавливается неизвестное распределённое давление $p(\varphi)$. Оно заменяется в расчётах дискретными силами $P_i = p(\varphi_i) \Delta S$, которые разносятся по принятым расчётным сечениям $i = \overline{1, I, II}$ (рис. 6.). Дискретизация поверхностного контакта равносильна замене гладких дисков рельефными. Силы взаимодействия выступов с венцом $\{P\}$ и зубьев колёс $\{Q\}$ рассматриваются реакциями ОС. Для их определения используются изложенные выше шаговые и итерационные алгоритмы. Расчёт выполняется в две стадии. Вначале устанавливаются силы и зазоры, соответствующие собранному состоянию ВП. Результаты такого решения используются затем в качестве исходной информации для анализа сил контакта элементов и зазоров в нагруженной ВП. На стадии моделирования "сборки ВП" элементы вектора $\{W_A\}$ определяются из соотношения $W_{Ai} = p(\varphi_i) - R_{Ai}$, где $p(\varphi_i)$ – радиус-вектор дисков. Он равен $p(\varphi_i) = (e - \lambda_n) \cos \varphi_i + \sqrt{R_{Ai}^2 - (e - \lambda_n)^2 \sin^2 \varphi_i}$. Приведённое соотношение получено как уравнение нецентральной, симметрично смещённой окружности внешнего контура дисков. Здесь R_{Ai} – радиус дисков, e – эксцентриситет их посадки, а $\lambda_n = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{K-1} (P_j^i)^{K-1} \cos \varphi_j / C_{np}$ – их упругая осадка за счёт выборки зазоров в посадочных подшипниках. Величина λ_n^* зависит от искомых сил $\{P\}$ и вводится в расчёт внешними итерациями. Зависимость коэффициента приведённой жёсткости – C_{np} – устанавливается либо из предварительного расчёта всего подшипникового узла (такой расчёт приведён в приложении), либо экспериментально.

Расчёт сил взаимодействия венца ИК с упругими звеньями ЖК и с "выступами" дисков генератора при последовательном нагружении ВП полезной нагрузкой моделируется в системе с остановленными колёсами. Генератор в такой системе может поворачиваться на угол θ лишь за счёт дополнительного изменения формы ИК под нагрузкой вследствие изменения величины передаваемого момента. Моделирование процесса нагружения ВП позволяет построить по шагам зависимость $T(\theta)$, представляющую упругую ветвь диаграммы крутильной жёсткости ВП. В процессе решения задачи угол поворота генератора (θ) задаётся, а момент (T) определяется из условия равновесия ЖК. Система приращений искомых сил определяется из САУ (12). Для рассматриваемых ВП матрица $[A(\omega, \varepsilon)]$ формируется из блоков $[qq]$, $[qP]$ и $[PP]$. К диагональным элементам блоков $[qq]$, $[PP]$ – добавляются собственные податливости сопряжённых элементов.

Приращения радиальных перемещений точек венца ИК $\{\delta_k \lambda\} = \{\delta_k w\}$ вычисляются через приращения радиусов-векторов контактирующих точек дисков $\{\delta_k w_k^i\} = \{\delta_k w_k^i\}$. В формулу для расчёта радиуса-вектора j -ой точки i -ого сечения диска вводятся угловые координаты этой точки $\varphi_j^k = \varphi_j^{k-1} + \delta_k \theta$. Здесь $\delta_k \theta$ – этапное приращение угла поворота кулачка вследствие приращения момента на величину $\delta_k T = 2R \cos \alpha \sum \sum \delta_k Q^i$.

Способность расчёта ВП с дисками состоит в том, что в пределах этапов имеет место нелинейная зависимость между элементами вектора $\{\delta_k w_k^i\}$ и приращениями $\delta_k \theta$ и $\delta_k \lambda_n$. Она является следствием перестроения зон контакта поворачивающихся дисков с венцом. В расчётах эта зависимость разлагается в степенной ряд с удержанием первого члена. Уточнённая податливость λ_n вводится в расчёт внешними итерациями.

На рис. 7, 8 показаны расчётные огибающие дискретных сил $\{P\}$ и $\{Q\}$ (для крутящих моментов: 0 – $T = 0$, 1 – 6 нм; 2 – 60 нм; 3 – 150 нм) и диаграмма крутильной жёсткости герметичной ВП с диаметром ИК 60 мм. Такая передача разработана на каф. ДМ МВТУ им. Н.Э. Баумана под руководством проф. Иванова М.Н., доц. Амосовой Э.П. Анализ диаграммы показывает, что жёсткость ВП "в целом" возрастает. При этом имеет место эффект чередования участков повышенной жёсткости с участками падающей жёсткости. С ним связано изменение вида АЧХ крутильных колебаний управляемого объекта с малой амплитудой. Выявленный эффект служит одной из причин появления параметрических колебаний.

Кулачковые генераторы нагружают наружное кольцо гибкого подшипни-

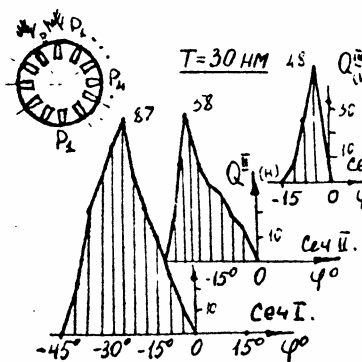


Рис. 3

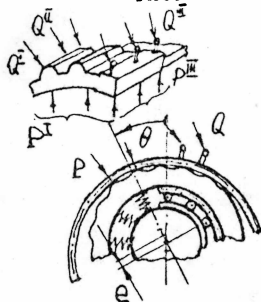


Рис. 6

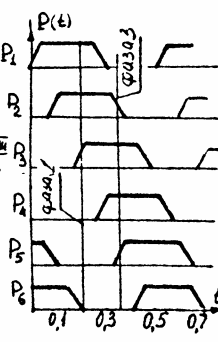


Рис. 4

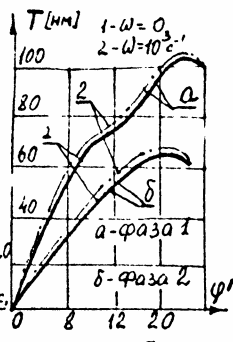


Рис. 5

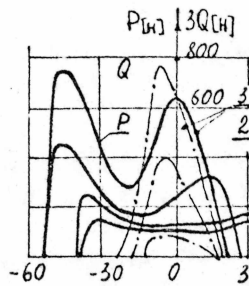


Рис. 7

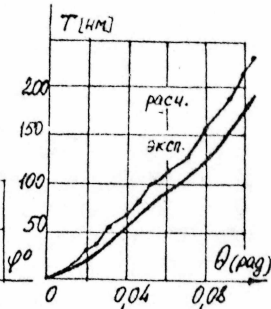


Рис. 8

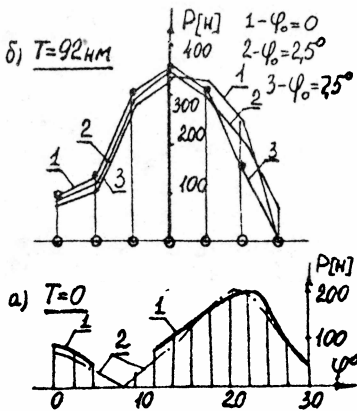


Рис. 9

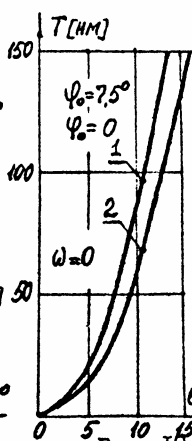


Рис. 10

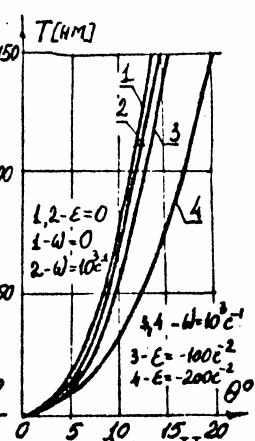


Рис. 11

ка (НКП) и венец ПК кинематическим образом, через подвижные тела качения. Задача расчёта таких ВП отличается повышенной размерностью, поскольку в контакте одновременно находится группа из 4-5 тел. В варианте сдвоенных передач число контактирующих тел увеличивается до 6-8, а число точек их возможного контакта до 500. Трудности расчёта сил контакта увеличиваются и из-за того, что среди таких точек имеются подвижные ОС- тела качения.

Разработаны две схемы учёта подвижности ОС. Первая из них связана с изменением исходных координат подвижных ОС и вектора исходных зазоров $\{\Delta^*\}$. Вторая схема базируется на введённой гипотезе о пропорциональности изменения углов упругого поворота сепаратора - θ_c и кулачка - θ . Принимается $\theta_c = K_\theta \theta$, где $0 < K_\theta < 1$. Для стандартных ВЗ-160 величина K_θ колеблется в пределах 0,4 + 0,55 и слабо зависит от передаваемого момента. В этом случае координата y -ого тела качения, совпадающая с координатой центра гнезда сепаратора всегда известна и определяется по формуле $\varphi_j^k = \varphi_j^{k-1} - K_\theta \delta_k \theta$. Вторая схема значительно упрощает учёт подвижности ОС, однако требует экспериментального определения величины K_θ .

С целью сокращения размерности задачи разработана упрощённая методика расчёта вектора сил $\{X\}$. В её основу положена схема деформирования ПК и НКП пакетом. В этом случае силы контакта венца и НКП $\{F\}$ рассчитываются отдельно, после расчёта сил $\{Q\}$ и $\{P\}$.

Исследования ВЗ-80 показывают, что при прохождении телами качения одной волны зацепления нагрузка на них пульсирует не менее трёх раз, рис. 9.а. То есть частота пульсации нагрузки на шары в шесть и более раз выше частоты вращения генератора, что служит дополнительным источником вынужденных колебаний. В нагруженной ВП подвижность тел качения приводит к изменению максимальных усилий до 10%. При этом изменения формы деформирования венца и зазоров не превышают 1%. Размеры зон контакта и формы огибающих нагрузки меняются более существенно, рис. 9.б. Влияние подвижности ОС на диаграммы крутильной жёсткости ВП можно оценить по рис. 10, где они показаны для двух граничных положений сепаратора и кулачка и определяют границы "коридора" изменения жёсткости ВЗ-80 из-за подвижности ОС. Влияние угловой скорости ω менее значительно, чем влияние ускорения генератора - ε , рис. 11. Преобладающее влияние на распределение сил $\{P\}$ и $\{F\}$ оказывают исходные зазоры в подшипнике и в стыке "венец ПК-НКП". С ростом зазоров в подшипнике концентрация сил $\{P\}$ увеличивается. Зазоры в зубчатом зацеплении влияют в основном на распределе-

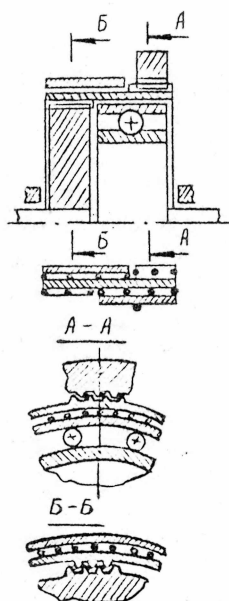
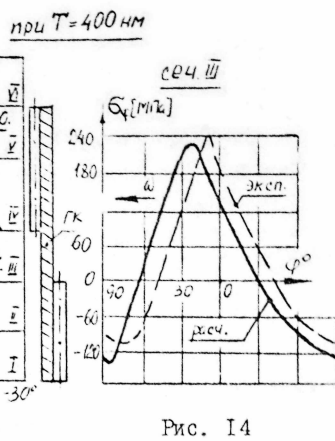
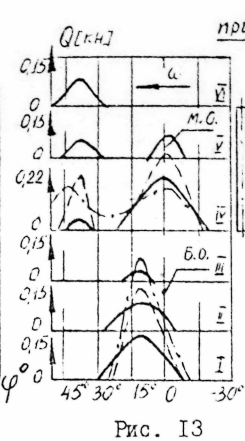
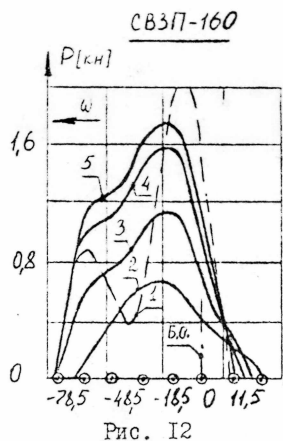
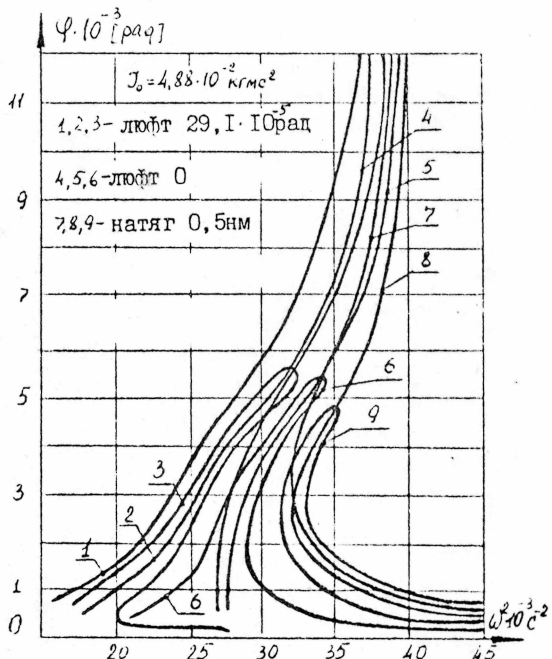


Рис. I5. Схема
контакта элементов
СВЗП.



ние сил $\{Q\}$. На распределение сил и их величину существенное влияние оказывают собственные податливости сопряженных элементов. Например, неучет контактной податливости тел качения в СВЗП, рис. 12-15, приводит к их догружению до 40%. Та же тенденция в разной мере наблюдается и в стыке "венец ИК - НКП", и в зубчатом зацеплении.

Разработанная модель использовалась и для анализа контакта элементов двоярных ВП с короткими незакрепленными гбкими колесами. По этой причине в расчетах САУ (20) дополнялось уравнением статического равновесия ИК. Результаты и методика исследований приведены в приложении к работе совместно с результатами исследований ВЗ-80.

В шестом разделе работы изложены методология и некоторые результаты исследований волновых механизмов на основе машинного моделирования кинетики контакта их звеньев. Использование для этих целей предложенных алгоритмов позволяет еще на стадии раннего проектирования выявить влияние на характер упруго-силового взаимодействия звеньев, их прочность и основные рабочие характеристики ВП разных конструктивных и технологических факторов. Показано, что в ряде случаев машинные эксперименты представляют собой более дешевый способ получения информации о векторесостоянии элементов ВП.

Исследовано влияние на силовое взаимодействие и диаграмму жесткости ВЗ-80 последствий износа деталей в контактирующих стыках основных узлов и технологических погрешностей их изготовления и сборки. Установлено, что крутильная жесткость при "изнашивании" ВП понижается из-за увеличения зазоров между сопряженными элементами. Контактная нагрузка при этом локализуется, что приводит к прогрессирующему износу деталей.

Моделированием на ЭВМ исследовано влияние на жесткость ВП и характер упруго-силового взаимодействия ее звеньев технологических погрешностей их изготовления. Из-за отсутствия информации о вероятностном законе распределения погрешностей задачи рассмотрены с методической точки зрения в детерминированной постановке. Выявлен ряд причин периодического изменения жесткости ВП. Среди них циклические погрешности зубьев колес, дискретность зубьев и тел качения и их подвижность.

Показано, что в ряде случаев численные эксперименты позволяют получить информацию о силах с более высокой достоверностью и оценить точность натурных экспериментов по их замеру методами тензометрирования на опытных образцах. Выполненная оценка точности натурального эксперимента по замеру сил зубчатого зацепления методом тензометрирования показала, что на границах зон контакта метод тензометрирования дает погрешность свыше 30%. Поскольку постановка более корректного

эксперимента по замеру зон и величин сил взаимодействия деталей НИ является сложной технически трудновыполнимой задачей, совместно с Ивановым Ю.С. разработан электроконтактный способ замера зон контакта. В его основе лежит препарирование в тело зуба тонких электрических контактов. Такой способ практически не изменяет геометрии и жесткости сопряженных элементов. Он позволяет с высокой точностью осуществлять контроль за положением и размерами зон зацепления мелко-модульных зубьев волновых механизмов в процессе их работы. Недостаток способа состоит в том, что он не дает информации о величине и характере распределения контактных сил.

В этом же разделе выполнено моделирование причин возбуждения параметрических колебаний в НИ. Исследованы АЧХ собственных и вынужденных крутильных колебаний объекта - J_0 на выходе герметичной НИ, ВЗ-160 и ВЗ-80, рис. 16. Исследования выполнены методом Рунге - Кутты, методом С.П.Тимошенко и методом припасовывания. Рассматривались динамические модели передач с люфтом, без люфта и с натягом, что соответствует реальным объектам.

Расчет спектров частот изгибных колебаний гибких элементов НИ для разных опорных систем нагруженных ОС сведен к условию $\text{Det}[A^k]=0$. Спектр частот внутренних резонансов для ИК определяется из условия $\text{Det}[q q]=0$, а для НКП - из условия $\text{Det}[p p]=0$. Здесь $[A^k]$ - матрица податливости К-ой опорной системы, а $[q q(\omega, \varepsilon)]$, $[p p(\omega, \varepsilon)]$ - ее блоки, соответствующие гибкому колесу и НКП.

Основные результаты и выводы

полученные автором в диссертации, сводятся к следующему.

1. Сформулированы единая методология и системный подход к решению существенно нелинейных задач статики и динамики контактного взаимодействия элементов упругих систем при наличии между ними подвижных односторонних связей, деформируемых подвижными нагрузками.
2. Для численных исследований сил одностороннего контакта упругих элементов волновых механизмов разработаны в виде машинных алгоритмов: вариант шагового метода последовательных нагружений; три варианта итерационного метода (в форме метода сил, в форме метода перемещений и в комбинированной форме с несколькими модификациями); предложен метод поиска опорных систем нагруженных связей введением по шагам "восстанавливающих" сил в "неправильных" связях, объединяющий в се-

бе положительные качества шагового и итерационного подходов. Численно исследованы вопросы точности и сходимости предложенных алгоритмов и определены границы их целесообразного применения.

3. Разработаны дискретные физические и математические модели пространственного контакта звеньев ВП, одинаково приемлемые для изучения статических и динамических режимов их нагружения. Полнота представления моделей охватывает: конструктивные особенности волнообразователей; подвижность односторонних связей и нагрузок между элементами ВП; упругие податливости всех сопряжённых звеньев; технологические погрешности изготовления контактирующих элементов и все виды зазоров в размерной цепи "жёсткое колесо – кулачок волнообразователя". Дано новое представление зазоров между зубьями в виде их геометрических и упругих составляющих. Введена функция, смена знака которой позволяет установить те уровни нагружения ВП, при которых наступает заедание зубьев колёс (интерференция).

4. С целью уточнения характера и интенсивности контактной нагрузки в пределах отдельных зон предложен алгоритм обратного перехода от дискретного решения, полученного методами строительной механики для сетки с крупным шагом, к дискретному решению для мелкой сетки. В его основу положена модифицированная процедура итераций Зейделя, исключаяющая операцию обращения плотно заполненной матрицы податливости высокой размерности, построенной для мелкой сетки зон контакта. Разработаны алгоритмы выравнивания контактной нагрузки.

5. В рамках поставленных задач выполнен большой объём исследований разных ВП: герметичных ВП с диаметром ГК 60 мм и передач ВЗ-80 с дисковыми и плунжерными генераторами; стандартных ВП с кулачками ВЗ-80 и ВЗ-160; одвоенных передач с короткими ГК СВЗП-160. Выявлены основные причины периодического изменения крутильной жёсткости волновых механизмов, порождающие параметрические крутильные колебания приводимых ими в движение управляемых объектов. Исследованы АЧХ их собственных и вынужденных колебаний.

6. Предложена и реализована методика исследования влияния на характеристики ВП моделированием на ЭВМ последствий износа основных деталей ВП, технологических погрешностей их изготовления и сборки. Машинным моделированием условий натурального эксперимента по определению контактных нагрузок на зубья ВП методами тензометрирования сделана оценка их точности. Предложен электроконтактный способ замера зон контакта мелкозубчатых зубьев колёс волнового зацепления.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Клеников С.С. Исследование распределения нагрузки по телам качения кулачкового генератора волновой передачи. // Изв. вузов. Машиностроение, 1976, №12, с.54-58.

2. Амосова Э.П., Клеников С.С., Хрисанов В.В. Исследование силового взаимодействия дискового генератора. // Изв. вузов. Машиностроение, 1976, №7, с.38-42.

3. Клеников С.С. Совместное деформирование упругого вкладыша и венца гибкого колеса волновой передачи. // Изв. вузов. Машиностроение, 1976, №11, с.50-54.

4. Алфутов Н.А., Клеников С.С. Расчёт сил взаимодействия упругих элементов волновых передач шаговым методом. // Вестник машиностроения, 1978, №7, с. 26-29.

5. Клеников С.С. Волновая передача как упругая система с односторонними связями. // Изв. вузов. Машиностроение, 1978, №10, с.51-55.

6. Клеников С.С. Динамика волновой передачи. // Материалы семинара "Использование волновых передач в промышленности" - Белорусское правление НТО МАШПРОМ, МИНСК, 1978, с.38-48.

7. Клеников С.С., Сергеев В.С. Взаимодействие упругих элементов нагруженной волновой передачи с кулачковым генератором. // Изв. вузов. Машиностроение, 1978, №11, с.40-44.

8. Клеников С.С., Сергеев В.С. О линейном нормировании эталного решения задачи определения нагрузок на зубья и тела качения волновой передачи с кулачковым генератором. // Изв. вузов. Машиностроение, 1980, №4, с.45-49.

9. Клеников С.С. Упруго-пластическое деформирование зубчатого венца гибкого колеса волновой передачи. // Депонир. в ВНИТИ 07.06.82, №2830-82 ДЭП.М., 1982-12с.

10. Клеников С.С., Комков К.Ф., Иванов Ю.С. Исследование напряжённого состояния зубчатого венца гибкого колеса волновой передачи методом конечного элемента. // Депонир. в ВНИТИ 07.06.82г., №2829-82 ДЭП.-М.1982г. -41с.

11. Клеников С.С. Взаимодействие дискового генератора с гибким и жёстким колёсами волновой передачи. // Изв. вузов. Машиностроение, 1982, №4, с. 7-12.

12. Клеников С.С., Иванов М.Н., Сергеев В.С., Люминарский И.Е. Теоретические исследования влияния зазоров и податливостей на силовое взаимодействие элементов нагруженного волнового редуктора

МВЗ-160.//Междуз. сб.научн.трудов "Волновые передачи и механизмы".
- М., МИСИ им.В.В.Куйбышева,1985, с.75-89

13. Клеников С.С. Построение рациональных алгоритмов поиска опорных систем нагруженных односторонних связей.//Сообщение I.- Изв.вузов. Машиностроение, 1986, №8, с.8-13.

14. Клеников С.С., Иванов Ю.С., Щагина С.А. Построение рациональных алгоритмов поиска опорных систем нагруженных односторонних связей. Сообщение II.//Изв.вузов.Машиностроение, 1986, №10,с.14-18.

15. Клеников С.С. Динамика контактного взаимодействия упругих элементов волновых передач. Сообщение I.//Изв.вузов.Машиностроение, 1986, №12, с.21-26.

16. Клеников С.С. Динамика контактного взаимодействия упругих элементов волновых передач. Сообщение II.//Изв.вузов. Машиностроение,1987, №1, с.23-28.

17. Клеников С.С. Расчёт динамического взаимодействия упругих систем с подвижными односторонними связями.//Деп. в ВНИТИ 04.06.86г. №4044-В86/ДЭП - 24 с.; №4045-В86/ДЭП.-15с.; №4046-В86/ДЭП-13с.

18. Агамиров В.Л., Клеников С.С., Люминарский И.Е. Распределение нагрузок между элементами сдвоенной волновой передачи при её сборке.//Вестник машиностроения, 1986, №10, с.17-20.

19. Клеников С.С., Парфёнов А.П., Амосова Э.П. Основные сведения и краткий обзор работ по волновым передачам, опубликованным в период с 1962 по 1982 годы включительно.//Депонировано в ВНИТИ, -М., 20.11.84: Сообщение I -№7440-84 ДЭП, -240с.; Сообщение II - №7441-84 ДЭП, -211 с.; Сообщение III - №7441-84 ДЭП, - 139с.

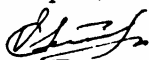
20. Клеников С.С. Анализ причин возникновения параметрических колебаний в волновой передаче.//Деп. № 1313-ап, -М.,1986,-12с.

21. Клеников С.С., Люминарский И.Е., Люминарский С.Е. Шаговый поиск опорных систем нагруженных односторонних связей методом введения восстанавливающих сил.//Изв.вузов.Машиностроение, 1987, №7,с.34-40.

22. Клеников С.С., Люминарский И.Е. Силовое взаимодействие упругих элементов нагруженных сдвоенных волновых зубчатых передач. //Вестник машиностроения, 1988, №1, с.21-24.

23. Клеников С.С. Проблемы расчёта гибких колёс волновых передач при упругом и упругопластическом деформировании.//Вестник машиностроения, 1988, №4, с.9-13.

Кроме указанных по теме диссертации опубликовано ещё 15 работ.



КЛЕНИКОВ СЕРГЕЙ СЕРГЕЕВИЧ

РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ И РАЦИОНАЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЙ
ЗАДАЧ СТАТИКИ И ДИНАМИКИ СИЛОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
УПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ ВОЛНОВЫХ ПЕРЕДАЧ

(А в т о р е ф е р а т)

Подписано к печати 30.II.88 Формат 60х90 1/16 2,0 п.л.
Уч.изд.л. 1,8 Тираж 120 Заказ 1090 МЛ-55344

Ротапринт Завода-вуза при ЗИЛе, 109068, Москва,
Автозаводская, 16