

На правах рукописи



Власов Данила Денисович

**АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТОВ ПРИ ИСПЫТАНИЯХ НА
ИЗГИБ ДЛЯ УТОЧНЕННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕФОРМАЦИОННЫХ
И ПРОЧНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИТОВ**

1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Москва, 2026

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук.

Научный руководитель:

Доктор технических наук, профессор,
главный научный сотрудник лаборатории
безопасности и прочности композитных
конструкций ИМАШ РАН, г. Москва
Полилов Александр Николаевич

Официальные оппоненты:

Доктор технических наук, профессор,
главный научный сотрудник кафедры
технической механики Политехнического
института ЮУрГУ
Сапожников Сергей Борисович

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры теории пластичности
механико-математического факультета
МГУ им. М.В. Ломоносова
Хвостунков Кирилл Анатольевич

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки Институт прикладной
механики Российской академии наук
(ИПРИМ РАН)

Защита состоится 7 октября 2026 г. в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета 24.2.331.12 при МГТУ им. Н.Э. Баумана по адресу: 105005, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, д. 5, стр. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МГТУ им Н.Э. Баумана и на сайте www.bmstu.ru

Автореферат разослан « » _____ 2026 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета 24.2.331.12

д.т.н., доцент

М.В. Мурашов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Развитие традиционных композитных технологий, а также распространение новых аддитивных методов изготовления полимерных композитных материалов (ПКМ) способствуют расширению областей применения этого уникального класса материалов. Сегодня волокнистые ПКМ с высокими удельными механическими характеристиками используются не только в аэрокосмических конструкциях, но и в железнодорожном, водном, автомобильном транспорте, гражданском строительстве, спорте, сельском хозяйстве, медицине и т.д.

В связи с этим, исключительно важен вопрос корректности определения упругих и прочностных характеристик материала в экспериментах. Наиболее распространенными считаются изгибные испытания ввиду простоты оснастки, средств измерения и установки образцов. В то же время известна сложность интерпретации результатов изгибных испытаний. В процессе нагружения образца неизбежно возникают эффекты, которые вносят погрешности в измеряемый в эксперименте прогиб и приводят к ошибкам при определении механических свойств материала. При изгибе волокнистых ПКМ со слабой матрицей влияние этих погрешностей на результаты испытаний может быть существенно. А учет особых механизмов разрушения ПКМ при изгибе – расслоений и расщеплений – может привести к ошибкам при расчетах композитных конструкций.

Несмотря на многолетнюю историю развития теории изгиба, многие вопросы анализа экспериментальных результатов остаются без однозначного ответа и трактуются различными авторами по-разному. Поэтому интерес к теме изгиба композитных элементов конструкций со времен первых работ Галилея, Эйлера, Сен-Венана, Журавского, Тимошенко (и др.) остается высоким, и число научных исследований по этой тематике ежегодно растет.

Степень разработанности темы исследования. Методам решения задач теории упругости анизотропных тел посвящены труды С.П. Тимошенко, Н.М. Беляева, С.Г. Лехницкого, В.В. Васильева, С.А. Амбарцумяна, Б.Д. Аннина, С.А. Лурье, Дж. Редди. Особенности испытаний на изгиб полимерных волокнистых композитов рассмотрены в работах Ю.М. Тарнопольского, А.М. Скудры, В.П. Тамужа, С.Б. Сапожникова, В.Э. Вильдемана. Вопросы прочности и критериев разрушения волокнистых композитов изучались Ю.Н. Работновым, А.Н. Полиловым, С. Цаем, З. Хашином. Задаче об изгибной потере устойчивости стержней переменной жесткости посвящены работы А.С. Вольмира, Н.В. Баничука, И.А. Биргера, Н.А. Алфутова. В области исследования вязкоупругого поведения полимерных композитов следует выделить результаты Ю.Н. Работнова, Дж. Ферри, Р. Кристенсена.

Цель диссертационной работы заключается в разработке методов учета нелинейных эффектов, возникающих при изгибе композитных балок, и оценке

их влияния на определяемые в экспериментах деформационные и прочностные свойства материала.

Для достижения цели диссертационного исследования были поставлены следующие **задачи**:

1. Оценить влияние нелинейных эффектов, возникающих при испытании композитных балок на изгиб, на определяемые свойства материала.

2. Уточнить экспериментальную методику определения модуля межслойного сдвига полимерных волокнистых композитов с учетом неоднородного распределения касательных напряжений по ширине балки.

3. Уточнить силовой и энергетический критерии расслоения для учета зависимости прочности полимерных волокнистых композитов от геометрии и от абсолютных размеров образца.

4. Модифицировать экспериментальный метод оценки трещиностойкости расщепления полимерных волокнистых композитов.

5. Разработать способ рационального проектирования структуры армирования сжимаемых композитных стержней переменной жесткости с целью повышения критической силы при изгибной потере устойчивости с учетом низкого модуля межслойного сдвига.

6. Оценить возможность восстановления параметров ядра ползучести полимерных композитов по результатам динамического механического анализа (ДМА).

Научная новизна работы

1. Уточнена экспериментальная методика определения межслойного модуля сдвига полимерных волокнистых композитов при трехточечном изгибе балок с различной длиной пролета.

2. Предложены уточненные способы учета некоторых нежелательных эффектов, возникающих при изгибных испытаниях волокнистых композитов.

3. Разработан линейный критерий расслоения волокнистых ПКМ при изгибе, учитывающий совместное влияние нормальных и касательных напряжений.

4. Усовершенствована экспериментальная методика определения сопротивления композитов расщеплению и расслоению при изгибе балок с поперечным надрезом.

5. Обоснован масштабный эффект прочности композитных балок при изгибе с учетом деформаций сдвига.

6. Предложен способ повышения критической силы при потере устойчивости композитных стержней, изготовленных с помощью аддитивных технологий, за счет непрерывного изменения их изгибной жесткости.

7. Подробно исследованы возможности методики восстановления кривых ползучести полимерных волокнистых композитов по результатам динамического механического анализа.

Теоретическая и практическая значимость работы. Разработанные экспериментальные методики позволяют уточнить определяемые в изгибных испытаниях упругие и прочностные характеристики ПКМ, что даст возможность снизить массу композитных конструкций. Предложенный способ изменения жесткости продольно сжатых композитных стержней за счет варьирования объемной доли волокон позволит значительно повысить критическую силу при потере устойчивости для стержня заданной массы. Полученные в работе результаты используются в Центре экспериментальной механики ПНИПУ, а также на научно-производственном предприятии АО «Центр перспективных разработок».

Методология и методы исследования. Для решения задач диссертации использовались аналитические, численные и экспериментальные методы механики деформируемого твердого тела.

Положения, выносимые на защиту

1. Экспериментальная методика определения модуля межслойного сдвига полимерных волокнистых композитов, уточненная за счет учета неоднородности касательных напряжений по ширине балки.

2. Линейный критерий расслоения композитных балок при изгибе, уточненный за счет учета локального повышения касательных напряжений у краев сечения балки.

3. Методика обработки экспериментальных данных для уточнения характеристики сопротивления расщеплению и расслоению композитных балок с поперечным надрезом.

4. Способ повышения критической силы при изгибной потере устойчивости композитных стержней переменной жесткости.

Степень достоверности результатов. Достоверность выводов и полученных результатов подтверждается численными и аналитическими расчетами, а также экспериментальными исследованиями, проведенными в рамках настоящей работы, и другими авторами.

Апробация результатов и публикации. По результатам исследования опубликовано 44 научные работы, из них 8 статей в периодических изданиях, включенных в Перечень ВАК при Минобрнауки России, 11 статей в журналах из перечня Scopus и Web of Science, 2 свидетельства о регистрации программ для ЭВМ и одна монография.

Основные положения диссертации были доложены и обсуждены на ряде международных конференций и научных семинаров: Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения, Москва, 2020-2025 г.; Международная конференция «Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций», Екатеринбург, 2022-2024 г.; XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике, Санкт-Петербург, 2023 г.; 2024 China-Eastern European Experts

Cooperation and Exchange Activity, Харбин, 2024 г.; 7-я Международная научно-техническая конференция «Живучесть и конструкционное материаловедение», Москва, 2024 г.; Семинар по механике деформируемого твердого тела под руководством академика РАН И.Г. Горячевой, Москва, 2024 г.; Ежемесячный семинар молодых ученых и студентов им. Ю.Н. Работнова МЕСМУС, Москва, 2022-2025 г.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы, включающего 183 источника. Объем текста составил 163 страницы, в том числе 75 рисунков и 21 таблица.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе диссертационной работы обзор литературы дополнен проведенным анализом особенностей деформирования и разрушения композитных балок. В п. 1.1 приведены основные соотношения теории упругости анизотропного тела и рассмотрены критерии разрушения, позволяющие оценить несущую способность композитных конструкций при изгибающих нагрузках. В п. 1.2 рассмотрены необходимые для послойного анализа композитных балок кинематические гипотезы, связывающие перемещения точек сечения с расстоянием от нейтральной оси. В п. 1.3 проведен анализ упрощенных способов нахождения упругих свойств композитного монослоя, необходимых для вычисления компонент обобщенной матрицы жесткостей ABD . Предложен метод, позволяющий «восстановить» E_2 , G_{12} и ν_{12} однонаправленного композита на основе известного из эксперимента модуля вдоль волокон E_1 и статистической обработки выборки характеристик определенного класса композитов. В п. 1.4 рассмотрены некоторые дополнительные эффекты, возникающие при изгибе композитных балок и влияющие на корректность интерпретации результатов испытаний, – смятие образца у опор, бимодульность и физическая нелинейность материала. В п. 1.5 проанализированы основные преимущества создания криволинейных траекторий укладки волокон в композитных структурах, изготовленных с помощью аддитивных технологий.

По результатам анализа существующей литературы и ранних публикаций автора сформулированы актуальные задачи теории изгиба композитных балок.

Вторая глава посвящена методике определения модуля межслойного сдвига композитов при испытании на трехточечный изгиб балок с различной длиной пролета. Вместо стандартной, не учитывающей межслойный сдвиг формулы $w_1 = PL^3(4E_xbh^3)^{-1}$, более корректно определять прогиб композитной балки выражением:

$$w = w_1 + w_2 = \frac{PL^3}{4E_xbh^3} + \frac{k_s PL}{4G_{xz}bh}. \quad (1)$$

Откуда можно получить:

$$\frac{1}{E_{\text{эксн}}} = \frac{1}{E_x} + \frac{k_s}{G_{xz}} \frac{h^2}{L^2}, \quad (2)$$

где $E_{\text{эксн}}$ – «фиктивный» модуль упругости композита, определяемый при изгибе на основе гипотезы плоских сечений; E_x – «истинное» значение модуля упругости. Зависимость (2) позволяет определить две упругие константы материала (E_x и G_{xz}), получив значения $E_{\text{эксн}}$ при разных длинах пролета (Рисунок 1).

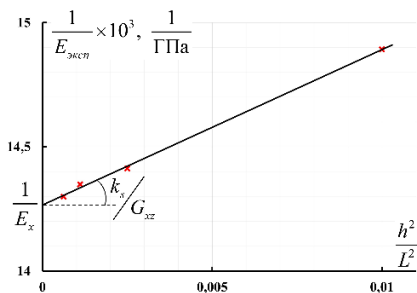


Рисунок 1 – Аппроксимация экспериментальных данных

В п. 2.1 показано, что точность описанной методики напрямую зависит от коэффициента сдвига k_s , однозначно определить который затруднительно. Стандартное значение $k_s=1,2$ для прямоугольного сечения, а также близкие к нему оценки справедливы для изотропных материалов и не учитывают неоднородность межслойных касательных напряжений, которая может существенно влиять на коэффициент сдвига.

Для уточнения методики определения G_{xz} вместо параболического закона распределения τ_{xz} Журавского было рассмотрено решение задачи об изгибе консольной ортотропной балки, впервые полученное Сен-Венаном и дополненное С.Г. Лехническим. Для неоднородного по ширине сечения b распределения межслойных касательных напряжений в виде бесконечного ряда гиперболических функций предложена аппроксимация (3), обеспечивающая простоту и достаточную точность вычислений:

$$\tau_{xz}^{ap}(y, z) \approx A(1 + By^2)(1 - 4h^{-2}z^2). \quad (3)$$

Здесь $A = \tau_{xz}^{\min}$; $B = 4b^{-2}(\tau_{xz}^{\max} / \tau_{xz}^{\min} - 1)$; $\tau_{xz}^{\min} = \tau_{xz}(0, 0)$; $\tau_{xz}^{\max} = \tau_{xz}(0, 5b, 0)$. С помощью теоремы Клапейрона на основе выражения (3) была получена формула для уточненного определения дополнительного прогиба от касательных напряжений:

$$w_2 = \frac{128}{25} \frac{PL}{G_{xz}bh} \frac{1}{h^4} (15a^2 + 10ad(2K_1 + K_2) + d^2(8K_1^2 + 4K_1K_2 + 3K_2^2)), \quad (4)$$

где $a = h^2/8$; $d = b^2 G_{xz} \nu_{xy} (E_x \pi^2)^{-1}$; K_1, K_2 – суммы первых пятидесяти членов рядов гиперболических функций из точного решения.

Из (4) следует уточненное выражение для нахождения коэффициента сдвига:

$$k_s = \frac{128}{25} \left[\frac{15}{64} + \frac{5}{4} \frac{v_{xy}}{\pi^2} (2K_1 + K_2) s_1^2 s_2 + \frac{v_{xy}^2}{\pi^4} (8K_1^2 + 4K_1 K_2 + 3K_2^2) s_1^4 s_2^2 \right]. \quad (5)$$

Здесь $s_1 = b/h$, $s_2 = G_{xz}/E_x$; K_1, K_2 являются функциями от параметров s_1, s_2 .

С помощью выражений (4) и (5) были рассчитаны w_2 и k_s для балки из углепластика при различных значениях s_1, s_2 . Результаты показали, что в большом диапазоне изменения параметров коэффициент сдвига близок к $k_s = 1,2$, а дополнительный прогиб незначительно отличается от w_2 в (1).

Аналитические результаты были подтверждены численными расчетами (Таблица 1) и в эксперименте на трехточечный изгиб стеклопластиковой балки (Таблица 2), где исследовалась зависимость прогиба балки от ее ширины. При увеличении b повышается неоднородность распределения касательных напряжений и должно бы увеличиваться перемещение w_2 , чего обнаружено не было. Таким образом, была обоснована применимость стандартных гипотез при определении межслойного модуля сдвига композитных балок.

Таблица 1 – Численный расчет прогиба Таблица 2 – Прогиб образцов

консольной балки	
$h \times b$, мм	w , мм
5 x 5	3,56
5 x 10	3,56
5 x 20	3,56
5 x 30	3,56

при испытании на изгиб	
$h \times b$, мм	w , мм
5 x 5	0,47
5 x 10	0,45
5 x 15	0,47
5 x 30	0,48

В п. 2.4 проанализировано влияние эффекта «скатывания» образца с цилиндрических опор на определяемые по формуле (2) упругие свойства композита. Приняв гипотезу о форме нейтральной оси балки (Рисунок 2), можно аналитически выразить «угол скатывания» $\alpha \approx 4wL^{-1}(1-16wrL^{-2})$ через два малых параметра: отношения прогиба w и радиуса опор r к пролету балки, что позволяет оценить погрешность, возникающую от дополнительного вертикального смещения при скатывании.

Если принять $E_x = PL^3(4wbh^3)^{-1}$ и $E_{x0} = PL_0^3(4w_0bh^3)^{-1}$, где $L_0 \approx L - 2r\alpha$ и $w_0 \approx w - 0,5r\alpha^2$, можно получить:

$$\frac{E_{x0}}{E_x} \approx 1 - \frac{16rw}{L^2}, \quad (6)$$

и погрешность определяется выражением: $\Delta_{E_x} = (E_x - E_{x0})/E_x \cdot 100\%$.

По аналогии из выражения (1) находится:

$$\frac{G_{xz0}}{G_{xz}} \approx 1 - \frac{16LPrw}{4E_x h^3 bw + 24LPrw - L^3 P}. \quad (7)$$

Для расчетной и экспериментальной оценки влияния радиуса опор на погрешность определения E_x и G_{xz} была рассмотрена и испытана композитная балка прямоугольного поперечного сечения ($h = 4,2$ мм и $b = 25$ мм) с длиной пролета $L = 200$ мм. Результаты вычисления Δ_{E_x} (1) и $\Delta_{G_{xz}}$ (2) приведены на Рисунок 3.

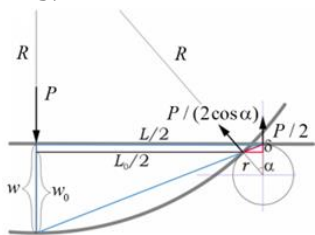


Рисунок 2 – Схема скатывания образца с опор

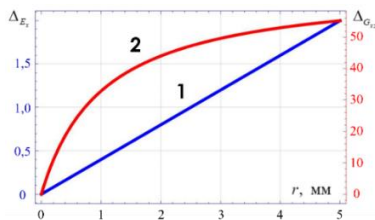


Рисунок 3 – Погрешность определения упругих характеристик КМ

Для определения E_x с погрешностью не более 1% радиус нижних опор не должен превышать 2,5 мм. Однако погрешность определения модуля межслойного сдвига при таком радиусе опор близка к 50%. Это связано с тем, что дополнительный прогиб от касательных напряжений w_2 при такой конфигурации балки и принятых допущениях будет одного порядка с вертикальным смещением δ (Рисунок 2). Поэтому для корректного определения G_{xz} рекомендуется испытывать балки с меньшим отношением L/h для повышения влияния касательных напряжений на общий прогиб. Аналогичный результат был получен экспериментально при испытании на изгиб стеклопластиковой балки по трехточечной схеме нагружения.

В третьей главе диссертации рассмотрены три способа описания характеристики сопротивления полимерных композитов расслоению и расщеплению, основанные на различных принципах механики деформируемого твердого тела.

В п. 3.1 предложенный А.Н. Полиловым линейный критерий расслоения $\sigma_x + m\tau_{xz} = c$ был уточнен за счет учета неоднородного распределения касательных напряжений (3), поскольку локальный рост τ_{xz} у краев сечения балки может приводить к снижению межслойной прочности (8).

$$\tau_0 = mc \left(m^2 + \frac{L^2}{h^2} \right)^{-1}. \quad (8)$$

где m , c – определяемые экспериментально константы материала, L и h – длина пролета и толщина балки, соответственно. Выражение (8) в отличие от критерия максимальных касательных напряжений позволяет объяснить обнаруженную в экспериментах зависимость сдвиговой прочности от размеров балки.

Согласно этому критерию, учитывающему вклад нормальных и касательных напряжений, расслоение должно произойти в точке сечения, где их комбинация будет наибольшей, то есть на краях сечения (при $y = b/2$). Тогда формулу (3) можно упростить: $\tau_{xz}(z) = \tau_{xz}^{\max}(1 - 4z^2h^{-2})$, и на основе этого выражения получить уточненное значение критической силы P^* , откуда $\tau_0^{\text{точн}} = 3P^*/4bh$. Приведенное в Таблице 3 сравнение результатов расчета межслойной прочности углепластика по формуле (8) и уточненных значений, полученных на основе распределения (3) показывает, что неоднородность τ_{xz} по ширине балки несущественно влияет на межслойную прочность τ_0 . Даже для предельного расчетного случая снижение τ_0 составляет около 3%, чем можно пренебречь при решении практических задач.

Полученные результаты были качественно подтверждены экспериментально при проведении стандартизованных испытаний на изгиб короткой балки. Стеклопластиковые образцы были вырезаны из ортогонально армированной пластины и испытывались до разрушения. Значение межслойной прочности определялось по критерию максимальных касательных напряжений. Полученные экспериментальные значения сдвиговой прочности стеклопластика приведены в Таблице 4, при увеличении ширины образца в 5 раз снижения $\tau_{xz}^{\max}$ не обнаружено.

Таблица 3 – Сравнение межслойной сдвиговой прочности КМ

$h \times w$, мм	τ_0 , МПа	$\tau_0^{\text{точн}}$, МПа
5 x 5	80	79,9
5 x 10		79,7
5 x 25		78,9
5 x 50		77,4

Таблица 4 – Экспериментальные значения межслойной прочности

$h \times b$, мм	P , Н	$\tau_{xz}^{\max}$, МПа
5 x 5	837	25,11
5 x 25	4333	25,99

В п. 3.2 расслоение композитных балок при изгибе описывается с использованием энергетического необходимого условия начала разрушения: $U_0 = U_1 + \gamma F$, которое заключается в превышении начального значения энергии над конечным на величину работы разрушения $R = \gamma F$. Здесь U_0 – начальная упругая энергия, U_1 – упругая энергия после расслоения, γ – удельная работа разрушения, F – площадь разрушения.

Упругая энергия консольной балки, изгибаемой концевой силой, определяется формулой: $U_0 = 8^{-1}w^2E_xbh^3L_1^{-3}$. При некотором значении P_1 исходная балка расслоится вдоль всей длины на две равные части. Выделенная энергия будет затрачена на работу разрушения R , а оставшаяся упругая энергия записывается в виде:

$$U_1 = \frac{w^2 E_x b}{8l^3} 2 \left(\frac{h}{2} \right)^3 = \frac{1}{4} U_0. \quad (9)$$

Тогда энергетический критерий упрощается: $0,75U_0 = \gamma b L_1$, и можно найти формулы для определения критической нагрузки и межслойной сдвиговой прочности композита, которые зависят от удельной работы расслоения:

$$P_1^* = \frac{bh}{L_1} \sqrt{\frac{2}{3} E_x \gamma h}; \quad \tau^* = \frac{h}{L_1} \sqrt{\frac{3}{2} \frac{E_x \gamma}{h}}. \quad (10)$$

Выражение (10) позволяет описать зависимость τ^* не только от отношения L/h , но и от абсолютного значения толщины балки (масштабный эффект прочности).

Значения критической нагрузки и межслойной прочности (10) могут быть уточнены, если использовать общий прогиб композитной консоли с учетом сдвигов (1). Тогда упругая энергия до и после расслоения будут связаны соотношением:

$$U_1 = \frac{1}{4} U_0 \left(1 + \frac{\alpha}{2} \frac{E_x}{G_{xz}} \frac{h^2}{L_1^2} \right)^2 \left(1 + \alpha \frac{E_x}{G_{xz}} \frac{h^2}{L_1^2} \right)^{-2}; \quad \alpha = 0,3. \quad (11)$$

Если принять $L_1/h = 5$; $E_x/G_{xz} = 20$, то $U_1 \approx 1/5 U_0$ и различие (9) и (11) составит порядка 20%. Критическая нагрузка и условная межслойная прочность (12) будут отличаться от (10) почти на 10%:

$$P_1^* = \frac{bh}{L_1} \sqrt{\frac{13}{21} E_x \gamma h}; \quad \tau^* \approx \frac{h}{L_1} \sqrt{\frac{39}{28} \frac{E_x \gamma}{h}}. \quad (12)$$

В п. 3.3 рассмотрен способ определения характеристики сопротивления волокнистых композитов расщеплению (расслоению) на основе метода линейной механики разрушения – при изгибе балки с поперечным надрезом.

Поле напряжений у надреза определяется коэффициентом интенсивности напряжений (КИН), критическое значение K_c которого соответствует началу роста трещины в материале. На основе анализа напряженного состояния у вершины надреза (вытянутого эллиптического отверстия) А.Н. Полиловым было показано, что при достижении некоторого критического для первоначального поперечного надреза значения K_{Ic} трещина расщепления (расслоения) начнет распространяться в продольном направлении. Величина K_{Ic} может считаться характеристикой трещиностойкости ПКМ и определяется по стандартной формуле:

$$K_{Ic} = \frac{3P^* c \sqrt{l}}{bh^2} Y(\lambda), \quad (13)$$

где P^* – экспериментально определяемая критическая нагрузка при образовании продольной трещины; c – расстояние между верхними упорами при четырехточечной схеме нагружения; l – длина первоначального надреза; b

и h – ширина и высота образца-балки; $Y(\lambda)$ – K -тарировка. При этом в ряде работ показано, что при $\lambda=l/h<0,6$ изотропная K -тарировка с достаточной точностью применима к ортотропным композитам. Выражение (13) определяет критический КИН при изгибе по четырехточечной схеме, которая считается предпочтительной ввиду отсутствия перерезывающих сил и дополнительных контактных напряжений в зоне надреза.

Для уточнения стандартного метода нахождения критической силы по экспериментальной диаграмме нагружения композита был предложен способ, основанный на применении метода акустической эмиссии (АЭ). В процессе нагружения образца с помощью датчиков фиксировались сигналы АЭ, а также поля перемещений у поперечного надреза методом корреляции цифровых изображений (КЦИ) (Рисунок 4). Для определения момента образования продольной трещины рассчитывалось весовое содержание потоковых параметров АЭ (средние удельная энергия $\bar{E}_N$ и длительность импульсов $\bar{t}_i$) с различными характеристиками. Найденные значения были отмечены на плоскости $\bar{E}_N - \bar{t}_i$, и были выделены характерные сегменты (Рисунок 5).

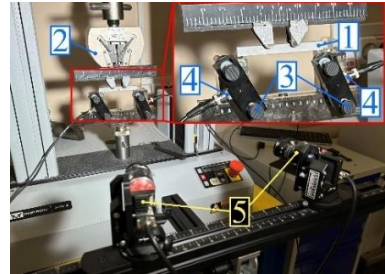


Рисунок 4 – Схема испытаний:
1 – образец; 2 – подвижный захват;
3 – держатели; 4 – преобразователи АЭ; 5 – установка КЦИ

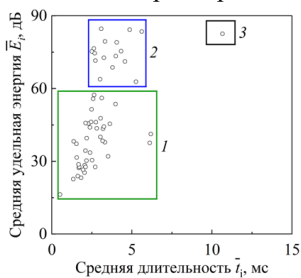


Рисунок 5 – Сегментация параметров АЭ

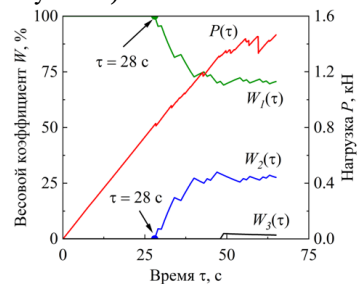


Рисунок 6 – Весовое содержание W_i

Весовое содержание потоковых параметров в выделенных сегментах 1, 2 и 3 рассчитывалось по формуле $W_i = (N_i / N_{\Sigma}) \cdot 100\%$, где N_i – количество параметров в сегментах; $N_{\Sigma} = \sum N_i$. Сопоставление рассчитанного весового содержания характерных сегментов с экспериментальной диаграммой представлено на Рисунке 6.

Образование продольной трещины можно связать с изменением весового содержания потоковых параметров в 1-м и 2-м сегменте ($\tau = 28$ с). Этот момент

также соответствует резкому локальному спаду нагрузки на диаграмме нагружения. Полученные результаты подтверждаются методом КЦИ: при анализе поля деформаций ε_y на поверхности образца момент образования трещины расщепления соответствовал резкому повышению и смещению максимума у вершины надреза.

Таблица 5 – Определение P^* и $K_{I\Gamma}$

$P_{АЭ}$	$K_{I\Gamma}$	$P_{Диаг.}$	$K_{I\Gamma}$	$P_{КЦИ}$	$K_{I\Gamma}$
735,9	18,9	791,4	20,3	839,4	20,9

В Таблице 5 приведены значения критической силы (Н) и $K_{I\Gamma}$ (МПа·(м)^{1/2}), полученные тремя способами

по результатам испытания серии образцов с надрезом: при обработке диаграммы нагружения (Диаг.), методом КЦИ и с помощью АЭ. Анализ полученных результатов показал, что предложенный способ обработки экспериментальных данных с помощью АЭ позволяет уточнить момент образования трещины расщепления в образцах с боковым надрезом и более точно определить критический КИН, который является важной характеристикой трещиностойкости композита.

В четвертой главе рассмотрена задача об изгибной потере устойчивости композитных стержней переменной жесткости с учетом деформаций сдвига. Новизна постановки задачи заключается в том, что поперечное сечение стержня считается неизменным, а переменная изгибная жесткость обеспечивается варьированием объемной доли наполнителя, что стало возможно благодаря развитию аддитивных композитных технологий. Задаваясь различными возможными ограничениями на предельные упругие свойства композита ($E_x^{\max}$, $E_x^{\min}$) и объемную долю наполнителя V_f , зависящую от технологических особенностей производства, можно найти закон изменения жесткости по длине стержня, позволяющий повысить критическую силу при изгибной потере устойчивости и, следовательно, несущую способность стержневых конструкций.

Искривление оси стержня описывается дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(B(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + P \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \quad (14)$$

где $w(x)$ – прогиб стержня; $B(x) = E(x)I$ – его изгибная жесткость, P – сила. Из (14) с помощью граничных условий находится характеристическое уравнение и значение критической силы $P_{кр}$.

Переменную изгибную жесткость $B(x)$ стержня предлагается задавать произвольно, например, в виде полиномиальной зависимости:

$$B_1(x) = a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + \dots + d_1 x^n. \quad (15)$$

Характер выражения (15) может быть обоснован подобием изменения жесткости – эпюре изгибающего момента по длине стержня или подобием

форме потери устойчивости из аналитического решения для однородного стержня. Тогда задача сведется к отысканию неизвестных коэффициентов в (15), при которых $B(x)$ удовлетворяет принятым ограничениям и $P_{кр} \rightarrow \max$.

Аналитическое решение уравнения изогнутой оси (14) при функции изменения изгибной жесткости (15) зачастую найти невозможно. Кроме того, постановка задачи (14) не позволяет учесть низкую сдвиговую жесткость, которая характерна для полимерных композитов, изготовленных с помощью 3D-печати, и которая также будет переменной ввиду изменения объемной доли наполнителя. Поэтому для решения задачи был разработан алгоритм численного метода начальных параметров на основе модели балки Тимошенко, который позволяет определить критическую силу с учетом переменных $B(x)$ и $G_{xz}(x)$.

В п. 4.3. приведен пример повышения несущей способности композитного стержня переменной жесткости. Рассмотрен однопролетный шарнирно опертый прямоугольный ($b=h=10$ мм) стержень длиной $L=100$ мм, сжимаемый продольной силой P . Максимальный прогиб подобного стержня постоянной жесткости при потере устойчивости будет посередине его длины. Поэтому при данных граничных условиях $B(x)$ целесообразно задать полиномом второй степени:

$$B(x) = \left(a_1 (x - 0,5L)^2 + b_1 \right) I. \quad (16)$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов a_1 и b_1 принимались условия: минимальный модуль $E_x^{\min}$ соответствовал модулю Юнга полимера, а $E_x^{\max}$ определялся с помощью модели Чамиса (17) при максимальной технологически обоснованной объемной доле наполнителя.

$$E_x = E_{xf} V_f + E_{xm} (1 - V_f); \quad G_{xz} = G_{xzm} \left(1 - \sqrt{V_f} \left(1 - G_{xzm} / G_{xzf} \right) \right)^{-1}. \quad (17)$$

Здесь индексы (f) и (m) обозначают, соответственно, характеристики волокон CCF (углерод) и CBF (базальт) и матрицы PLA, которые определялись экспериментально в ИМАШ РАН.

При заданной функции $B(x) = E(x)I$ из (17) следует закон изменения модуля межслойного сдвига по длине стержня:

$$G_{xz}(x) = \frac{G_{xzm}}{1 - \left(1 - \frac{G_{xzm}}{G_{xzf}} \right) \sqrt{\frac{E_x^{\max} - 4L^{-2} (E_x^{\max} - E_x^{\min}) (x - 0,5L)^2 - E_{xm}}{E_{xf} - E_{xm}}}}. \quad (18)$$

Выражения (16) и (18) использовались для расчета критической силы при потере устойчивости стержня переменной жесткости. Полученные с помощью предложенного алгоритма значения сравнивались с нагрузкой, рассчитанной

по стандартной формуле для аналогичного стержня постоянной жесткости $P_{кр}^{экв}$ (Таблица 6), для которого:

$$E_x^{экв} = L^{-1} \int_0^L E_x(x) dx; \quad G_{xz}^{экв} = L^{-1} \int_0^L G_{xz}(x) dx. \quad (19)$$

Таблица 6 – Результаты расчета методом начальных параметров

Материал	$P_{кр}^{экв}$, кН	$P_{кр}$, кН
PLA+CCF	29,9	35,4
PLA+CBF	13,4	15,9

За счет задания переменной по длине композитного стержня жесткости теоретически удастся повысить критическую силу при потере устойчивости на 15–20%.

Пятая глава посвящена анализу ползучести композитных балок при изгибе. Армированные волокнами полимеры проявляют заметную ползучесть даже при комнатной температуре и небольших нагрузках, поэтому при проектировании ответственных конструкций в определяющие соотношения необходимо добавлять зависимости от времени. Удобный инструмент для описания реологических эффектов в ПКМ – теория наследственной упругости, в которой зависимости деформаций и напряжений от времени описываются с помощью разностных ядер интегральных операторов ползучести K^* и релаксации G^* .

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E} \left[1 + \int_0^t K(t-\tau) d\tau \right], \quad \sigma(t) = E\varepsilon \left[1 - \int_0^t G(t-\tau) d\tau \right]. \quad (20)$$

Уравнения ползучести материала получаются после подстановки выбранной функции (ядра) в (20). Для распространенных видов ядер: экспоненциального и ядра Абеля эти уравнения можно записать в виде:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E} \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) \right), \quad \varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E} \left(1 + \frac{At^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right), \quad (21)$$

где A , α , λ – параметры ядер, отражающие свойства материала при заданной температуре. Значения этих параметров обычно определяют при длительных испытаниях на ползучесть.

В то же время известна взаимосвязь ядра ползучести с компонентами комплексного модуля материала, которые определяются при высокоскоростном циклическом нагружении образцов в рамках проведения динамического механического анализа (ДМА):

$$E'(\omega) = E \left(\frac{1 + K_c}{(1 + K_c)^2 + K_s^2} \right); \quad E''(\omega) = E \left(\frac{K_s}{(1 + K_c)^2 + K_s^2} \right), \quad (22)$$

где K_c ; K_s – косинус- и синус-интегралы Фурье от ядра памяти. Тогда на основе полученных из ДМА частотных зависимостей модулей накопления и потерь теоретически возможно восстановить неизвестные параметры принятого ядра ползучести без проведения длительных испытаний и построить кривую ползучести (21) или временную зависимость прогиба композитной балки, нагруженной сосредоточенной силой:

$$w = \frac{Pl^3}{4E_x bh^3} + \frac{k_s Pl}{4G_{xz} bh} (1 + K^*), \quad (23)$$

В п. 5.2.1 описан разработанный алгоритм методики восстановления параметров ползучести композита на основе результатов проведения ДМА. Ключевая особенность методики заключается в аппроксимации экспериментальных зависимостей $E'(\omega)$ или $E''(\omega)$ полученными выражениями (22), что накладывает ряд ограничений на ее применимость:

- Если вид ядра ползучести изначально неизвестен, подобранные функции $f'(\omega)$ и $f''(\omega)$ должны удовлетворять требованиям Фурье-интегрируемости;
- Если вид ядра известен, точность метода будет напрямую зависеть от совпадения вида теоретических (22) и экспериментальных зависимостей модулей накопления и потерь, а также от полноты результатов испытаний.

В п. 5.2.2 приведен пример применения методики восстановления параметров ползучести композита. Для описанных ядер (21) с помощью выражений (22) были найдены частотные зависимости модуля накопления, которые подобны, а их вид соответствует закону:

$$E'(\omega) = E'_0 + (E'_\infty - E'_0) \frac{\omega^2}{\omega^2 + k}. \quad (24)$$

Выражение (24) позволяет описать физические процессы в материале при высокочастотном циклическом нагружении. При $\omega \rightarrow 0$ $E'(\omega)$ стремится к статическому модулю материала E'_0 (модуль при нулевой скорости нагружения). При $\omega \rightarrow \infty$ $E'(\omega)$ возрастает, достигая динамического модуля упругости E'_∞ . Параметр k определяет значение характерной частоты перехода от E'_0 к E'_∞ . Экспериментальное нахождение всех трех значений (E'_0 , E'_∞ , k) позволит восстановить неизвестные параметры ядра.

На Рисунке 7 приведены результаты ДМА, полученные при испытании образцов по схеме трехточечного изгиба на всем допустимом диапазоне частот: 0,06...600 рад/с. Сравнение экспериментальной зависимости и сигмоидной функции (24) показывает, что полученные данные модуля накопления – неполные и

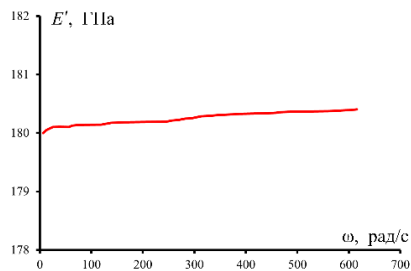


Рисунок 7 – Частотная зависимость модуля накопления углепластика

адекватно аппроксимировать их для нахождения параметров ядра невозможно. Значение $E' \approx 180$ ГПа соответствует динамическому модулю E'_∞ , при этом надежно восстановить E'_0 и k из полученных данных не удастся. Таким образом, из трех неизвестных параметров функции (24) в эксперименте однозначно определяется только один. И, несмотря на математическую корректность всех преобразований, использование ограниченных экспериментальных данных по частотным зависимостям компонент комплексного модуля применительно к полимерным композитам приводит к неустойчивым результатам.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Анализ возникающих при изгибе балок нелинейных эффектов показал, что их влияние на определяемые в испытаниях характеристики полимерных волокнистых композитов в некоторых случаях может быть значительным. Разработанные методики, учитывающие эти эффекты, позволяют повысить точность существующих подходов к экспериментальному нахождению упругих и прочностных свойств материала:

1. Учет неоднородности касательных напряжений по ширине балки позволил уточнить коэффициент сдвига и, следовательно, значение дополнительного прогиба балки w_2 , на основе которого определяется модуль межслойного сдвига композита;

2. Учет эффектов скатывания образца с цилиндрических опор и смятия у нижних роликов при определении упругих свойств композита в изгибных испытаниях позволил снизить дополнительную методическую погрешность;

3. Уточнение силового и энергетического критериев расслоения композитных балок при изгибе, описывающих зависимость межслойной прочности материала от размеров образца, позволило учесть влияние неоднородного распределения касательных напряжений по ширине балки на межслойную прочность;

4. Учет сдвиговых деформаций при определении критической силы при изгибной потере устойчивости композитных стержней переменной жесткости

позволил повысить точность оценки несущей способности стержневых конструкций.

По результатам диссертации были сделаны следующие **выводы**:

1. При испытании на изгиб балок стандартных размеров допустимо не учитывать неоднородный характер распределения касательных межслойных напряжений по сечению балки;

2. Погрешность определения модуля Юнга при изгибе, возникающая от скатывания образца с цилиндрических опор, оказывается незначительной (менее 1%) при радиусе нижних опор не более 2,5 мм. В то же время при таком радиусе опор погрешность определения межслойного модуля сдвига может составить до 50% из-за малости дополнительного прогиба от действия касательных напряжений;

3. Влияние локального роста межслойных касательных напряжений у краев сечения балки на межслойную прочность композита, определяемую с помощью линейного критерия расслоения, оказывается незначительным даже для образцов с большой шириной;

4. Учет дополнительного прогиба от касательных напряжений заметно влияет на значения межслойной прочности композита, определенные с помощью энергетического критерия, позволяющего оценить масштабный эффект при расслоении балок;

5. Применение метода акустической эмиссии с сегментацией потоковых АЭ параметров позволяет уточнить характеристику сопротивления композита расслоению и расщеплению, экспериментально определяемую при чистом изгибе балок с поперечным надрезом;

6. Критическая сила при изгибной потере устойчивости сжимаемых композитных стержней может быть существенно повышена (на 15-20%) за счет изменения продольной жесткости стержня при варьировании объемной доли наполнителя. При определении критической силы необходимо учитывать изменение межслойной жесткости материала;

7. Взаимосвязь реологических свойств полимерных волокнистых композитов принципиально позволяет восстановить ядро ползучести материала по найденным в циклических испытаниях компонентам комплексного модуля, однако решение этой задачи применительно к жестким конструкционным армированным пластикам при ограниченных экспериментальных данных оказывается неустойчивым.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Власов Д.Д., Полилов А.Н., Татусь Н.А., Склемина О.Ю. Нелинейные задачи изгиба (от балки Галилея до композитной панели). М.: Изд-во АСВ, 2024. 388 с. (24,25 п.л./6,5 п.л.)

2. Vlasov D.D., Polilov A.N. The possibility of creep prediction of viscoelastic polymer composites using frequency dependences of complex modulus components // *Mechanics of Composite Materials*. 2022. № 58. P. 31 -42. (0,75 п.л./0,38 п.л.)

3. Полилов А.Н., Власов Д.Д., Татусь Н.А. Уточненный критерий расслоения при изгибе композитной балки // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2023. Т. 89. № 10. С. 63-73. (0,8 п.л./0,4 п.л.)

4. Polilov A.N., Vlasov D.D., Tatus N.A. Refined method for estimating the interlayer shear modulus by correcting the deflection of polymer composite specimens // *Inorganic Materials*. 2024. Vol. 60. № 2. P. 136-146. (0,9 п.л./0,5 п.л.)

5. Власов Д.Д., Полилов А.Н. Оценка точности упрощенных методов послойного расчета композитных конструкций // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2025. Т. 91, № 2. С. 68-75. (0,7 п.л./0,5 п.л.)

6. Полилов А.Н., Власов Д.Д. Метод определения сопротивления композитов расслоению при изгибе балок с боковым поперечным надрезом // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2025. № 11. С. 77-84. (0,95 п.л./0,55 п.л.)

7. Polilov A.N., Vlasov D.D., Polyakov A.E., Tatus N.A. Accounting for the influence of cylindrical support radii on the determined elastic-strength characteristics of polymer composites under bending // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2025. Vol 54. № 2. P. 168-176. (0,8 п.л./0,4 п.л.)

8. Полилов А.Н., Чернов Д.В., Власов Д.Д., Плугатарь Т.П., Баландин Т.Д. Экспериментальный метод определения трещиностойкости расщепления полимерных волокнистых композитов // Вестник ПНИПУ. Механика. 2026. № 1. С. 20-40. (1,3 п.л./0,7 п.л.)

9. Чернов Д.В., Татусь Н.А., Власов Д.Д., Баландин Т.Д. Мониторинг механизмов разрушения изготовленных с помощью 3D-печати композитных образцов по энергетическим и спектральным акустико-эмиссионным параметрам // Контроль. Диагностика. 2026. Т. 29, № 4. С. 20-29. (0,75 п.л./0,4 п.л.)

10. Власов Д.Д., Полилов А.Н., Татусь Н.А. Программа для расчета критической силы потери устойчивости стержней переменной жесткости при произвольных граничных условиях. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2025660925 Российская Федерация. Опубликовано 28.04.2025.