

1544717

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

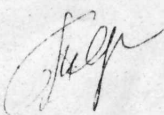
МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА, ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н.Э.БАУМАНА

На правах рукописи
УДК 519.2

Терещенко Евгений Романович

ИНТЕРВАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ
ДОЛГОВЕЧНОСТИ СИСТЕМ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ
ОГРАНИЧЕННОГО ЧИСЛА ИСПЫТАНИЙ ИХ
ЭЛЕМЕНТОВ.

05.13.16. Применение вычислительной техники, математического
моделирования и математических методов в научных
исследованиях

 Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

МОСКВА - 1993

Работа выполнена в Курганском машиностроительном институте.

Научный руководитель - доктор технических наук,
профессор Тескин О.И.

Официальные оппоненты - доктор физико-математических наук,
профессор Благовещенский Ю.Н., кандидат технических наук,
старший научный сотрудник Аронов И.З.

Ведущая организация - Российский университет Дружбы Народов

Защита состоится " 17 " мая 1994 года в 11 часов
на заседании Специализированного Совета Д 053.15.12.
при Московском государственном техническом университете
имени Н.Э.Баумана по адресу: 107005, Москва, 2-я Бауманская
ул., д.5.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МГТУ им.
Н.Э.Баумана.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные
печатью, просьба направлять по адресу: 107005, Москва, 2-я
Бауманская ул., д.5, МГТУ им. Н.Э.Баумана.

Автореферат разослан

Ученый секретарь Спец
к.т.н., доцент

*В печать
24.02.94.*

Заказ

Типогра

1544717

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В теории надежности сложных систем и ее приложениях одной из важных задач является точечное и интервальное оценивание показателей долговечности по результатам автономных испытаний их составных частей (элементов).

Лишь интервальные оценки (доверительные интервалы) показателей долговечности позволяют осуществить контроль достигнутого уровня долговечности по результатам проведенных испытаний. Однако, реальные испытания (или их имитация) являются достаточно дорогостоящими и их объемы (число образцов и сроки проведения) всегда сильно ограничены (часто не превышают 10 образцов).

Все это существенно затрудняет использование классических методов интервального оценивания, обычно работающих при больших объемах выборочных данных, а также требующих значительных, часто ничем не подтвержденных априорных предположений о функциональном виде распределений наработок до отказа.

Кроме того, известные результаты по этой проблеме предполагают однотипность распределений для элементов системы (одинаковый функциональный вид и одинаковые значения параметров, иначе набор доступных для анализа моделей распределения становится крайне ограниченным). Фактически все рассмотрения остаются в рамках экспоненциального, нормального и распределения Вейбулла. Если же элементы системы (даже с простейшим последовательным соединением) имеют различные типы распределений наработок до отказа, то аналитические методы интервального оценивания пока неизвестны.

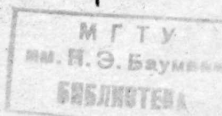
Возможным выходом в данной ситуации могло бы стать использование статистического моделирования результатов испытания в условиях ограниченных выборочных данных плюс отказ от параметрических предположений об исходной функции распределения наработок до отказа. Такой подход начал интенсивно развиваться примерно 15 лет назад в работах Б.Эфрона и получил название бутстреп-метода. Однако, в стандартном виде бутстреп использует грубую эмпирическую функцию распределения, непригодную в силу своей дискретности для построения доверительных бутстреп-интервалов гамма-процентного ресурса при малых объемах исходных данных ($N \leq 10$).

НТБ МГТУ им. Н.Э. Баумана



1544717

Терещенко Е.Р. Интервальные



Поэтому, применение бутстреп-метода для решения поставленной в диссертации задачи потребовало (или целью работы являлось):

1) Разработать или адаптировать к задаче уже известные непрерывные непараметрические оценки функций распределения наработок до отказа пригодные для построения точечных оценок и доверительных бутстреп - интервалов показателей долговечности типа гамма-процентного ресурса и средней наработки до отказа.

2) Для улучшения качества и точности получаемых непрерывных оценок разработать процедуру учета дополнительной априорной информации об исходной функции распределения следующего вида:

- а) симметрии плотности распределения с известным центром;
- б) симметрии плотности распределения с неизвестным центром;
- в) известны математические ожидания от известных функций исследуемой случайной величины.

3) Исследовать свойства предлагаемых оценок функций распределения и построенных на их основе показателей долговечности, а также показать их пригодность для использования в бутстреп - процедурах.

4) Разработать программы, реализующие на ЭВМ расчет непараметрических точечных оценок и доверительных бутстреп - интервалов с учетом априорной информации для показателей долговечности изделий и систем с последовательной ССН.

5) Исследовать эффективность предлагаемых оценок и всей процедуры при ограниченных объемах исходных данных ($4 \leq N \leq 10$) методами имитационного моделирования.

При этом делались следующие предположения:

- а) элементы системы отказывают независимо друг от друга;
- б) изделия и системы являются невосстанавливаемыми;
- в) исходные распределения наработок до отказа непрерывны.

Научная новизна результатов, полученных в диссертации состоит в следующем:

1) Предложены непараметрические оценки функций распределения с учетом априорной информации об исходной функции распределения из класса непрерывных.

2) Исследованы свойства предлагаемых оценок и построенных на их основе оценок гамма - процентного ресурса и средней наработки до отказа. Доказаны асимптотические сос-

тоятельность, несмещенность и нормальность этих оценок, получены выражения асимптотических дисперсий.

3) Разработаны алгоритмы и программное обеспечение для построения точечных и интервальных оценок показателей долговечности изделий и последовательных систем.

4) Исследованы свойства точечных оценок показателей долговечности как в случае отдельного изделия, так и в случае последовательной системы при малых объемах исходных выборок методами имитационного моделирования.

5) Методами имитационного моделирования исследована бутстреп – процедура построения доверительных интервалов показателей долговечности для последовательных систем и отдельных изделий на основе предлагаемых в работе непараметрических оценок функций распределения при различных видах априорной информации и ограниченных объемах исходных данных.

Практическая ценность. Цель диссертационной работы и все проведенные в ней теоретические исследования имеют прикладной характер. Они призваны содействовать созданию эффективных методик построения точечных и доверительных оценок показателей долговечности отдельных изделий и сложных технических систем при малых объемах исходных выборок.

Разработанные алгоритмы и реализующие их программы предназначены для обработки экспериментальных данных ограниченного объема. Предлагаемые в этой работе процедуры реализованы в виде программ, которые переданы НИО "Композит", где предполагается их дальнейшее использование при создании системы математического обеспечения для автоматизированных систем контроля и прогнозирования функционирования сложных технических систем.

На защиту выносятся:

1) Способы построения непараметрических непрерывных оценок функций распределения с учетом дополнительной априорной информации об исходном распределении в виде:

- а) симметрии плотности распределения с известным центром;
- б) симметрии плотности распределения с неизвестным центром;
- в) известны математические ожидания от известных функций исследуемой случайной величины;
- г) непрерывность распределения для многомерных данных.

2) Результаты о состоятельности, асимптотических не

смещенности, нормальности предлагаемых оценок функций распределений и оценок показателей долговечности построенных на их основе.

3) Выражения асимптотических дисперсий предлагаемых оценок функций распределения и оценок показателей долговечности.

4) Результаты имитационных экспериментов, показывающие пригодность таких оценок функций распределения при построении точечных оценок и доверительных бутстреп-интервалов для показателей долговечности изделий, включая последовательные технические системы при ограниченных объемах исходных данных ($4 \leq N \leq 10$).

Апробация работы. Основные положения диссертации и отдельные ее результаты докладывались и обсуждались на:

1) III Всесоюзной конференции "Перспективы и опыт внедрения статистических методов в АСУ ТП" (Тула, 1987);

2) Зональной научно - технической конференции УО АН СССР "Датчики и средства первичной обработки информации" (Курган, 1990);

3) Всесоюзной научно - технической конференции с международным участием стран СЭВ "Применение статистических методов в производстве и управлении" (Пермь, 1990);

4) IV Всесоюзной конференции "Перспективы и опыт внедрения статистических методов в АСУ ТП" (Тула, 1990).

Публикации. Тема диссертации отражена в II печатных работах.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав с выводами, заключения и библиографического списка из 91 наименования. Объем диссертации 129 страниц машинописного текста. Работа содержит 5 таблиц и 8 рисунков.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность выбранной темы, приведен краткий обзор литературы по построению точечных и интервальных оценок показателей долговечности технических изделий и систем. Определены цели исследования и дана общая характеристика работы.

В первой главе диссертации представлен анализ современ-

ного состояния проблемы и приведен обзор публикаций по построению точечных оценок и доверительных границ. Обоснован выбор в качестве основных показателей долговечности гамма - процентного ресурса и средней наработки до отказа. Обсуждены возможности уже известных аналитических параметрических и непараметрических методов (теоретически гарантированные, асимптотические, фидуциальные интервалы). Обосновано применение в практических задачах предлагаемых в диссертационной работе непараметрических оценок функции распределения с учетом априорной информации об исходной функции распределения (непрерывности, симметрии, известных математических ожиданиях). Сделан вывод о невозможности при современном состоянии теории аналитического построения доверительных интервалов для показателей долговечности при ограниченных объемах исходных данных для изделия и сложных систем в общем случае.

В качестве решения этой задачи предлагаются методы статистического моделирования. Основное внимание уделено бутстреп - методу, точнее трем его разновидностям: процентильному методу, методу с коррекцией смещения $\langle BC \rangle$, улучшенному методу $-BC_\alpha$. Решено построить бутстреп-процедуру на основе непараметрических оценок функции распределения с учетом априорной информации, предлагаемых в этой работе.

Глава заканчивается математической постановкой задачи исследования, решение которой осуществляется в следующей последовательности:

- 1) По исходной выборке наработок t -го элемента системы до отказа ($t=1, m$) строится оценка его функции надежности $\hat{R}_i(t), t \geq 0$;
- 2) Строится оценка функции надежности последовательной системы $\hat{R}(t) = \hat{R}_1(t) \hat{R}_2(t) \dots \hat{R}_m(t)$.
- 3) Строятся оценки среднего ресурса $\hat{T} = \int_0^\infty \hat{R}(x) dx$ и гамма - процентного ресурса системы $\hat{t}_\gamma$, как корень решения уравнения $\hat{R}(\hat{t}_\gamma) = \gamma$.
- 4) Строятся бутстреп-оценки распределений $F_T(x)$ и $F_{t_\gamma}(x)$ оценок T и t_γ , соответственно.
- 5) Строятся доверительные бутстреп-интервалы уровня q (T_q^-, T_q^+) для T и $(t_{\gamma q}^-, t_{\gamma q}^+)$ для t_γ , где

$$\begin{matrix} T_q^+ \\ \int dF_T = 1 - \varepsilon; \\ T_q^- \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} t_q^+ \\ \int dF_\gamma = 1 - \varepsilon. \\ t_q^- \end{matrix}$$

Вторая глава диссертации посвящена построению непараметрических оценок функций распределения с учетом априорной информации и исследованию их свойств. В качестве основной непрерывной непараметрической оценки функции распределения выбрана оценка Розенблатта-Парзена:

$\hat{F}_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbb{G}\left(\frac{x-x_t}{h_N}\right)$ с плотностью $\hat{f}_N(x) = \frac{1}{N h_N} \sum_{t=1}^N K\left(\frac{x-x_t}{h_N}\right)$, где x_t - выборочные значения $t=1, N$, h_N - оптимизируемый по выборке параметр разности, $\mathbb{G}(u)$ и $K(u)$ обладают следующими свойствами:

$$\text{и. } 0 \leq K(u) < \infty, K(u) = K(-u), \int_{-\infty}^{\infty} K(u) du = 1;$$

$$\text{в. } \int_{-\infty}^{\infty} K_j^2(u) du < \infty, \int_{-\infty}^{\infty} u^2 K(u) du < \infty, \lim_{u \rightarrow \pm\infty} K(u) = 0;$$

$$\text{с. } 0 \leq \mathbb{G}(u) \leq 1, \mathbb{G}(-u) = 1 - \mathbb{G}(u), \mathbb{G}(-\infty) = 0, \mathbb{G}(\infty) = 1;$$

$$\text{д. } \int_{-\infty}^{\infty} u d\mathbb{G}(u) = 0, \int_{-\infty}^{\infty} u^2 d\mathbb{G}(u) < \infty.$$

Оценки типа $\hat{F}_N(x)$ также обобщены и для случая многомерных данных $\vec{x}_k = (x_1, \dots, x_k)$: $\hat{F}_{kN}(\vec{x}_k) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \prod_{j=1}^k \mathbb{G}_j\left(\frac{x_j - x_j^{(t)}}{h_N}\right)$. На основе таких оценок могут быть построены также маргинальные и условные непрерывные, непараметрические оценки функций распределения:

$$F_{1N}(x_1) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbb{G}\left(\frac{x_1 - x_1^{(t)}}{h_N}\right) \quad F_{jN}(x_j | \vec{x}_{j-1}) = A_{jN} / B_{j-1, N}, \text{ где}$$

$$A_{jN} = \frac{1}{N h_N^{j-1}} \sum_{t=1}^N \mathbb{G}\left(\frac{x_j - x_j^{(t)}}{h_N}\right) \prod_{\lambda=1}^{j-1} K_\lambda\left(\frac{x_\lambda - x_\lambda^{(t)}}{h_N}\right)$$

$$B_{j-1, N} = \frac{1}{N h_N^{j-1}} \sum_{t=1}^N \prod_{\lambda=1}^{j-1} K_\lambda\left(\frac{x_\lambda - x_\lambda^{(t)}}{h_N}\right), (j=2, k)$$

Во второй главе для этих оценок доказаны следующие теоремы об асимптотической несмещенности, состоятельности и асимптотической нормальности:

Теорема 2.3: Пусть:

- Функция $F_1(x_1)$ удовлетворяет условиям гладкости Γ_2 ;
- Функция $\mathbb{G}(u)$ удовлетворяет условиям с, д;
- $h_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.

Тогда оценка $F_{1N}(x_1)$ будет:

1) Асимптотически несмещенной и состоятельной оценкой $F_1(x_1)$ со смещением:

$$MF_{1,N}(x_1) - F_1(x_1) = \frac{1}{2} h_N^2 \frac{\partial^2 F_1(x_1)}{\partial x_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dG(u) + o(h_N^2);$$

2) $\sqrt{N}(F_{1,N}(x_1) - MF_{1,N}(x_1))$ имеет асимптотически нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией:

$$\sigma_0^2 = \left(F_1(x_1)(1-F_1(x_1)) - 2h_N \frac{\partial F_1(x_1)}{\partial x_1} \int_{-\infty}^{\infty} uG(u)dG(u) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} h_N^2 \frac{\partial^2 F_1(x_1)}{\partial^2 x_1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} u^2 G(u)dG(u) - F_1(x_1) \left[\int_{-\infty}^{\infty} u^2 dG(u) \right]^2 \right] + o(h_N^2) \right)$$

где M - знак математического ожидания.

Теорема 2.4: Пусть $F \in \mathcal{D}_0$, где $\mathcal{D}_0$ - класс непрерывных распределений. Для функций $K(u)$ и $G(u)$ выполнены условия α , β , γ , δ соответственно, плотность распределения $f_j(\tilde{x}_j)$ удовлетворяет условиям гладкости Γ_2 , а последовательность чисел h_N такова, что $h_N \rightarrow 0$, $Nh_N^{j+2} \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$. Тогда при $N \rightarrow \infty$ оценка $F_{j,N}(x_j | \tilde{x}_{j-1})$ будет:

1) Асимптотически несмещенной и состоятельной со смещением $MF_{j,N}(x_j | \tilde{x}_{j-1}) - F_j(x_j | \tilde{x}_{j-1}) \sim h_N^2 C_j$, где C_j - некоторая ограниченная константа;

2) Случайная величина $\sqrt{Nh_N^{j-1}} \left(F_{j,N}(x_j | \tilde{x}_{j-1}) - \frac{MA_{j,N}}{MF_{j-1,N}} \right)$ распределена асимптотически нормально с нулевым средним и дисперсией:

$$Nh_N^{j-1} DF_{j,N} = \frac{L_{(j-1)}}{f_{(j-1)}(\tilde{x}_{j-1})} F_j(x_j | \tilde{x}_{j-1}) [1 - F_j(x_j | \tilde{x}_{j-1})]$$

где $L_{(j-1)} = \prod_{\lambda=1}^{j-1} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\lambda}^2(u) du$, ($j=2, \bar{k}$).

Теорема 2.5: При выполнении условий теорем 2.3 и 2.4 вектор $\Phi_N = (\Phi_{1,N}, \dots, \Phi_{k,N})$, где $\Phi_{1,N} = \sqrt{N}(F_{1,N}(x_1) - F_1(x_1))$, $\Phi_{j,N} = \sqrt{Nh_N^{j-1}}(F_{j,N}(x_j | \tilde{x}_{j-1}) - F_j(x_j | \tilde{x}_{j-1}))$, $j=2, \bar{k}$, имеет асимптотически k -мерное нормальное распределение с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей $R = (\rho_{ij})$, причем при $N \rightarrow \infty$ $\rho_{i,j} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \rho_i, & i = j \end{cases}$, где ρ_i определено в теореме 2.3 (No_0^2) и ρ_j , $j=2, \bar{k}$ определено в теореме 2.4 ($Nh_N^{j-1} DF_{j,N}$).

Далее был сделан шаг для учета априорной симметрии исходной функции распределения относительно известного или неизвестного центра. Здесь использован стандартный метод

проектирования непараметрической оценки функции распределения в классе симметричных функций распределения, встречающийся у многих авторов (например, у Ю.Н.Тюрина, Ю.Г.Дмитриева и т.д.), но в применении не к эмпирической, а к ядерной оценке $\hat{F}_N(x)$. В результате получены оценки вида:

1) $\hat{F}(x) = \frac{1}{2}(\hat{F}_N(x) + 1 - \hat{F}_N(2\theta - x))$ учитывающая априорную симметрию исходной функции распределения относительно известного центра θ ;

2) $\hat{F}_1(x) = \frac{1}{2}(\hat{F}_N(x) + 1 - \hat{F}_N(2T(\hat{F}_N) - x))$ учитывающая априорную симметрию исходной функции распределения относительно неизвестного центра θ , где $T(\hat{F}_N)$ состоятельная, асимптотически несмещенная оценка θ .

Для этих оценок доказаны теоремы 2.6 и 2.7 (аналогичные теоремы для эмпирической функции распределения можно найти в работах Ю.Г.Дмитриева) об асимптотической несмещенности, состоятельности и асимптотической нормальности:

Теорема 2.6: Пусть $F \in \mathcal{S}_1^*$, где $\mathcal{S}_1^*$ - класс непрерывных и симметричных относительно известного центра θ распределений тогда оценка F : $\hat{F}(x) = \frac{1}{2}(\hat{F}_N(x) + 1 - \hat{F}_N(2\theta - x))$:

1) Состоятельна и асимптотически несмещена;

2) Величина $\sqrt{N}(\hat{F}(x) - F(x))$ асимптотически нормальна с нулевым средним и дисперсией:

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 = & F(x)(1-2F(x))/2 - f'(x)h_N^2 \int_{-\infty}^{\infty} u^2 d\epsilon(u) - \frac{1}{2}(f(x)h_N \int_{-\infty}^{\infty} u d\epsilon^2(u) - \\ & - \frac{1}{2}f'(x)h_N^2 \int_{-\infty}^{\infty} u^2 d\epsilon^2(u) + f(x) \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(u) \epsilon\left[\frac{2(x-\theta)}{h_N} - u\right] du - \\ & - f'(x)h_N \int_{-\infty}^{\infty} u \epsilon(u) \epsilon\left[\frac{2(x-\theta)}{h_N} - u\right] du + \frac{1}{2}f''(x)h_N^2 \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \epsilon(u) \epsilon\left[\frac{2(x-\theta)}{h_N} - u\right] du) + \\ & + o(h_N^2) \end{aligned}$$

Теорема 2.7: Пусть $F \in \mathcal{S}_1$, где $\mathcal{S}_1$ - класс симметричных относительно неизвестного центра θ тогда оценка F : $\hat{F}_1(x) = \frac{1}{2}(\hat{F}_N(x) + 1 - \hat{F}_N(2T(\hat{F}_N) - x))$, где $T(\hat{F}_N)$ состоятельная, асимптотически несмещенная оценка θ :

1) Состоятельна и асимптотически несмещена;

2) Величина $\sqrt{N}(\hat{F}_1(x) - F(x))$ асимптотически нормальна с нулевым средним и дисперсией: $\sigma_2^2 = \sigma_1^2 + \sigma_T^2 f^2(2\theta - x)$, где σ_T^2 дисперсия оценки $T(\hat{F}_N)$, а σ_1^2 определена в теореме 2.6.

Последними в этой главе были рассмотрены оценки функций распределения, учитывающие априорную информацию в виде:

$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_j(x) dF(x) = b_j, \infty, j = \overline{1, m}$. Здесь был использован метод проецирования непараметрической оценки функции распределения в класс $\mathcal{F}^\Phi = \{F \in \mathcal{F}^\Phi : \int \varphi(x) dF(x) = b\}$, где $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$, $b = (b_1, \dots, b_m)$ в смысле расстояния Кульбака, предложенный Ю.Г. Дмитриевым, но применен не к эмпирической функции распределения а к $\hat{F}_N$. В результате была получена следующая оценка:

$$F_N^\Phi(t) = \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} c(t) \left[\sum_{l=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\lambda_0(\varphi(y) - \varphi(x))) K\left(\frac{y-x}{h_N}\right) dy \right]^{-1} K\left(\frac{x-t}{h_N}\right) dx$$

где $c(t)$ — функция единичной ступеньки, λ_0 — решение системы уравнений: $\sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\lambda \varphi(x)) (\varphi(x) - b) K\left(\frac{x-t}{h_N}\right) dx = 0$.

Для оценки $F_N^\Phi(x)$ была доказана следующая теорема:

Теорема 2.8: Пусть в качестве оценки распределения $F \in \mathcal{F}^\Phi$ взята $F_N^\Phi(x)$. Тогда:

- 1) F_N^Φ — состоятельна и асимптотически несмещена;
- 2) Величина $\sqrt{N}(F_N^\Phi - MF_N^\Phi)$ асимптотически нормальна с нулевым средним и дисперсией σ_F^2 , вид выражения которой не приводится в реферате в виду его громоздкости.

Третья глава диссертационной работы посвящена построению оценок показателей долговечности на основе оценок функций распределений рассмотренных в предыдущей главе и исследованию их свойств. Здесь для них доказаны теоремы об асимптотической состоятельности, несмещенности, нормальности и найдены параметры асимптотических распределений. Однако, в силу того, что для оценок гамма — процентного ресурса в случае одномерных данных выражения асимптотических дисперсий получаются стандартным образом ($\sigma_\gamma^2 = \sigma_F^2 / f^2(x_{1-\gamma})$), где σ_γ^2 — дисперсия некоторой оценки $\hat{t}_\gamma$, σ_F^2 — дисперсия соответствующей оценки функции распределения, f — ее плотность, $x_{1-\gamma}$ — квантиль уровня $1-\gamma$), формулировки соответствующих теорем здесь будут опущены.

Приведем лишь теорему, доказанную для случая многомерных данных:

Теорема 3.4: Пусть выполнены условия теоремы 2.4 и условная плотность $f_j(x_j | \vec{x}_{j-1})$, ($j = \overline{2, k}$) равномерно непрерывна. Тогда:

- 1) Оценка $x_{rN}^{(j)}$ будет состоятельной оценкой условного

квантиля $x_p^{(j)}$;

2) Величина $\sqrt{Nn^{j-1}}[x_{pN}^{(j)} - x_p^{(j)}]$ имеет асимптотически нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией:

$$Nn^{j-1} D x_{pN}^{(j)} = \frac{L_{(j-1)}}{f_{(j-1)}(x_p^{(1)}, \dots, x_p^{(j-1)}) f_{j-1}^2(x_p^{(j)} | \tilde{x}_{j-1})} *$$

* $F_j(x_p^{(j)} | \tilde{x}_{j-1})[1 - F_j(x_p^{(j)} | \tilde{x}_{j-1})]$, где $L_{(j-1)} = \prod_{\lambda=1}^{j-1} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\lambda}^2(u) du$, $(j=2, \bar{k})$.

И, наконец, последние четыре теоремы диссертационной работы посвящены исследованию свойств оценок средней наработки до отказа, полученных на основе предлагаемых здесь непараметрических оценок функций распределения с учетом априорной информации.

Четвертая глава посвящена обсуждению проблем постановки имитационных экспериментов и результатов имитационного моделирования. Решено протестировать методики, предлагаемые в теоретической части диссертации, в ситуациях, имеющих аналитическое теоретически гарантированное решение и представляющих интерес с точки зрения теории надежности. Для этого в качестве исходных распределений наработок до отказа были выбраны следующие распределения: нормальное, экспоненциальное (интенсивность отказов постоянна), Вейбулл с параметром формы 0.5 (УФМ-распределение), Вейбулл с параметром формы 1.5 (ВФМ-распределение). Три последних распределения наработок до отказа применялись и в экспериментах с последовательными системами. При проведении имитационного моделирования ставились следующие задачи:

1) Проверка пригодности предлагаемых оценок для точечного и интервального оценивания на малых выборках, так как для них были исследованы лишь асимптотические свойства.

2) Проверка устойчивости алгоритмов при переходе от отдельного изделия к последовательной системе.

3) Анализ влияния учета априорной информации на получаемые оценки. (Нормальное распределение позволяет сравнить оценки, полученные с учетом априорной симметрии и без, остальные позволяют сравнивать оценки с учетом априорной усеченности слева, квантиль уровня ноль равен нулю, и без).

4) Проверка работоспособности написанных программ.

Решено проводить моделирование при следующих объемах исходных выборок $N=10, 8, 6, 4$ для проверки устойчивости построенной бутстреп - процедуры к уменьшению объема исходных данных, полученные результаты усреднять по 1000 исходных выборок. При оценивании гамма - процентного ресурса одновременно строить II оценок для разных уровней от $\gamma=0.05$ до 0.95 для проверки качества аппроксимации исходного распределения предлагаемыми здесь оценками как на хвостах, так и в центре,

Следующий раздел посвящен описанию программного обеспечения, как основной его части, реализующей алгоритмы, предлагаемые в диссертации (построение непараметрических точечных и доверительных оценок показателей надежности и долговечности отдельных изделий и систем с учетом априорной информации), так и вспомогательной, использующей известные алгоритмы для решения задач оптимизации, численного интегрирования, решения систем нелинейных уравнений, быстрой сортировки и вычисления значений спецфункций. Для решения поставленных задач было создано значительное по объему программное обеспечение в минимальной своей конфигурации около 16000 операторов на языке Фортран (здесь учтены лишь только процедуры, непосредственно связанные с имитационными экспериментами, результаты которых приведены в диссертации). В этом же разделе обсуждаются проблемы корректности построения имитационных экспериментов и бутстреп - метода, как вычислительных процедур, алгоритмы непараметрических многомерных датчиков и проблемы, связанные с построением стандартного равномерного датчика.

Результаты моделирования показали хорошее качество и точечных, и интервальных оценок показателей долговечности, предлагаемых в диссертации, а также хорошую устойчивость при оценивании показателей долговечности сложных систем. В экспериментах с меньшими объемами данных особенно эффективным оказалось применение оценок с учетом априорной информации при построении оценок гамма - процентного ресурса. Для оценок средней наработки до отказа влияние учета априорной информации оказалось значительно меньше влияния объема исходных выборок.

На рисунках 1 и 2 изображены соответственно модуль отклонения оценок гамма-процентного ресурса (с учетом непре-

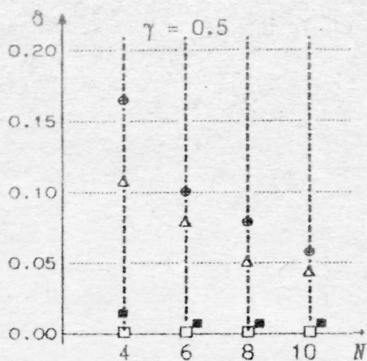
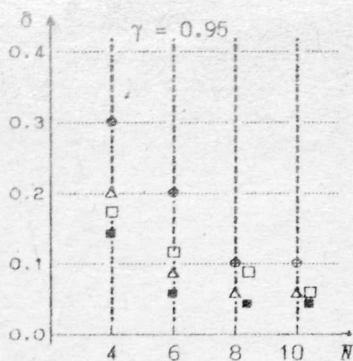


Рисунок 1

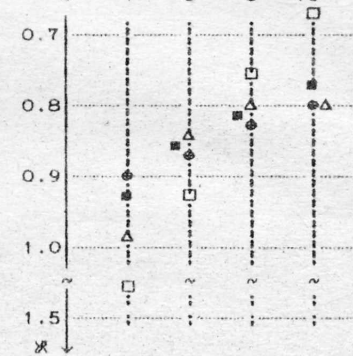
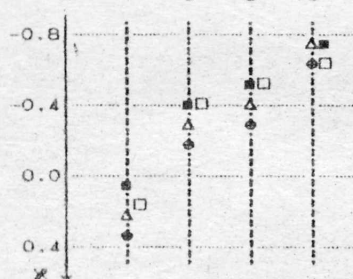
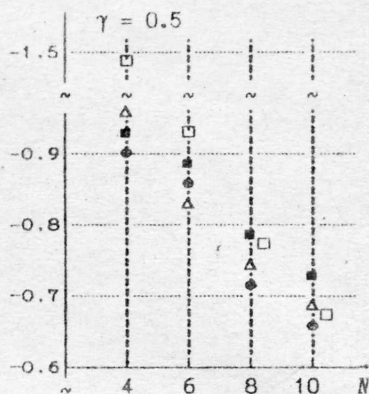
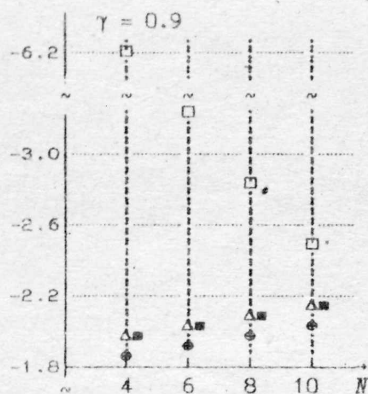


Рисунок 2.

ривности- ϕ , симметрии с неизвестным центром- Δ , симметрии с известным центром- π , параметрическая оценка- Π) от теоретического значения и доверительные интервалы (обозначения те же) для случая нормального исходного распределения $N(0,1)$. Результаты усреднены по 1000 исходных выборок.

Более подробное изучение таких диаграмм для разных распределений и приведенных в приложении результатов моделирования приводит к следующим выводам, изложенным здесь очень кратко:

1) По многим характеристикам начиная с выборок объемом $N=8$ бутстреп на основе предлагаемых в диссертации оценок показателей долговечности начинает давать результаты мало отличающиеся от параметрических (отличие $\sim 15\%$ по модулю отклонения, дисперсиям точечных и доверительных оценок) для гамма-процентного ресурса. (рисунки 1 и 2). Для средней наработки аналогичная ситуация начинается с $N=6$.

2) Наиболее тяжелая ситуация при доверительном оценивании - это построение доверительных границ на затянутых хвостах распределений, когда на малых выборках ($4 \leq N \leq 10$) информация о них очень скудна (рисунок 2). В этом случае доверительный интервал может быть значительно уже теоретического и иметь уровень доверия ниже заказанного. Помочь в этом случае может лишь учет дополнительной априорной информации, например, информации о квантилях на хвосте распределения. К счастью, задачи надежности имеют дело со случайными величинами усеченными слева (наработки - величины положительные), где подобные проблемы не возникают.

3) Начиная с выборок объемом $N \geq 85-90$ достаточно хорошо подтверждаются асимптотические результаты, оформленные в диссертации в виде теорем.

В целом результаты имитационного моделирования позволяют сделать вывод о предпочтительности непараметрических оценок с учетом априорной информации перед параметрическими на этапе первичной обработки данных на малых выборках, так как этими оценками в меньшей мере используются предположения об исходной функции распределения, а стало быть в меньшей степени искажается истинное положение дел, если они неверны, при достаточно хорошем качестве получаемых оценок.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ РАБОТЫ

1) Построены непараметрические оценки функций распределения с учетом априорной информации об исходной функции распределения в виде:

- а) непрерывности (включая случай с многомерными данными);
- б) симметрии плотности распределения с известным центром;
- в) симметрии плотности распределения с неизвестным центром;
- г) известны математические ожидания от известных функций исследуемой случайной величины.

2) Доказаны асимптотические состоятельность, несмещенность, нормальность предлагаемых в работе оценок функций распределения и оценок показателей долговечности. Получены выражения асимптотических дисперсий.

3) Создан комплекс программ на языке Фортран для построения непараметрических точечных оценок и доверительных бутстреп - интервалов для показателей долговечности изделий, включая сложные технические системы.

4) Поставлены имитационные эксперименты, результаты которых подтверждают пригодность предлагаемых оценок гамма - процентного ресурса при объемах исходных выборок $N \geq 8$, а средней наработки при $N \geq 6$.

5) Обозначены перспективные направления применения результатов диссертационной работы для других задач (статистического контроля качества, статистического контроля точности технологических процессов, статистического регулирования процессов).

6) Программный комплекс, созданный на основе разработанных в диссертации алгоритмов внедрен на ИПО "Композит" (г.Калининград, Московской области), где был использован при обработке экспериментальных результатов на растяжение и на малоцикловую усталость образцов СИАЛов с однонаправленным стеклоармированием. Предлагаемые в этой работе методики статистической обработки выборок малого объема оказались актуальными при доверительном оценивании ресурсных характеристик этих материалов, так как и образцы для испытаний, точнее их производство в лабораторных условиях, когда очень сложно стабилизировать значения значимых для свойств материала технологических факторов (диаметр стекловолокна, толщина

алюминевой фольги, толщина слоя стеклопластика и некоторых других) и, конечно, сами испытания довольно сложны и дорогостоящи. Так что реально объем выборочных данных обычно не превышал 5-6 значений.

8) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, код проекта 98-012-568.

Основные результаты диссертационной работы отражены в следующих работах:

1. Мясников Д.Г., Симахин В.А., Терещенко Е.Р. Автоматизированный расчет доверительных границ случайных параметров //Перспективы и опыт внедрения статистических методов в АСУ ТП:Тезисы докладов III Всесоюзной конференции. - Тула, 1987. - Т.1. - С.64-65.

2. Мясников Д.Г., Симахин В.А., Терещенко Е.Р. Интервальные оценки случайных параметров //Проектирование и эксплуатация систем и средств автоматизации и комплексной механизации производственных процессов в промышленности: Тезисы докладов научно - практической конференции. - Курган, 1987. - С.9-II.

3. Симахин В.А., Терещенко Е.Р. Доверительные интервалы для квантилей и функций распределения /Курганский машиностроительный институт.-Курган,1988. -55с. -Доп.в ВИНТИ 5.09.88, №7145.

4. Симахин В.А., Терещенко Е.Р. Асимптотический подход к непараметрическому оцениванию случайных параметров //Разработка и применение новой техники, технологии и автоматизированных систем в промышленности: Тезисы докладов научно - практической конференции. - Курган,1988.- С.20-22.

5. Симахин В.А., Терещенко Е.Р. Непараметрические многомерные датчики случайных величин //Перспективы и опыт внедрения статистических методов в АСУ ТП:Тезисы докладов IV Всесоюзной конференции. - Тула, 1990. - Т.1. - С.56-57.

6. Симахин В.А., Терещенко Е.Р. Генерация выборок в непараметрическом бутстреппе //Применение статистических методов в производстве и управлении: Тезисы докладов Всесоюзной научно - технической конференции с международным участием стран членов СЭВ. - Пермь, 1990. - Т.1. - С.79-80.

7. Симахин В.А., Терещенко Е.Р. Непараметрические

датчики случайных величин с непрерывной функцией распределения //Датчики и средства первичной обработки информации: Тезисы докладов зональной научно - технической конференции. - Курган, 1990. - С.110-112.

8. Симахин В.А., Терещенко Е.Р. Асимптотическое оценивание функции распределения //Статистические методы оценивания и проверки гипотез: Межвузовский сборник научных трудов. - Пермь, 1990. - С.56-61.

9. Терещенко Е.Р. Асимптотическое точечное и доверительное оценивание функции распределения Вейбулла и ее квантилей //Датчики и средства первичной обработки информации: Тезисы докладов зональной научно - технической конференции. - Курган, 1990. - С.113-115.

10. Симахин В.А., Терещенко Е.Р. Непараметрические датчики случайных величин /Курганский машиностроительный институт. Курган, 1992. -32с. -Деп. в ВИНТИ 8.07.92, №2199.

11. Тескин О.И., Симахин В.А., Терещенко Е.Р. Модели бустрепа при интервальном оценивании показателей долговечности последовательных систем по малым выборкам //Статистические методы оценивания и проверки гипотез: Межвузовский сборник научных трудов. - Пермь, 1993. - С.42-48.