

Применение нелокальных критериев разрушения к образцам с регулярным концентратором напряжения

© Д.С. Мосиенко, М.А. Леган

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН,
Новосибирск, 630090, Российская Федерация

Проведена экспериментальная программа по исследованию механических характеристик хрупкого материала гипс Г5. По результатам серий испытаний получены пределы прочности на растяжение и сжатие, модуль упругости и критическое значение коэффициента интенсивности напряжения. Исследовано влияние регулярного концентратора напряжений на прочность образцов, испытанных по схеме модифицированный бразильский тест. Все образцы разрушены в результате образования трещины нормального отрыва, распространяющейся вдоль диаметральной линии, по которой приложена нагрузка, от отверстия к внешней поверхности диска. Увеличение размера отверстия приводит к снижению нагрузки, требуемой для разрушения образцов, демонстрируется масштабный эффект. Выполнены расчеты критической нагрузки с использованием нелокальных критериев разрушения. Результаты расчетов качественно и количественно соотносятся с экспериментальными данными, среднее отклонение между ними составило 4,25 %. Продемонстрирована перспектива развития трехпараметрических критериев разрушения применительно к схемам с регулярными концентраторами напряжения, учитывающим масштабный эффект.

Ключевые слова: неоднородное напряженное состояние, трещина нормального отрыва, модифицированный бразильский тест, критерий разрушения

Введение. Расчет критических нагрузок в узлах и конструкциях, имеющих регулярные концентраторы напряжений, — актуальная инженерная проблема [1–3]. Основная сложность в их определении вызвана тем, что в диапазоне перехода от сингулярных концентраторов (трещин) к однородному напряженному состоянию проявляется масштабный эффект. В прочностных расчетах под таким эффектом понимается влияние размеров образца и концентратора напряжения на его механические характеристики [4]. Эта широко известная проблема наиболее ярко проявляется в процессе испытаний хрупких и квазихрупких материалов [5, 6], таких как горные породы, бетон, керамика, стекло, некоторые композиционные материалы и сплавы металлов.

В области критериев разрушения хрупких материалов в условиях неоднородного напряженного состояния исследования проводят в разных направлениях. В настоящее время основными подходами можно считать численное моделирование [7–9] и аналитические методы. Первый подход сводится к тому, чтобы создать параметрическую модель материала, пригодную к использованию в условиях сложного напряженного состояния. Его несомненными преимуществами являются гибкость к заданию геометрии расчетной схемы, а также универсальность откалиброванной модели. К недостаткам можно

отнести необходимость большого количества экспериментальных данных, требующихся для калибровки параметров материала, длительность расчета, избыточную сложность процесса расчета.

Во втором, аналитическом, подходе преобладает развитие нелокальных двух- и трехпараметрических критериев разрушения, суть которых сводится к тому, чтобы учесть степень неоднородности напряженного состояния в области начала разрушения материала, в том числе масштабный эффект при неоднородном напряженном состоянии. Для оценки эффективного напряжения используются скалярная функция тензора напряжений (эквивалентное напряжение) и некоторый параметр, как правило, имеющий размерность длины и характеризующий структуру материала. В критерии разрушения эффективное напряжение сравнивается с пределом прочности материала при одноосном растяжении. Для качественного расчета критических нагрузок при наличии регулярных концентраторов напряжения двух параметров бывает недостаточно, поэтому развитие данного подхода привело к необходимости формулирования трехпараметрических критериев разрушения.

Цель настоящей работы — демонстрация перспективы развития аналитических трехпараметрических критериев разрушения, применяемых для расчета критической нагрузки в условиях неоднородного напряженного состояния. В этой работе будут рассмотрены три нелокальных критерия разрушения, модифицированные введением третьего параметра, который можно считать параметром аппроксимации: градиентный критерий [10, 11], интегральный критерий Нейбера — Новожилова [12, 13] и критерий разрушения, использующий ширину полупика напряжения [14].

В настоящее время эффективность расчета с использованием по критериям с тремя параметрами материала все еще нуждается в валидации путем накопления экспериментальных данных, однако, как будет показано далее, такой подход очень перспективен. Дополнительно рассматривается двухпараметрический критерий, использующий понятие фиктивной трещины — связанный критерий, который был предложен Д. Легийоном [15].

Использование аналитических критериев разрушения позволит существенно упростить процесс оценки критических нагрузок, а также итерационный процесс проектирования сложных узлов и деталей. Несомненно, их применение будет полезно при исследовании материалов, особенно хрупких, в тех случаях, когда по тем или иным причинам затруднено создание стандартизированных образцов.

Экспериментальные данные. Для проведения испытаний были изготовлены образцы из гипса Г5, взятого из одной упаковки. Для того чтобы избежать ошибок при расчетах разрушающей нагрузки, все необходимые прочностные характеристики определялись по результатам

независимых испытаний на установке Zwick/Roell Z100 образцов из той же партии замешанного материала.

Все образцы сжимались между плоскими плитами из конструкционной легированной стали, которая была на три порядка более жесткой, чем испытуемый материал, условно принятый недеформируемым. На всех расчетных схемах, кроме испытаний на одноосное сжатие, цилиндрические образцы контактировали с плитами боковой поверхностью, поэтому будем считать такое нагружение эквивалентным прикладыванию сосредоточенной силы.

Экспериментальная программа состояла из серий испытаний образцов различных схем для определения основных механических характеристик, а также испытаний образцов с регулярным концентратором напряжения, для анализа которых применялись нелокальные критерии разрушения.

Испытание на растяжение проводилось по схеме бразильский тест, заключающийся в сжатии цилиндрических образцов вдоль диаметра. Расчетная схема этого теста представлена на рис. 1.

Серия состояла из четырех образцов, геометрические параметры которых и критические нагрузки по результатам испытаний представлены в табл. 1.

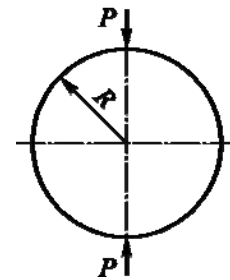


Рис. 1. Расчетная схема бразильского теста

Таблица 1

Результаты испытания образцов на растяжение

Параметр	Значение параметра образца номер			
	1	2	3	4
Радиус образца R , м	0,0314	0,0312	0,0317	0,0315
Толщина образца t , м	0,029	0,0298	0,0275	0,0286
Критическая нагрузка P , Н	6180	5990	7360	6160

Среднее значение условного предела прочности σ_b на растяжение определялось по формуле

$$\sigma_b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{P_i}{\pi R_i t_i}, \quad (1)$$

где n — число испытаний, $n = 4$.

Результат составил $\sigma_b = 2,266 \cdot 10^6$ Па при стандартном отклонении $2,989 \cdot 10^5$ Па. Испытания на одноосное сжатие четырех цилиндрических образцов высотой H проводились сжатием их вдоль образующей между стальными плитами. Расчетная схема этих испытаний

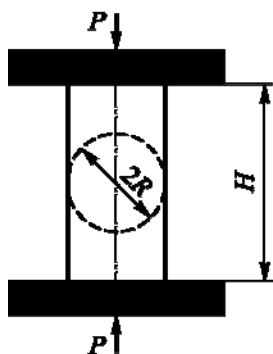


Рис. 2. Расчетная схема испытания на сжатие:
 P — критическая нагрузка;
 R — радиус образца;
 H — высота образца

приведена на рис. 2. Геометрические параметры образцов и критические нагрузки по результатам испытаний представлены в табл. 2.

Среднее значение предела прочности на сжатие σ_c рассчитано по формуле

$$\sigma_c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{P_i}{\pi R_i^2}, \quad (2)$$

где n — количество испытаний, $n = 4$.

В результате был получен предел прочности $\sigma_c = 1,223 \cdot 10^7$ Па при стандартном отклонении $6,862 \cdot 10^6$ Па. Модуль упругости E определялся с помощью диаграмм зависимости приложенной нагрузки от перемещения траверсы, полученных в ходе испытания на сжатие. Данные пересчитывались в инженерные напряжения и деформации. Среднее значение модуля упругости составило $E = 1,305 \cdot 10^9$ Па при стандартном отклонении $1,434 \cdot 10^8$ Па.

Таблица 2

Результаты испытания образцов на сжатие

Параметр	Значение параметра образца номер			
	1	2	3	4
Радиус образца R , м	0,015	0,015	0,015	0,015
Высота образца H , м	0,0502	0,0501	0,0506	0,0497
Критическая нагрузка P , Н	8290	8560	9350	8370

Испытания на трещиностойкость проводились путем сжатия цилиндрических образцов вдоль диаметра с заранее сформированной щелью длиной $2l$ в виде пропила, ориентированного вдоль приложенной нагрузки. Расчетная схема этого испытания четырех образцов представлена на рис. 3.

Геометрические параметры образцов и критические нагрузки, полученные при испытаниях на трещиностойкость, представлены в табл. 3.

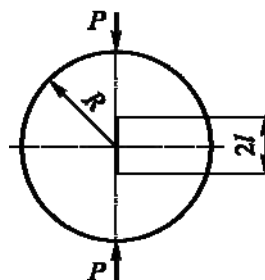


Рис. 3. Расчетная схема испытания на трещиностойкость

Таблица 3

Результаты испытания образцов на трещиностойкость

Параметр	Значение параметра образца номер			
	1	2	3	4
Радиус образца R , м	0,0311	0,0313	0,031	0,031
Длина разреза $2l$, м	0,0104	0,011	0,0104	0,011
Толщина образца t , м	0,0185	0,0273	0,0238	0,0195
Критическая нагрузка P , Н	2060	2890	2480	2870

Среднее критическое значение коэффициента интенсивности напряжения (КИН) рассчитывается по формуле [16]:

$$K_{Ic} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1,01227 P_i}{t_i \sqrt{\pi R_i}} \cdot f(\lambda) \sqrt{\frac{\lambda}{1-\lambda}}, \quad (3)$$

$$f(\lambda) = 1 - 0,60387\lambda + 1,67239\lambda^2 - 1,16988\lambda^3,$$

где $\lambda = l/R$; $n = 4$ — число испытаний.

Результирующее значение КИН составило $K_{Ic} = 1,605 \cdot 10^5 \text{ Па} \cdot \text{м}^{1/2}$ при стандартном отклонении $2,97 \cdot 10^4 \text{ Па} \cdot \text{м}^{1/2}$.

Испытания образцов с регулярным концентратором напряжения проводились по схеме модифицированного бразильского теста. Расчетная схема приведена на рис. 4.

В дальнейшем для записи аналитических выражений компонент тензора напряжений будут использованы полярные координаты (r, φ) .

Проведены испытания 16 образцов с четырьмя различными размерами центрального отверстия. Их геометрические параметры и критические нагрузки приведены в табл. 4. Внешний радиус всех образцов выбран $R = 0,0315 \text{ м}$.

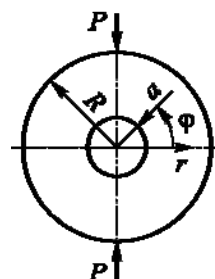


Рис. 4. Расчетная схема модифицированного бразильского теста

Таблица 4

Результаты испытания образцов по схеме модифицированный бразильский тест

Номер образца	Радиус отверстия a , м	Толщина образца t , м	Критическая нагрузка P , Н
1	0,00075	0,0283	5810
2	0,00075	0,0260	6140
3	0,00075	0,0275	5390
4	0,00075	0,0265	5960

Номер образца	Радиус отверстия a , м	Толщина образца t , м	Критическая нагрузка P , Н
5	0,0015	0,0285	3810
6	0,0015	0,0298	5010
7	0,0015	0,0285	4000
8	0,0015	0,0249	4810
9	0,0025	0,0284	3330
10	0,0025	0,0306	4160
11	0,0025	0,0304	4010
12	0,0025	0,0295	3940
13	0,004	0,0269	2610
14	0,004	0,0300	2850
15	0,004	0,0300	3480
16	0,004	0,0302	3030

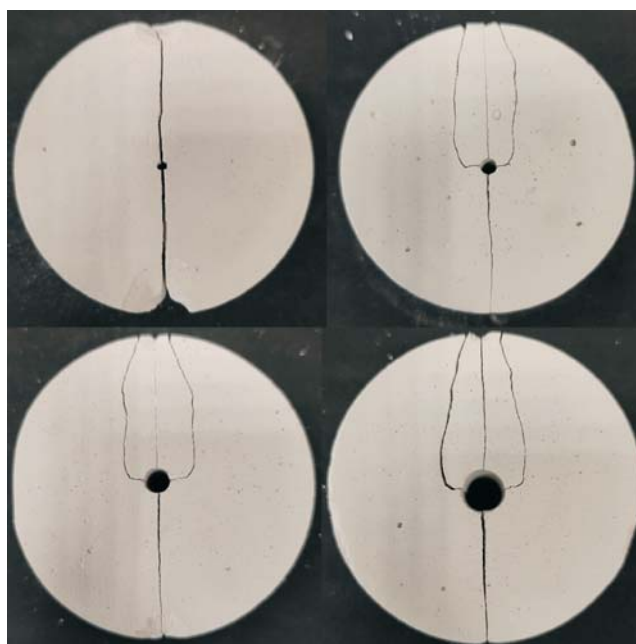


Рис. 5. Фотографии испытанных образцов с регулярным концентратором напряжения

Разрушенные образцы с регулярным концентратором напряжений представлены на рис. 5. Отметим, что процесс разрушения всегда начинался с формирования трещины нормального отрыва, которое проходит от поверхности внутреннего отверстия вдоль диаметральной линии приложения нагрузки. Ввиду отсутствия возможности резкого снятия нагрузки в момент начала формирования основной

трещины нормального отрыва, разрушению практически всегда сопутствовали вторичные трещины, идущие по изогнутой траектории от точки приложения нагрузки к точке на внутренней поверхности отверстия. Также высокие контактные нагрузки приводили к смятию и выкрашиванию материала в области взаимодействия образца со стальными плитами.

Аналитическое решение задачи. Для проведения дальнейших расчетов понадобится аналитическое решение плоской задачи теории упругости о диаметральной сжатии цилиндра с отверстием. При этом используется классическое решение, полученное С.П. Тимошенко [17] на основе принципа суперпозиции путем сочетания двух решений о растяжении и трехкратном сжатии бесконечной плоскости с отверстием. Основным недостатком такого решения является то, что оно не учитывает конечные размеры кольца. При увеличении радиуса центрального отверстия a относительно габаритного радиуса R кольца допущение о том, что можно рассматривать отверстие в цилиндре как в плоскости, теряет свою силу. Однако в рассматриваемых масштабах отношения радиусов отверстия и габаритного ($a/R < 0,127$) следует принять допущение о соответствии данного решения расчетной схеме модифицированного бразильского теста (см. рис. 4). Выражение для окружных напряжений σ_φ имеет следующий вид:

$$\sigma_\varphi(r, \varphi) = \frac{-P}{\pi R t} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} + 2 \left(1 + 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \cos(2\varphi) \right). \quad (4)$$

В рассматриваемой задаче разрушение начинается в той области, где окружное напряжение действует по нормали к плоскости, включающей площадку первого главного напряжения в точке тела, где плоскость и площадка первого главного напряжения имеют общую нормаль. Ей соответствует точка на внутренней поверхности диска, расположенная на диаметральной линии приложения внешней нагрузки ($\varphi = \pm\pi/2$). Окружное напряжение σ_v , действующее на диаметральной линии приложения внешней нагрузки, определяется выражением

$$\sigma_v(r) = \sigma_\varphi(r, \pm\pi/2) = \frac{P}{\pi R t} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} + 6 \frac{a^4}{r^4} \right). \quad (5)$$

Нелокальные трехпараметрические критерии разрушения. Рассматриваемые ниже нелокальные критерии разрушения основаны на сравнении с пределом прочности на растяжение σ_B некоторого эффективного напряжения σ_e :

$$\sigma_e = \sigma_B. \quad (6)$$

Далее в каждом критерии эффективное напряжение определяется по-своему. Приведем три наиболее хорошо зарекомендовавших себя с точки зрения точности расчетов критерия. В градиентном критерии разрушения эффективное напряжение σ_e зависит от характеристики локальной неравномерности поля напряжений $\sigma_v(a)$ в окрестности рассматриваемой точки и представительного размера L_1 неоднородности материала:

$$\sigma_e = \sigma_v(a) / \left(1 - \beta + \sqrt{\beta^2 + L_1 \cdot g_v(a)} \right), \quad (7)$$

где β — безразмерный параметр, который можно использовать, как параметр аппроксимации; L_1 — представительный размер неоднородности материала; $g_v(r)$ — характеристика локальной неоднородности напряженного состояния.

Локальная неоднородность напряженного состояния характеризуется величиной g_v , которая зависит от градиента напряжения:

$$g_v(r) = |\text{grad}(\sigma_v(r))| / \sigma_v(r). \quad (8)$$

Величина $\Delta = 1/g_v$, имеющая размерность длины, представляет собой условный размер зоны концентрации напряжений.

Представительный размер неоднородности материала L_1 находится из условия согласования градиентного критерия с линейной механикой разрушения [10]. А согласование этого критерия с линейной механикой разрушения заключается в том, что если L_1 определяется по формуле

$$L_1 = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{K_{Ic}^2}{\sigma_B^2}, \quad (9)$$

то для концентраторов типа трещин нормального отрыва градиентный критерий в пределе дает точно такие же выражения для критических нагрузок, как и линейная механика разрушения.

Для материала гипс Г5 значение параметра L_1 , вычисленное по формуле (9), равно 0,003192 м, т. е. параметр $L_1 \approx 3,2$ мм. Следует отметить, что градиентный критерий может давать завышенные значения критических нагрузок в схемах, где характерный размер концентратора напряжения меньше параметра L_1 . Это обстоятельство приводит к ограничениям в применении градиентного критерия в случае отверстий малых размеров [10]. Анализ схемы модифицированного бразильского теста (см. рис. 4) показал, что при имевшихся

размерах отверстий в испытанных образцах ограничения в применении градиентного критерия не наступали.

Третьим параметром в градиентном критерии является β — безразмерный неотрицательный параметр, который можно использовать как параметр аппроксимации. Его значение может быть определено для конкретного материала при удовлетворительном описании экспериментальных данных по разрушению образцов с конкретным концентратором напряжений, например, с круговым отверстием. Далее найденное значение параметра может быть использовано для элементов конструкций из того же материала, но с другими концентраторами напряжений. Таким образом, градиентный критерий содержит три параметра: σ_b , K_{Ic} , β .

В критерии разрушения, использующем в качестве условного размера зоны концентрации напряжений вместо Δ ширину полупика напряжения W , в отличие от градиентного критерия распределение напряжений рассматривается в более широких пределах: от контура концентратора до номинальных значений. Эффективное напряжение записывается в аналогичном виде:

$$\sigma_e = \sigma_v(a) / \left(1 - \gamma + \sqrt{\gamma^2 + L_1 / W}\right), \quad (10)$$

где γ — безразмерный параметр, который можно использовать как параметр аппроксимации; W — ширина полупика напряжения.

Ширина полупика напряжения определяется из решения нелинейного уравнения

$$\sigma_v(a + W) = (\max(\sigma_v(r)) + \min(\sigma_v(r))) / 2. \quad (11)$$

Параметр L_1 определяется также по (9) из условия согласования критерия с линейной механикой разрушения. Третий параметр γ имеет такой же смысл, как и параметр β в градиентном критерии, но его значение отличается.

Трехпараметрический интегральный критерий разрушения использует среднее нормальное напряжение на площадке, имеющей фиксированный наименьший размер L_1 и включающей рассматриваемую точку. Согласно данному критерию, эффективное напряжение можно представить в следующем виде:

$$\sigma_e = \sigma_v(a) / \left(1 - \eta + \sqrt{\eta^2 - 1 + \sigma_v(a) / \langle \sigma_v \rangle}\right)^2, \quad (12)$$

где η — безразмерный параметр, который можно использовать как параметр аппроксимации; $\langle \sigma_v \rangle$ — среднее нормальное напряжение на длине L_1 .

Величина $\langle \sigma_v \rangle$ определяется выражением

$$\langle \sigma_v \rangle = \frac{1}{L_1} \int_a^{a+L_1} \sigma_v(r) dr. \quad (13)$$

Параметр η , как и параметры β и γ в двух предыдущих описанных критериях, имеет смысл параметра аппроксимации. При $\eta = 1$ критерий совпадает с критерием средних напряжений.

Связанный критерий разрушения. Несмотря на то что описанные выше нелокальные критерии дают удовлетворительную инженерную точность расчетов разрушающей нагрузки, у них есть два концептуальных недостатка. Первый заключается в том, что параметры аппроксимации β , γ и η , необходимые для улучшения точности решения, не являются физически обоснованными. Первоначальное условие, что их значение должно находиться в промежутке от нуля до единицы [10, 11], также не обосновано. Расширение этого предела может привести к улучшению точности расчетов по сравнению с экспериментальными данными. Вторым недостатком заключается в том, что на данный момент нет убедительных доказательств тому, что при изменении расчетной схемы и степени неоднородности напряженного состояния при использовании того же материала, расчеты критических нагрузок покажут такую же эффективность при неизменности значений параметров аппроксимации для каждого из рассмотренных нелокальных критериев разрушения. В связи с этим принято решение рассмотреть еще один критерий разрушения, который предложил Д. Легийон [15]. В оригинальной постановке этот критерий является двухпараметрическим, он использует понятие фиктивной (виртуальной) трещины.

Критерий первоначально был установлен для сингулярных концентраций в вершине надреза. Согласно данному критерию, разрушение происходит тогда, когда максимальное растягивающее напряжение

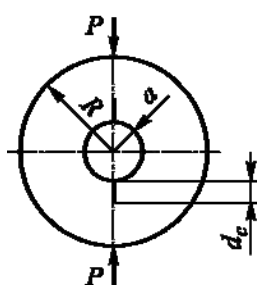


Рис. 6. Расчетная схема модифицированного бразильского теста с виртуальными трещинами длиной d_v

в точке конфигурации без трещин и скорость выделения энергии в вершине виртуальной трещины $G(r)$, расположенной в той же точке конфигурации с трещинами, достигают одновременно их критических значений:

$$\begin{cases} \sigma_v(r) = \sigma_b; \\ G(r) = G_c, \end{cases} \quad (14)$$

при $r = a + d_c$ (d_c — длина виртуальной трещины).

Расчетная схема образца с фиктивной трещиной представлена на рис. 6.

Скорость выделения энергии можно выразить через коэффициент интенсивности напряжения, сведя таким образом вторую часть выражения (14) к следующему:

$$K_I(r) = K_{Ic}. \quad (15)$$

Решая систему уравнений (14), имеем две неизвестные — P и d_c . Выразив нагрузку P из обоих выражений системы и приравняв ее друг к другу, получим выражение, из которого можно вычислить d_c . Подставив полученное значение длины фиктивной трещины в любое из выражений системы (14), можно вычислить критическую нагрузку.

Следует заметить, что для применения связанного критерия (14) нужно иметь аналитическое выражение для скорости выделения энергии в вершине виртуальной трещины. Это обстоятельство затрудняет применение критерия (14) в несимметричных задачах о концентрации напряжений, в которых точка начала разрушения заранее неизвестна.

Полученные результаты. На рис. 7 представлен график, на котором для сравнения показаны результаты расчетов по описанным выше критериям разрушения и экспериментальные данные испытаний образцов. Три параметра аппроксимации определены методом минимизации среднеквадратичного отклонения, их значения составили: $\beta = -0,234$, $\gamma = 0,366$, $\eta = 0,703$.

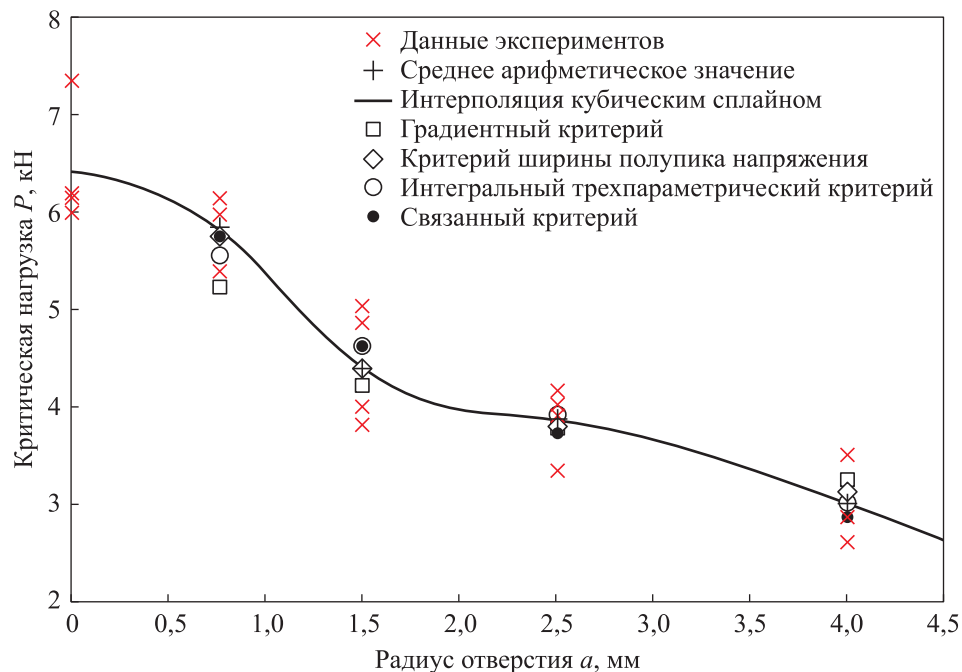


Рис. 7. Результаты расчетов критической нагрузки по критериям разрушения и экспериментальные данные

**Среднее отклонение расчетных данных от экспериментальных
при разных значениях радиуса центрального отверстия a**

Критерий δ	Значение критерия δ , %, при радиусе отверстия a , м			
	0,00075	0,0015	0,0025	0,004
Градиентный	-9,812	-4,397	-1,842	8,248
Ширины полупика напряжения	-1,069	-0,027	-1,488	4,207
Трехпараметрический интегральный	-4,462	4,498	1,604	1,567
Связанный	-1,331	4,821	-3,662	-4,099

Средние значения отклонения рассчитанных критических нагрузок от экспериментальных данных в процентах приведены в табл. 5. Обозначив критическую нагрузку, вычисленную по критерию разрушения, как P_c , а критическую нагрузку, полученную экспериментально, как P_e , среднее отклонение рассчитаем по формуле

$$\delta = \frac{P_c - P_e}{P_e} \cdot 100 \%. \quad (16)$$

Важно отметить, что все расчетные значения, полученные с помощью всех критериев, за исключением одного (расчета по градиентному критерию при $a = 0,0075$ м), укладываются внутри разброса экспериментальных данных. Наибольшие отклонения расчетных значений от экспериментальных данных показал градиентный критерий. Следует также отметить, что если подчинить параметр β трактуемому в оригинальном изложении условию $0 \leq \beta \leq 1$, то отклонения будут еще значительнее. Рассчитанные с помощью трехпараметрического градиентного критерия разрушения значения имеют явную тенденцию к занижению при малых отверстиях и завышению при больших. Возможно, это связано со смятием гипса в местах контакта при больших нагрузках в случае малых отверстий, вследствие чего реальные условия нагружения немного отличались от расчетной схемы, а при больших отверстиях имеет место увеличение коэффициента концентрации напряжений по сравнению со значением, принятым в расчетах. Это приводит к завышению расчетных значений критических нагрузок по сравнению с результатами испытаний. Критерий разрушения, использующий ширину полупика напряжения, показал наиболее стабильный относительно экспериментальных данных результат. Коэффициенты γ и η также укладываются в промежуток от нуля до единицы. Связанный критерий, несмотря на отсутствие третьего параметра материала, также продемонстрировал хорошую точность расчета.

Заключение. Проведена экспериментальная программа по исследованию механических характеристик гипса Г5. Получены условный предел прочности на растяжение ($\sigma_b = 2,266 \cdot 10^6$ Па), предел прочности на сжатие ($\sigma_c = 1,223 \cdot 10^7$ Па), критическое значение КИН ($K_{Ic} = 1,605 \cdot 10^5$ Па $\cdot$ м $^{1/2}$), модуль упругости ($E = 1,305 \cdot 10^9$ Па). Проведена серия испытаний образцов с регулярным концентратором напряжений по схеме модифицированный бразильский тест. Результаты расчетов критической нагрузки по нелокальным трехпараметрическим критериям разрушения сравнивались с экспериментальными данными. Продемонстрирована эффективность расчетов. Использование третьего параметра материала позволяет добиться хорошей точности для инженерных расчетов. Наибольшие отклонения от осредненных значений экспериментальных данных составили 9,81 % для градиентного критерия, 4,2 % для критерия разрушения, использующего ширину полупика напряжения, 4,5 % для интегрального критерия, 4,82 % для связанного критерия. Таким образом, понятно, что развитие трехпараметрических нелокальных критериев разрушения является перспективным направлением в исследовании разрушения образцов с регулярным концентратором напряжения.

Дальнейшую работу по развитию нелокальных критериев рекомендуется проводить в следующих направлениях. Уменьшение разброса результатов испытаний по схеме модифицированный бразильский тест посредством модификации формы сдавливающих плит или способа приложения нагрузки. Физическое обоснование третьего параметра материала, используемого в трехпараметрических критериях. Нарботка экспериментальных данных с применением различных схем и значений коэффициента концентрации напряжений. Рекомендуется выбирать модифицированный бразильский тест в качестве стандартного испытания при исследовании хрупких и квазихрупких материалов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Чеврычкина А.А., Груздков А.А., Петров Ю.В. Применение нелокальных критериев разрушения в задачах с неоднородным полем напряжений. *Физика твердого тела*, 2017, т. 59, вып. 8, с. 1570–1575.
- [2] Kurguzov V., Kuznetsov D. Fracture analysis of Brazilian circular hole disk under mixed mode loading. *Engineering Fracture Mechanics*, 2024, vol. 297, no. 109875, pp. 1–15. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2024.109875
- [3] Vullo V. *Circular Cylinders and Pressure Vessels*. Springer Series in Solid and Structural Mechanics, 2014, vol. 3, 388 p.
- [4] Сукнев С.В. Применение методов теории критических расстояний для оценки разрушения квазихрупких материалов с вырезами. *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*, 2023, № 1, с. 129–141.

- [5] Quinn G.D. *Fractography of Ceramics and Glasses*. National Institute of Standards and Technology, 2020, 681 p. DOI: 10.6028/NIST.SP.960-16e3
- [6] Супрун В.И., Левченко Я.В., Колотовкин А.С., Ворошилин К.С. Влияние масштабного фактора на прочность горных пород. *Горный информационно-аналитический бюллетень*, 2023, № 10, с. 5–19.
- [7] Shutov A.V., Klyuchantsev V.S. Integral-based non-local approach to ductile damage and mixed-mode fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 2023, vol. 292, no. 109656, pp. 1–22. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2023.109656
- [8] Li J., Leguillon D., Martin E., Zhang X. Numerical implementation of the coupled criterion for damaged materials. *International Journal of Solids and Structures*, 2019, vol. 165, pp. 93–103. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2019.01.025
- [9] Han G., Cai L., Bao C., Liang B., Lyu Y., Huang M., Liu X. Novel Ring Compression Test Method to Determine the Stress-Strain Relations and Mechanical Properties of Metallic Materials. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2021, vol. 34, no. 109, pp. 1–12. DOI: 10.1186/s10033-021-00622-y
- [10] Леган М.А. О взаимосвязи градиентных критериев локальной прочности в зоне концентрации напряжений с линейной механикой разрушения. *ПМТФ*, 1993, т. 34, № 4, с. 146–154.
- [11] Леган М.А. Определение разрушающей нагрузки, места и направления разрыва с помощью градиентного подхода. *ПМТФ*, 1994, т. 35, № 5, с. 117–124.
- [12] Нейбер Г. *Концентрация напряжений*. Пер. с нем. Москва, Ленинград, Гос. изд-во техн. лит-ры, 1947, 204 с.
- [13] Новожилов В.В. К основам теории равновесных трещин. *ПММ*, 1969, т. 33, вып. 5, с. 797–812.
- [14] Whitney J.M., Nuismer R.J. Stress fracture criteria for laminated composites containing stress concentrations. *J. Compos. Mater.*, 1974, vol. 8, no. 3, pp. 253–265.
- [15] Leguillon D. Strength or toughness? A criterion for crack onset at a notch. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 2002, vol. 21, no. 1, p. 61–72. DOI: 10.1016/S0997-7538(01)01184-6
- [16] Yarema S.Ya. Stress state of disks with crack, recommended as specimens for investigating the resistance of materials to crack development. *Soviet materials science*, 1977, vol. 12, pp. 361–374. DOI: 10.1007/BF00716287
- [17] Тимошенко С.П., Гудьер Д. *Теория упругости*. Пер. с англ. 2-е изд. Москва, Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1979, 560 с.

Статья поступила в редакцию 28.05.2026

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Мосиенко Д.С., Леган М.А. Применение нелокальных критериев разрушения к образцам с регулярным концентратором напряжения. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2026, вып. 9. EDN BXSTBF

Мосиенко Дмитрий Сергеевич — аспирант, младший научный сотрудник Института гидродинамики имени М.А. Лаврентьева (ИГиЛ СО РАН). Область научных интересов: механика разрушения, прочностные испытания, вращающиеся конструкции, фрактальная геометрия. e-mail: mosienko.d.s@hydro.nsc.ru

Леган Михаил Антонович — д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник Института гидродинамики имени М.А. Лаврентьева (ИГиЛ СО РАН). Область научных интересов: прочность, нелокальные критерии разрушения, испытания материалов, концентрация напряжений. e-mail: leganma@yandex.ru

Application of Non-Local Failure Criteria to Specimens with Regular Stress Concentrators

© D.S. Mosienko, M.A. Legan

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090, Russian Federation

An experimental program was conducted to study the mechanical characteristics of the brittle material gypsum G5. Based on the results of a series of tests, the tensile and compressive strength limits, the modulus of elasticity and the critical value of the stress intensity factor were obtained. The influence of a regular stress concentrator on the strength of specimens tested according to the modified Brazilian test was investigated. All specimens failed due to the formation of a normal tensile crack propagating along the diametrical line along which the load was applied, from the hole to the outer surface of the disk. Increasing the hole size reduces the load required to fracture the specimens, demonstrating a scale effect. Calculations of critical load were carried out using non-local failure criteria. The calculation results are qualitatively and quantitatively consistent with the experimental data. The average deviation of the calculations from the experimental data was 4.25%. The potential for developing three-parameter failure criteria for systems with regular stress concentrators subject to the scale effect is demonstrated.

Keywords: non-uniform stress state, normal tensile crack, modified Brazilian test, failure criterion

REFERENCES

- [1] Chevrychkina A.A., Gruzdkov A.A., Petrov Yu.V. Application of non-local criteria for destruction in problems with a nonuniform stress field. *Fizika tverdogo tela — Physics of the Solid State*, 2017, vol. 59, no. 8, pp. 1570–1575.
- [2] Kurguzov V., Kuznetsov D. Fracture analysis of Brazilian circular hole disk under mixed mode loading. *Engineering Fracture Mechanics*, 2024, vol. 297, art. no. 109875, pp. 1–15. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2024.109875
- [3] Vullo V. *Circular Cylinders and Pressure Vessels*. Springer Series in Solid and Structural Mechanics. Springer, 2014, vol. 3, 388 p.
- [4] Suknev S.V. Primenenie metodov teorii kriticheskikh rasstoyaniy dlya otsenki razrusheniya kvazikhрупkikh materialov s vyrezami [Application of Methods of the Theory of Critical Distances to Estimate the Fracture of Quasi-Brittle Materials with Notches]. *Mekhanika tverdogo tela — Mechanics of Solids*, 2023, vol. 58, no. 1, pp. 129–141.
- [5] Quinn G.D. *Fractography of Ceramics and Glasses*. National Institute of Standards and Technology, 2020, 681 p. DOI: 10.6028/NIST.SP.960-16e3
- [6] Suprun V.I., Levchenko Ya.V., Kolotovkin A.S., Voroshilin K.S. Vliyanie masshtabnogo faktora na prochnost' gornykh porod [Influence of the scale factor on the strength of rocks]. *Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten' — Mining Informational and Analytical Bulletin*, 2023, no. 10, pp. 5–19. DOI: 10.25018/0236_1493_2023_10_0_5
- [7] Shutov A.V., Klyuchantsev V.S. Integral-based non-local approach to ductile damage and mixed-mode fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 2023, vol. 292, art. no. 109656, pp. 1–22. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2023.109656
- [8] Li J., Leguillon D., Martin E., Zhang X. Numerical implementation of the coupled criterion for damaged materials. *International Journal of Solids and Structures*, 2019, vol. 165, pp. 93–103. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2019.01.025

- [9] Han G., Cai L., Bao C., Liang B., Lyu Y., Huang M., Liu X. Novel ring compression test method to determine the stress-strain relations and mechanical properties of metallic materials. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2021, vol. 34, no. 109, pp. 1–12. DOI: 10.1186/s10033-021-00622-y
- [10] Legan M.A. O vzaimosvyazi gradientnykh kriteriev lokalnoy prochnosti v zone kontsentratsii napryazheniy s lineynoy mekhanikoy razrusheniya [On the relationship between gradient criteria of local strength in the stress concentration zone and linear fracture mechanics]. *PMTF — Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1993, vol. 34, no. 4, pp. 146–154.
- [11] Legan M.A. Opredelenie razrushayushey nagruzki, mesta i napravleniya razryva s pomosh'yu gradientnogo podkhoda [Determination of the fracture load, location and direction of fracture using the gradient approach]. *PMTF — Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1994, vol. 35, no. 5, pp. 117–124.
- [12] Neuber G. *Kerbspannungslehre. Grundlagen für genaue Spannungsrechnung*. Berlin, Springer, 1937. [In Russ.: Neuber G. Kontsentratsiya napryazheniy. Moscow, Leningrad, Gosudarstvennoe izdatelstvo tekhnicheskoy literatury, 1947, 204 p.].
- [13] Novozhilov V.V. K osnovam teorii ravnovesnykh treshchin [On the foundations of the theory of equilibrium cracks]. *PMM — Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1969, vol. 33, no. 5, pp. 797–812.
- [14] Whitney J.M., Nuismer R.J. Stress fracture criteria for laminated composites containing stress concentrations. *J. Compos. Mater.*, 1974, vol. 8, no. 3, pp. 253–265.
- [15] Leguillon D. Strength or toughness? A criterion for crack onset at a notch. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 2002, vol. 21, no. 1, pp. 61–72. DOI: 10.1016/S0997-7538(01)00184-6
- [16] Yarema S.Ya. Stress state of disks with crack, recommended as specimens for investigating the resistance of materials to crack development. *Soviet Materials Science*, 1977, vol. 12, pp. 361–374. DOI: 10.1007/BF00716287
- [17] Timoshenko S.P., Goodier J.N. *Theory of Elasticity*. New York, McGraw-Hill, 1951. [In Russ.: Timoshenko S.P., Gudier D. Teoriya uprugosti. 2nd ed. Moscow, Nauka Publ., Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, 1979, 560 p.].

Mosienko D.S., PhD student, junior researcher at the Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences. Research interests: fracture mechanics, strength testing, rotating structures, fractal geometry.
e-mail: mosienko.d.s@hydro.nsc.ru

Legan M.A., Dr. Sc., leading researcher at the Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences. Research interests: strength, nonlocal fracture criteria, materials testing, stress concentration.
e-mail: leganma@yandex.ru