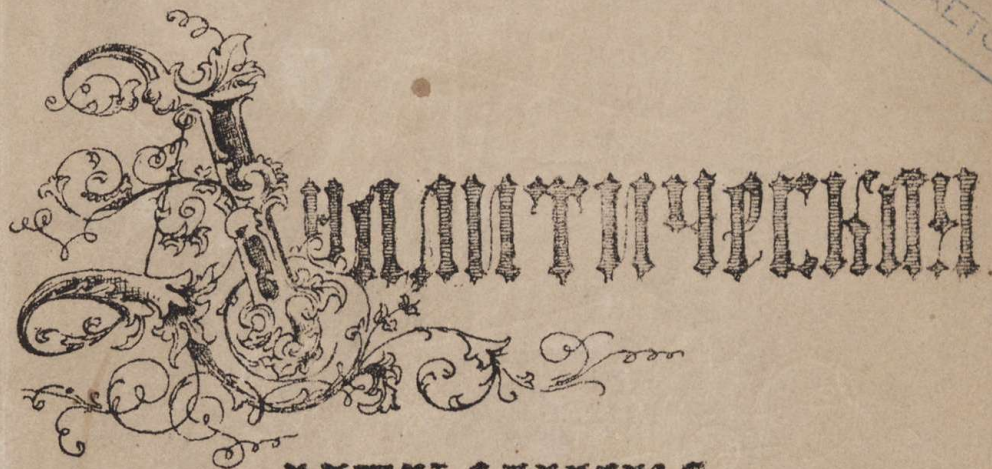
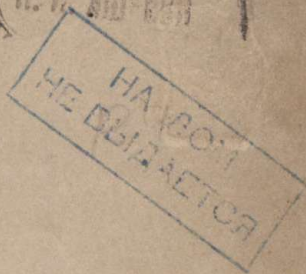


Р 145534

Р 2044283



МЕХАНИКА

1888/89

Лекция проф. А. Е. Фуконского.

1888²

145534

Кинематика точки.

Для определения движения точки выражают три координаты ее в функции времени. Обыкновенно в механике пользуясь для этого Декартовыми прямоугольными координатами. Называя их через x, y, z , определяли движение точки тремя уравнениями: —

$$x=f(t); \quad y=g(t); \quad z=\varphi(t)$$

Когда уравнения движения даны, то можно определить путь, по которому движется точка, т. е. ее траекторию. Для этого поступаем следующим образом: исключая из (1) и (2), (1) и (3) ур-ия t , получим два ур-ия:

$$f(x, y) = 0 \dots (1) \quad \text{и} \quad f(x, z) = 0 \dots (2)$$

Эти 2 ур-ия определяют некоторую кривую в пространстве, которая и есть траектория.

Если дана траектория, то движение точки вполне определяется, отделив ур-ие, выражающее какую нибудь ее координату в функции времени. Вместо координаты иногда определяют движение точки длиной дуги $OA=S$, отсчитываемой от постоянной точки O — начала дуги. Движение в этом случае определяется ур-ием

$$S=f(t)$$

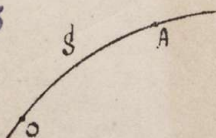
Иногда вместо прямоугольных координат употребляются по

Аналитическая механика

Лист № 1^о у
И. Н. Э. БАУМАНА
БИБЛИОТЕКА

145534
P

Провер. 1935



лярная. В этих случаях радиус-вектор, широта и долгота выражаются в функции времени

$$r = f(t); \varphi = f_1(t) \text{ и } \theta = f_2(t)$$

Равномерное движение Самое простое движение есть равномерное, при котором отношение пройденного пространства ко времени есть величина постоянная. Называя через S_0 расстояние по траектории от начала счета до начала движения и через S то же расстояние по прошествии времени t , получим:

$$\frac{S - S_0}{t} = v \dots \dots (1)$$

Постоянная величина v называется скоростью равномерного движения и очевидно есть пространство, пройденное за 1 сек. так как полагая $t=1$, получим

$$S - S_0 = v$$

Скорость может быть положительна, когда $S > S_0$, т.е. когда точка движется в ту сторону траектории, в какую считаем ее положительной, и отрицательна, если $S < S_0$, т.е. когда направление скорости противоположно принятому нами направлению траектории.

Из формулы (1) имеем:

$$S = S_0 + vt \dots \dots (2)$$

Неравномерное движение Перейдем теперь к определению скорости в неравномерном движении. Пусть имеем упр-ое движение

$$S = f(t)$$

Остановимся на каком-нибудь моменте времени t и кажем, отсюда будем рассматривать движение в продолжение

время малого промежутка времени. Пусть от момента времени t прошло безконечно малое время τ , пройденный путь найдем, вставив в последнюю формулу вместо t $(t+\tau)$, получим:

$$S = f(t+\tau)$$

Разложим вторую часть этого равенства в строку Тейлора по степеням приращения τ , получим,

$$S = f(t) + f'(t)\tau + f''(t)\frac{\tau^2}{2} + \dots$$

Путем τ безконечно малым, ограничиваясь ^{сигн} безконечно малыми членами 1^{го} порядка и отбросив члены 2^{го} и выше ^{порядка}, получим:-

$$S = f(t) + f'(t)\tau \dots \dots \dots (3)$$

Сравнивая ур-е (3) со (2), замечая, что t на τ

$$S = S_0 + v\tau$$

Сравнение формул показывает, что начиная от момента времени t , в продолжение весьма малого промежутка материальная точка движется равномерно с движением, причем

$$S_0 = f(t), \text{ а } v = f'(t).$$

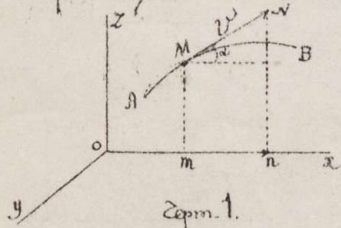
S_0 есть расстояние точки от начала осей в момент времени τ , которое, очевидно, есть функция t . Что же касается до 2^{ой} формулы, то она показывает, что начиная от момента времени t , в продолжение безконечно малого промежутка данная точка движется равномерно со скоростью равной 1^{ой} производной от пространства по времени, и так скорость во всяком движении выражается формулой

$$v = f'(t) = \frac{ds}{dt} \dots \dots \dots (4)$$

Вопрос об определении скорости сводится, таким образом, к составлению 1^й производной от функции, выражающей пройденное пространство по времени. Кроме величины скорости, в случае криволинейного движения обращают еще внимание на направление ее; скорость имеет направление касательной к траектории в данной точке. Скорость представляется графически отложением на той касательной величине скорости в ту сторону, куда совершается движение.

Докажем теорему.

Проекция скорости на какуюнибудь ось равна скорости проекции точки по этой оси.



Зам. 1.

Нужно доказать, что скорость точки m равна mn (Зам. 1.) Назовем скорость точки m через V_x , так как точка m движется по оси x , то по формуле (4)

имеем:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = f'(t)$$

Будем рассуждать так, как сложную функцию времени, предполагая, что x зависит от угла ϑ , который в свою очередь зависит от времени t и возьмем производную по времени: -

$$V_x = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \frac{dx}{ds}$$

Но в приложении анализа к геометрии было доказано, что $\frac{dx}{ds} = \cos \alpha$ - угла, который касательная образует с осью x . Называя этот угол через α , будем иметь: -

$$\underline{V_x = V \cos \alpha} \dots (5)$$

Пользуясь формулой (5), которую можно считать записанной для каждой из осей координат, можно по уравнениям движения определить величину и направление скорости. Пусть дано:

$$x = f(t); \quad y = \varphi(t) \quad \text{и} \quad z = \psi(t)$$

Тогда $V_x = f'(t); \quad V_y = \varphi'(t) \quad \text{и} \quad V_z = \psi'(t)$

Потому пишем для формулы (5)

$$V \cos \alpha = f'(t)$$

$$V \cos \beta = \varphi'(t)$$

$$V \cos \gamma = \psi'(t)$$

Откуда, возведя в квадраты, сложив и извлекая корень получим:

$$V = \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{\varphi'(t)\}^2 + \{\psi'(t)\}^2} \dots (6)$$

Этот перефразированный закон +, направление же скорости определяется знаками α, β, γ , которые будут даны формулами.

$$\cos \alpha = \frac{f'(t)}{V}; \quad \cos \beta = \frac{\varphi'(t)}{V}; \quad \cos \gamma = \frac{\psi'(t)}{V}$$

Формулу (6) можно прямо выводить из формулы (4), если воспользуемся формулой, выражающей сумму элементов дуги:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

тогда:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

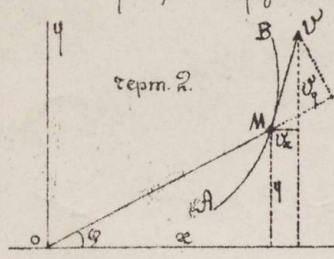
Подставив сюда:

$$\frac{dx}{dt} = f'(t); \quad \frac{dy}{dt} = \varphi'(t) \quad \text{и} \quad \frac{dz}{dt} = \psi'(t)$$

получим формулу (6).

Определение
величины и на-
правления ско-
рости по ур-ам
движения

Рассмотрим теперь, как выражается скорость движения точки в полярных координатах. (черт. 2).



Пусть O — полюс, OM — полярная ось. Точка M движется по траектории AB со скоростью V . Проведем радиус-вектор из точки M . Из чертежа видно, что $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Взяв производ-

ные от обеих частей обеих равенств по t , получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dr}{dt} \cos \varphi - r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dr}{dt} \sin \varphi + r \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} \end{aligned} \right\} \dots (a)$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{dx}{dt}; \quad V_y = \frac{dy}{dt} \quad \text{и} \quad V^2 = V_x^2 + V_y^2 = \\ &= \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \end{aligned}$$

и, подставляя из формулы (a) получим:

$$V^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \{ \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \} + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \{ \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \}$$

отсюда:

$$V = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}$$

Рассмотрим частные случаи:

1). Когда радиус-вектор неподвижен (r постоянно).

Тогда $\frac{dr}{dt} = 0$ и

$$V = r \frac{d\varphi}{dt}$$

Эта величина называется скоростью изменения радиус-вектора.

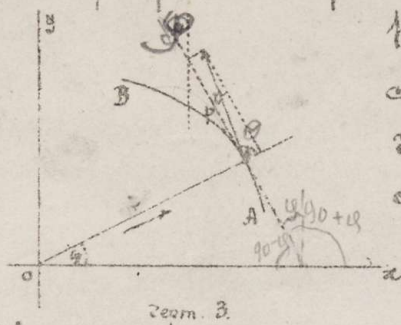
2) Когда радиус-вектор не изменяется (r — постоянно).

Тогда $\frac{dr}{dt} = 0$ и

$$V = r \frac{d\varphi}{dt}$$

Эта величина называется угловой скоростью.

Теорема. Проекция скорости точки на ее радиус-вектор равна скорости изгибания радиус-вектора.



Называя угол между направлением скорости V и радиус-вектором r углом Θ (Зем. 3) и проецируя скорость V на направление радиус-вектора, мы можем написать:

$$\text{Pr}_r V = V \cos(\psi, \varphi) = V \cos \Theta$$

На основании теоремы: косинус угла между двумя линиями равен сумме произведений косинусов углов, которые эти линии образуют с осью координат, имеем:

$$\cos \Theta = \cos(\psi, x) \cos(\varphi, x) + \cos(\psi, y) \cos(\varphi, y) = \frac{dx}{dt} \cos \psi + \frac{dy}{dt} \sin \psi$$

или, наоборот:

$$\text{Pr}_r V = V \left\{ \frac{dx}{dt} \cos \psi + \frac{dy}{dt} \sin \psi \right\} = \frac{dx}{dt} \cos \psi + \frac{dy}{dt} \sin \psi.$$

Подставив вместо $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ величины из уже предыдущего параграфа:

$$\begin{aligned} \text{Pr}_r V &= \frac{dz}{dt} \cos^2 \psi - z \sin \psi \cos \psi \frac{d\psi}{dt} + \frac{dz}{dt} \sin^2 \psi + z \cos \psi \sin \psi \frac{d\psi}{dt} = \\ &= \frac{dz}{dt} (\cos^2 \psi + \sin^2 \psi) = \frac{dz}{dt} \dots \dots (I) \end{aligned}$$

это и требовалось доказать

Найдем еще проекцию скорости на перпендикуляр ρ (Зем. 3) к радиус-вектору.

Она будет:

$$\text{Pr}_\rho (V) = V \cos(\psi, \rho) = V (\cos(\psi, x) \cos(\rho, x) + \cos(\psi, y) \cos(\rho, y)) =$$

Анализическая механика

Лист № 2

$$= v \left[\frac{dz}{dt} \cdot (-\sin \varphi) + \frac{dy}{dt} \cos \varphi \right] = -\frac{dz}{dt} \sin \varphi \cos \varphi + z \sin^2 \varphi \frac{d\varphi}{dt} + \\ + \frac{dz}{dt} \cos \varphi \sin \varphi + z \cos^2 \varphi \frac{d\varphi}{dt} = z \frac{d\varphi}{dt} \dots (I)$$

Если возведем в квадрат выражения (I) и (II) и сложим, то получим прежнее выражение полной скорости, т.е.

$$v = \sqrt{\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + z^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}$$

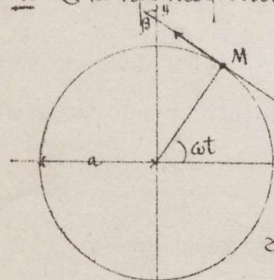
а если возьмем отношение, то получим тангенс угла между направлением скорости и радиусом вектора, т.е.

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{z \frac{d\varphi}{dt}}{\frac{dz}{dt}}$$

Примеры.

1. (Пolarные координаты). Даны ур-ия движения

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \omega t \\ y &= a \sin \omega t \end{aligned} \right\} \dots (a)$$



Нужно найти величину и направление скорости.

Зерт. 4. Величина скорости находится по

формуле —

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.$$

Дифференцируя данные равенства и подставляя, найдем:

$$v = \sqrt{\omega^2 a^2 \sin^2 \omega t + \omega^2 a^2 \cos^2 \omega t} = a\omega.$$

т.е. точка будет двигаться со постоянной скоростью.

Возведя в квадрат и сложив ур-ия (a) получим: —

$$x^2 + y^2 = a^2$$

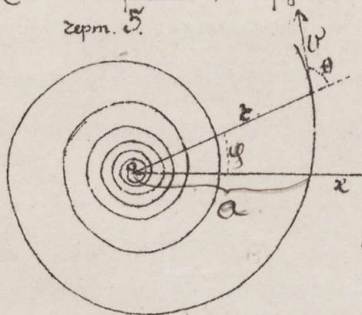
т.е. движение происходит по кругу радиуса 'a'. (Зерт. 4)

Возвращаясь через α и β углы с осями координат, имеем: —

$$\cos \alpha = \frac{dx}{a\omega} = -\sin \omega t.$$

$$\cos \beta = \frac{dy}{a\omega} = \cos \omega t.$$

2. (На ^{полярных} ~~координатах~~ координаты) Дано:
 зерт. 5.



$$r = ae^t$$

$$\phi = bt$$

Определить величину и направление скорости.

Определить траекторию, получив:

$$r = ae^{\frac{\phi}{b}}$$

Это есть логарифмическая спираль (зерт. 5)

$$\text{для } \phi = 0 \dots r = a$$

$$\text{" } \phi = -\infty \dots r = 0$$

Как выглядит изображение завитков около полюса O.

Скорость определить по формуле

$$v = \sqrt{\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + z^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2}$$

Находим: $\frac{dz}{dt} = ae^t = z$, $\frac{d\phi}{dt} = b$. Подставив, получим:

$$v = \sqrt{z^2 + b^2 z^2} = z \sqrt{1 + b^2}$$

т.е. скорость прямо пропорциональна радиус-вектору.

Определить угол θ :

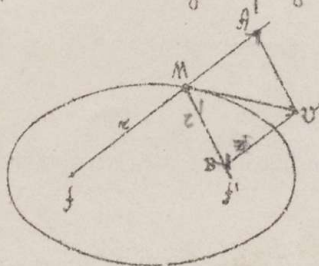
$$\operatorname{tg} \theta = \frac{e \frac{d\phi}{dt}}{\frac{dz}{dt}} = \frac{b \cdot ae^t}{ae^t} = b.$$

т.е. тангенс угла равен постоянной величине, а следовательно и угол будет постоянным

Теорема о проекции скорости на радиус-вектор дает способ проведения касательной (способ Робервалье)

Получившееся предположение провести касательную к эллипсу в точке M (зерт. 6). Пусть F и F_1 — фокусы. Провести.

для точки M два радиуса/ вектора z и z' . Положим точка/ движется по эллипсу и имеет/ некоторую скорость V . Проекция/ скорости/ на/ точку и фокус² радиу-
сы/ векторы/ будет: -



Зем. 6.

$$\text{Пр}_z V = \overline{MA},$$

$$\text{Пр}_{z'} V = -\overline{MB}$$

(направление движения от фокусов считается положительным)

На основании доказанной теоремы имеем:

$$\overline{MA} = \frac{dz}{dt};$$

$$-\overline{MB} = \frac{dz'}{dt};$$

По свойству эллипса имеем: $z + z' = 2a$; взав² про-
изводную по t получим: $\frac{dz}{dt} + \frac{dz'}{dt} = 0$, или: -
 $\frac{dz}{dt} = -\frac{dz'}{dt}$, т. е.: -

$$\overline{MA} = \overline{MB}$$

Отсюда правило: для проведения касательной к эллипсу в данной точке M , ее соединяют с фокусами и по направлению двух радиусов-векторов от точки M (в обратных сторонах) откладывают равные величины; если на этих линиях построим круги и в ка² из точки M проведем диагональ, то она и будет иско² касательной

Ускорение. Это² составит со² понятие об ускорении, рассмотрим сначала простое движение, которое называется

равномерно-переменным; во время движения отношение приращения скорости ко времени есть величина постоянная. Называя через V_0 скорость в начале времени и через V - скорость во время t , будем иметь:-

Равномерно-переменное движение

$$\frac{V - V_0}{t} = g \dots \dots (1)$$

Постоянная величина g называется тангенциальным ускорением рассматриваемого движения. Она выражает, следовательно, отношение приращения скорости ко времени, или приращения скорости в единицу времени, так как, полагая $t=1$, находим:-

$$V - V_0 = g.$$

Из формулы (1) имеем:-

$$V = V_0 + gt \dots \dots (2)$$

Это есть выражение скорости равномерно-переменного движения. Это же получим выражение для пройденного пространства, если подставим вместо V - $\frac{ds}{dt}$, так что:-

$$\frac{ds}{dt} = V_0 + gt$$

Умножив на dt и интегрируя получим:-

$$S = V_0 t + \frac{gt^2}{2} + C$$

Произвольное постоянное C определяется по начальным условиям точки. Если $t=0$; $S=S_0$, то найдем:-

$$S_0 = C$$

Следовательно:

$$S = S_0 + V_0 t + \frac{gt^2}{2} \dots (3)$$

Вся задача на равномерно-переменное движение решается

Тангенциальное
Ускорение
неравномерного
движения.

ются по формуле (3).

Из определения ускорения в равномерно переменном движении мы можем перейти к определению тангенциального ускорения во всяком движении. Замыслим, что в продолжении достаточно малого времени τ измѣненіе скорости можно рассматривать, какъ совершаемое по закону равномерно-переменнаго движения. Пусть законъ представляется: ..

$$s = f(t)$$

и скорость: -

$$v = f'(t)$$

Разсмотримъ измѣненіе скорости какинъ-то моментъ времени t въ продолженіи достаточно малого промежутка времени τ . Пусть время будетъ $t + \tau$, тогда

$$v = f'(t + \tau)$$

Разложимъ въ степенную рядъ:

$$v = f'(t) + f''(t)\tau + f'''(t)\frac{\tau^2}{2} + \dots$$

Ограничимся достаточно малыми слагаемыми 1^{го} порядка, получимъ: -

$$v = f'(t) + f''(t)\tau \dots \dots \dots (4)$$

Равняемъ формулу (4) со (2), подставимъ въ нее τ .

$$v = v_0 + g\tau$$

Мы видимъ, что эти формулы будутъ тождественны, если положимъ

$$v_0 = f'(t) \text{ и } g = f''(t)$$

И такъ въ моментъ времени t скорости есть $f'(t)$; вторая же формула показываетъ, что въ промежуткѣ времени τ

движение будет равномерно-переменное с ускорением $= f''(t)$; если закон пространства выразить формулой $S = f(t)$, то скорость будет:

$$v = f'(t) = \frac{ds}{dt}$$

а потому: -

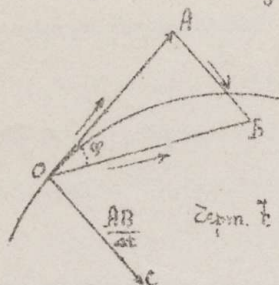
$$a = f''(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Таким образом тангенциальное ускорение во всяком движении выражается второй производной от пространства по времени или первой производной от скорости по времени.

Полное ускорение. Если движение прямолинейное, то найденное нами ускорение вполне характеризует изменение скорости во всякий данный момент времени, так как скорость изменяется только по величине, если же движение криволинейное, то кроме величины скорости изменяется и ее направление. Изменение величины и направления скорости во каждый момент времени характеризуется, линей, имеющей величину и направление и называемой полным ускорением. Это удобнее изобразить как получается, полное ускорение, скажем несколько слов о геометрических действиях. Всякая прямая линия, данная в пространстве по величине и направлению, называется вектором. Сложить 2 вектора значит положить третий вектор по правилу параллелограмма или треугольника. Таким образом геометрическая сумма векто-

ровы OA и AB будут векторы OB ; это пишется так:

$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} \quad (\text{срт. 7}).$$



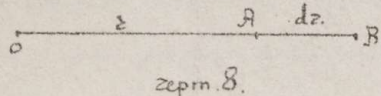
Но как правило сложения двух векторов точнее, как и сложение двух сил, то и правило сложения множеств векторов точнее, как и сложение мно-

жеств сил, т. е. составление геометрической суммы/множеств векторов производится по правилу разложения линейного вектора.

Составить геометрическую разность двух векторов, значит найти такой вектор, который будучи прибавлен к вычитаемому, дает уменьшаемое. Если из вектора OB (срт. 7) надо вычесть вектор OA , то для получения геометрической разности, стоит только соединить точки A и B и взять направление от A к B , ибо прибавляя OA к AB , получим OB ; это пишется так:—

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

Всё сказанное выше когда $\varphi = 0$, то геометрические функции приводятся к алгебраическим; тогда разность линий OA и OB будет разность их длин. Понятие о произведении, возникающее для величин, извлекаемых только по величине, может быть распространено и на векторы. Если направление некоторой линии z (срт. 8) изм-



так что z есть функция от t :—

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

то ее производная $\vec{r}'(t)$ получается так: -

$$\vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

Пусть во время t , $\vec{r}$ имеет длину OA , а во время $t + \Delta t$, $\vec{r}$ имеет длину OB тогда: -

$$\vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{OB - OA}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{AB}{\Delta t}$$

ющего

Мы видим отсюда, что производная вектора не изменяет своего направления. Получается, как $\lim$ хорды, соединяющей концы двух бесконечно близких векторов, разность на соответствующее бесконечно малое время.

Распространим это определение на случай вектора, изменяющегося и по величине и по направлению.

Пусть во время t вектор представляется линией OA , а во время $t + \Delta t$ линией OB (черт. 7). За время Δt он получает приращение AB . Проведем линию OC , параллельную AB и отложим на ней отношение $\frac{AB}{\Delta t}$.

$$OC = \frac{AB}{\Delta t}$$

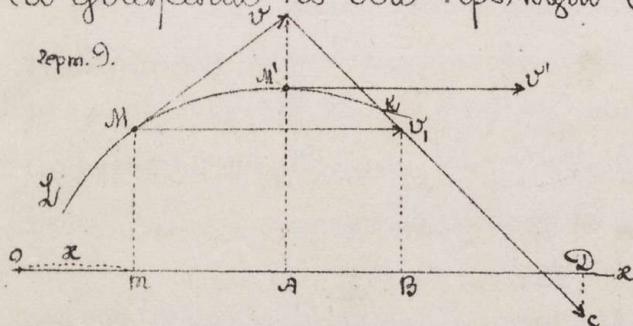
Потом перейдем к пределу, предполагая, что Δt стремится к 0, т.е. это точка B совпадает с A . В пределе линия OC представляет некоторый определенный вектор, который представляет закон изменения вектора по величине и направлению. Эта линия называется геометрической производной вектора.

Так как скорость, представляемая графически, есть прямая линия, изменяющаяся со временем, то ее

смыслу и направлению, то мы можем рассматривать ее как некоторый перемещающийся вектор и характеризовать ее изменением во всякий момент времени, посредством геометрической производной, построенной для этого момента. Таким образом понятием, вышеупомянутое называется полным ускорением. Полное ускорение есть, следовательно, геометрическая производная от скорости по времени.

Докажем относительно полного ускорения некоторые теоремы.

1^я теорема. Проекция полного ускорения на ось тангенциальную ускорению проекция точки в ее движении по оси проекций (ср. г.)



Пусть точка M движется по траектории LK ; проектируем ее на ось OX в точку m и замечаем, что при дви-

жении точки M по траектории точка m движется по оси OX . Пусть MV будет скорость точки в положении M , а $M'V'$ скорость в положении M' , в которое точка переходит во время Δt . Проводим через точку M линию MV , равно и параллельную $M'V'$, соединим точки V и V' , и откладываем на этой линии длину $V'V = j$, где j есть полное ускорение в точке M . Проектируем на ось OX точки

M, V, V', A и B в точки m, A, B и D . На основании теоремы, что отрезки двух линий между тремя параллельными плоскостями пропорциональны, находим:

$$VV': AB = VC: AD$$

или

$$\frac{VV'}{\Delta t} : \frac{AB}{\Delta t} = VC: AD$$

Перейдем к пределу, предполагая, что точка M' сближается с M и Δt обращается в 0, найдем:

$$\lim \frac{VV'}{\Delta t} = j.$$

Если упр-ие пространства будем $x = f(t)$ то

$$np_x V = f'(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$\begin{aligned} \text{Далее } \lim \frac{AB}{\Delta t} &= \lim \frac{mB - mA}{\Delta t} = \lim \frac{np V' - np V}{\Delta t} = \\ &= \lim \frac{(\frac{dx}{dt})' - (\frac{dx}{dt})}{\Delta t} = \frac{d^2x}{dt^2} = f''(t) \end{aligned}$$

Мы доказали, что $\frac{dx}{dt}$ значение производной от x в момент времени t , когда точка находится в M , $(\frac{dx}{dt})'$ означает производную от $\frac{dx}{dt}$ в момент времени $t + \Delta t$, когда точка находится в положении M' . Это означает, что VC , то эта динка все время есть j , т.е. находим

$$\lim AD = np j$$

Подставляя в пропорцию

$$j : \frac{d^2x}{dt^2} = j : np j$$

отсюда

$$np j = \frac{d^2x}{dt^2}$$

что и требовалось доказать.

Пользуясь теоремой о проекции полнота ускорения можно определить по ур-ию движения величину и направление полнота ускорения.

Определение
вект. и крив.
полного ускорения
по ур-ям
движения.

Пусть $x=f(t)$, $y=g(t)$, $z=\varphi(t)$ заданы ур-я движения
Возлагив полные ускорения через f , g и φ , которые оно
образуеть с осями координат через α , β и γ ; будем
иметь: -

$$f \cos \alpha = \frac{d^2 x}{dt^2} = f''(t)$$

$$g \cos \beta = \frac{d^2 y}{dt^2} = g''(t)$$

$$f \cos \gamma = \frac{d^2 z}{dt^2} = \varphi''(t)$$

Отсюда находим f и углы α , β и γ по формулам: -

$$f = \sqrt{[f''(t)]^2 + [g''(t)]^2 + [\varphi''(t)]^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right)^2}$$

и

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{f''(t)}{f} \\ \cos \beta = \frac{g''(t)}{f} \\ \cos \gamma = \frac{\varphi''(t)}{f} \end{cases}$$

f берется с +, а знаки $\cos$ берется по числителю

Теорема. Проекция полного ускорения на касательную = тангенциальному ускорению, а проекция полного ускорения на главную нормаль = квадрату скорости, разделенному на радиус кривизны.

Для доказательства теоремы преобразуем $\frac{d^2 x}{dt^2}$

Можем написать: -

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2 x}{dt^2} \right] &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{ds} v \right) = \\ &= \frac{dv}{dt} \frac{dx}{ds} + v \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{ds} \right) = \frac{dv}{dt} \frac{dx}{ds} + v \frac{d}{ds} \left(\frac{dx}{ds} \right) \frac{ds}{dt} = \\ &= \frac{dv}{dt} \frac{dx}{ds} + v^2 \frac{d^2 x}{ds^2} \end{aligned}$$

Назовем через α , β и γ углы, которые касательная образует с осями координат и через λ , μ и ν , углы, которые

образует главную нормаль траектории со осами координат
через ρ обозначим радиус кривизны.

Из приложенных анализа к геометрии были выведены формулы

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{\cos \beta}{\rho}$$

Подставляя эти формулы найдем:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \cos \alpha + \frac{v^2}{\rho} \cos \beta.$$

Подобным же образом для y и z получим:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \cos \beta + \frac{v^2}{\rho} \cos \gamma$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \cos \gamma + \frac{v^2}{\rho} \cos \delta.$$

Пусть θ будет угол, который касательная к кривой
образует с полным ускорением; тогда проекция пол-
ного ускорения на касательную, которую мы обозначим
через $J_t = j \cos \theta$.

Но полное ускорение образует с осами координат углы,
косинусы которых, как было доказано выражаются фор-
мулами:

$$\frac{d^2x}{dt^2} j; \frac{d^2y}{dt^2} j; \frac{d^2z}{dt^2} j$$

поэтому

$$\cos \theta = \cos \alpha \frac{d^2x}{dt^2} j + \cos \beta \frac{d^2y}{dt^2} j + \cos \gamma \frac{d^2z}{dt^2} j.$$

Выводя из этого

$$J_t = \cos \alpha \frac{d^2x}{dt^2} + \cos \beta \frac{d^2y}{dt^2} + \cos \gamma \frac{d^2z}{dt^2}$$

Подставляя сюда найденные величины вторых про-
изводных, получим:

$$j_t = \frac{dv}{dt} (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) + \frac{v^2}{\rho} (\cos \alpha \cos \beta + \cos \beta \cos \gamma + \cos \gamma \cos \alpha);$$

т.к. $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ и $\cos \alpha \cos \beta + \cos \beta \cos \gamma + \cos \gamma \cos \alpha = 0$

так как это последнее равенство выражает связь между главной нормалью и касательной, равную 90° .

Итак:-

$$j_t = \frac{dv}{dt}$$

Оставившись проекцию полного ускорения на главную нормаль. Назовем ее j_n угол между главной нормалью и полным ускорением, а j_n искомую проекцию; и имеем:-

$$\cos \varphi = \cos \beta \frac{dx}{dt} + \cos \gamma \frac{dy}{dt} + \cos \alpha \frac{dz}{dt}$$

Поэтому:-

$$j_n = j \cos \varphi = \cos \beta \frac{dx}{dt} + \cos \gamma \frac{dy}{dt} + \cos \alpha \frac{dz}{dt}$$

Представившись сюда величины вторых производных, получим:-

$$j_n = \frac{dv}{dt} (\cos \alpha \cos \beta + \cos \beta \cos \gamma + \cos \gamma \cos \alpha) + \frac{v^2}{\rho} (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$$

Поэтому

$$j_n = \frac{v^2}{\rho}$$

Это и требовалось доказать.

Теорема. Полное ускорение лежит в соприкасающейся плоскости.

Соприкасающаяся плоскость проходит, как известно, через касательную и главную нормаль. Если назовем ее a, b и c углы, которые перпендикуляр к соприкасающейся плоскости образует с осями координат, а

углы φ угла, который полное ускорение образует с осью перпендикулярной, то $\cos \varphi$ найдем так:-

$$\cos \varphi = \cos a \frac{d^2 x}{dt^2} + \cos b \frac{d^2 y}{dt^2} + \cos c \frac{d^2 z}{dt^2}$$

Подставляя наши величины вторых производных, получим:-

$$\cos \varphi = \frac{1}{g} \frac{dv^2}{dt} (\cos a \cos a + \cos b \cos b + \cos c \cos c) + \frac{1}{g} \frac{v^2}{g} (\cos a \cos a + \cos b \cos b + \cos c \cos c)$$

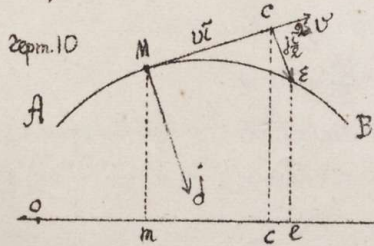
Для трехмерной в скобках $= 0$, ибо перпендикуляр к соприкасающейся плоскости нормален и к касательной, и к главной нормали. Значит:-

$$\cos \varphi = 0 \text{ и } \varphi = 90^\circ$$

Это и требовалось доказать.

Deviация *Deviation* (название это введено Дюамелем) есть безразмерно малая линия, которая образуется относительно dt , которая получается сложением образов:- (зерм. 10)

Пусть AB - траектория; движущаяся точка пусть находится в M , то для построения девиации надо провести касательную к траектории в точке M и отложить на ней в сторону движения длину



$MC = vt$, чтобы отложить точку E на траектории, в которую движущаяся точка приходит по прошествии безразмерно малого времени t . Безразмерно малая линия

се, взятая в направлении. Се и есть deviation
 Теорема. Deviation параллельна/полю, уско-
 рению и равна пути, пройденному равновер-
 ноускоренным движением с ускорением j
 во время T .

Проводим ось XO и проектируем на нее точки M, C
 и E , проекция deviation будет CE , так что

$$np_x D_{(deviation)} = CE = OE - OM - MC$$

Представим эту линию CE . Положим, что упр-е дви-
 жения относительно оси XO будет:

$$x = f(t)$$

Пусть положение m соответствующее времени t , а поло-
 жение E - времени $t+T$, тогда

$$OM = f(t) \text{ и } OE = f(t+T)$$

$$\text{и } MC = np MC = np v t = f'(t) T$$

Вставляя, получим:-

$$np_x D = f(t+T) - f(t) - f'(t) T$$

Разложим $f(t+T)$ в степенной ряд Тейлора, имеем:-

$$f(t+T) = f(t) + f'(t)T + f''(t)\frac{T^2}{2} + \dots$$

Игнорируя 3-ий элемент и вставляя в выражение

$np_x D$, получим:-

$$np_x D = \frac{f''(t)T^2}{2} = D \cos \lambda$$

точно также

$$np_y D = \frac{g''(t)T^2}{2} = D \cos \mu$$

$$np_z D = \frac{\varphi''(t)T^2}{2} = D \cos \nu.$$

По этим Σ проецируем определяем величину δ и соот-в. углы λ, μ и ν , которые направления δ образуют с осями координат.

$$\delta = \frac{\tau^2}{2} \sqrt{[f'(t)]^2 + [\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} \quad \text{или}$$

$$\delta = \frac{\tau^2}{2} \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2} = \frac{\tau^2}{2} \delta$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \cos \lambda = \frac{f''(t)}{\sqrt{[f'(t)]^2 + [\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}}$$

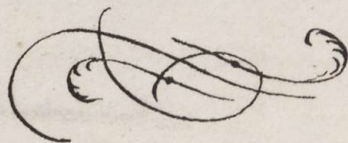
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\varphi''(t)}{\sqrt{[f'(t)]^2 + [\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\psi''(t)}{\sqrt{[f'(t)]^2 + [\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}}$$

Первая формула дает:—

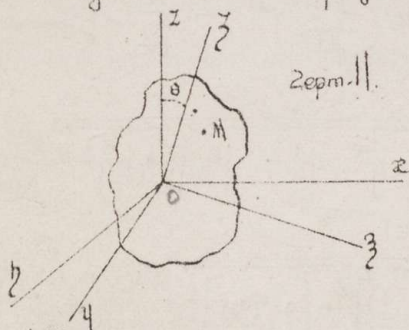
$$\delta = \frac{(\text{свт})^2}{2} \delta = \frac{\tau^2}{2} \delta$$

а при этом показывается, что λ, μ и ν суть т.е. углы, которые образуют полное ускорение с осями координат. Значит δ параллельна полному ускорению и представляет пройденный путь.



Кинематика системы.

Рассмотрим сначала движение кинематической системы около неподвижной точки; положение такой системы может быть определено следующими образом: Во-



образим неподвижные оси координат x, y, z , начало которых совпадает с неподвижной точкой (Сист. II.), и другие подвижные прямоугольные координаты ξ, η, ζ и взаимно углам начала.

Когда, зная положение осей ξ, η и ζ относительно x, y, z , мы будем знать положение тела в пространстве. Так как положение вторых осей относительно x, y, z вполне определяется тремя координатами, например тремя Дюлеровыми углами, то и положение тела в пространстве определяется тремя параметрами.

Положим, что оси координат ξ, η, ζ образуют с неподвижными осями координат углы, которые

	ξ	η	ζ
x	a	b	c
y	a'	b'	c'
z	a''	b''	c''

можно представить следующей таблицей. Для перехода от одних осей координат к другим будем использовать следующие формулы:

a, b, c суть $\cos$ углов

$$\left. \begin{aligned} x &= az + b\eta + c\zeta \\ y &= a'z + b'\eta + c'\zeta \\ z &= a''z + b''\eta + c''\zeta \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi &= ax + ay + az \\ \eta &= bx + by + bz \\ \zeta &= cx + cy + cz \end{aligned} \right\} \dots\dots (2)$$

Чтобы определить скорость точки относительно осей x, y, z , предполагая, что точка движется по подвижным координатам ξ, η, ζ надо взять от (1) формулы переложа производные, ~~производные~~ по времени. Координаты подвижные не изменяются; изменяются же только x, y, z . Когда будем брать производную, следует обратить внимание, что ξ, η, ζ суть величины постоянные. Все же изменение величин x, y, z происходит от изменения cos-улов $a, b, c \dots$. Максим образом получим:-

$$\frac{dx}{dt} = \frac{da}{dt} \xi + \frac{db}{dt} \eta + \frac{dc}{dt} \zeta$$

Подставив вместо ξ, η, ζ их величины из 2^{ой} формулы переложа, получим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{da}{dt} (ax + ay + az) + \frac{db}{dt} (bx + by + bz) + \frac{dc}{dt} (cx + cy + cz)$$

или

$$\frac{dx}{dt} = x \left(\frac{da}{dt} a + \frac{db}{dt} b + \frac{dc}{dt} c \right) + y \left(\frac{da}{dt} a' + \frac{db}{dt} b' + \frac{dc}{dt} c' \right) + z \left(\frac{da}{dt} a'' + \frac{db}{dt} b'' + \frac{dc}{dt} c'' \right)$$

Подобно этому найдем и для проекции скорости на оси y и z . При полученных проекциях $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ и $\frac{dz}{dt}$ будут зависеть от положения точки в моменты времени,

т.е. от $\xi, \eta, \zeta, \alpha, \beta, \gamma, \dots$ и от движения осей ξ, η и ζ , которое будет охарактеризовано девятью производными

$$\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \dots$$

Но положения осей ξ, η и ζ вполне определяются по трем параметрам, вследствие чего движение осей во данный момент времени, вполне характеризует производные ξ, η и ζ параметров по времени, т.е. вообще тремя величинами, мы же найдем формулу, в которую входят 9 производных $\cos$; естественно ожидать, что эти 9 производных $\cos$ легко могут быть заменены с помощью трех независимых параметров. Это получится, если обратим внимание на то в ур-ии, которое я связываю с $\cos$. Как известно, мы имеем между 9^ю $\cos$ связующие ур-ия. Во 1^ю из перпендикулярности осей ξ, η и ζ следует, что каждая из осей α, β, γ обладает свойством, что сумма квадратов этих $\cos = 1$.

$$\left. \begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1 \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1 \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \dots (a)$$

Если обратим внимание, что оси X и Y перпендикулярны, то можем написать

$$\left. \begin{aligned} a\alpha' + b\beta' + c\gamma' &= 0 \\ a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'' &= 0 \\ a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (b)$$

Дифференциал производной по времени от формулы (a)

будем: -

$$\left. \begin{aligned} a \frac{da}{dt} + b \frac{db}{dt} + c \frac{dc}{dt} &= 0 \\ a' \frac{da'}{dt} + b' \frac{db'}{dt} + c' \frac{dc'}{dt} &= 0 \\ a'' \frac{da''}{dt} + b'' \frac{db''}{dt} + c'' \frac{dc''}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)'$$

Теперь возьмем производные от формулы (6)

$$\left. \begin{aligned} a' \frac{da''}{dt} + b' \frac{db''}{dt} + c' \frac{dc''}{dt} &= - \left(\frac{da'}{dt} a'' + \frac{db'}{dt} b'' + \frac{dc'}{dt} c'' \right) = p. \\ a'' \frac{da}{dt} + b'' \frac{db}{dt} + c'' \frac{dc}{dt} &= - \left(a \frac{da''}{dt} + b \frac{db''}{dt} + c \frac{dc''}{dt} \right) = q. \\ a \frac{da'}{dt} + b \frac{db'}{dt} + c \frac{dc'}{dt} &= - \left(\frac{da}{dt} a' + \frac{db}{dt} b' + \frac{dc}{dt} c' \right) = z. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)'$$

Пользуясь формулами (1)' и (2)', в которых, пока не обращая внимания на p, q и z , мы можем выразить в производных сов толщину трех каких нибудь производных.

Замечаем это во всем формулы прожиги скорости, представив их во виде ^{ср-м} произведения трех сов. Удобно ввести три новых параметра p, q и z , значения которых указано в формулах (2)', потому что, при приращении этих параметров, мы из формулы (1)' и (2)' получим 9 ур-ий, из которых все производные сов можно выразить по p, q и z . Такое отношение можно произвести естественным образом; на основании первой формулы (1)' видим, что коэффициенты при $x=0$, коэффициенты при $y=-z$ (на основании 3^{ей} из формулы (2)'), наконец коэффициенты при $z=q$. Таким образом

Подобные образ.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= qx - zy \\ \frac{dy}{dt} &= zx - py \\ \frac{dz}{dt} &= py - qx \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3).$$

При этом формула для $\frac{dy}{dt}$ получится из формулы $\frac{dx}{dt}$ переписав круговую перестановку. И так мы нашли, что проекции скорости точки, движущейся в данный момент координаты x, y, z выражаются формулой (3)

Эти формулы называются формулами Дйлера, который первый выразил аналитически проекции скорости тела вращающихся около неподвижной точки. Из формулы Дйлера делаем несколько заключений.

1) Теорема ДАламбера. Все движение тела, движущегося около неподвижной точки, приводится в каждый момент времени к вращению около некоторой мгновенной оси, проходящей через неподвижную точку.

Мгновенной осью вращения называется та прямая, точки которой в данный момент времени не имеют скорости. Это можно разбить на три полусистемы:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$$

Это дает три уравнения:

$$qx - zy = 0$$

$$zx - py = 0$$

$$py - qx = 0$$

Эти уравнения удовлетворяются при

$$x = y = z = 0.$$

Следовательно ось вращения проходит через начало координат.

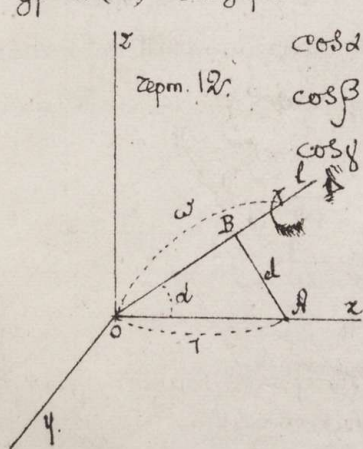
Кроме этой точки существует еще множество других

неподвижных в данный момент времени. Это следует из того, что три постоянных ур-ия находятся в зависимости между собою и третье ур-ие есть следствие 2-х первых. Все эти 3 ур-ия заключаются в следующие два:-

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{z} \dots \dots (1)$$

Ур-ие (1) представляет некоторую прямую, проходящую через начало координат, поэтому все ее точки будут неподвижны; она и будет мгновенною осью вращения для рассматриваемого момента. Определим теперь угловую скорость найденного вращения. Для этого назовем через α, β и γ углы, которые образует мгновенная ось вращения с осями координат. и заметим, что из ур-ия (1) следует:-

Определение
угловой
скорости



$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + z^2}} \\ \cos \beta &= \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + z^2}} \\ \cos \gamma &= \frac{z}{\sqrt{p^2 + q^2 + z^2}} \end{aligned}$$

α - мгновенная ось вращения (здесь 12).

Возьмем точку A на расстоянии единицы от начала координат O; опустим перпендикуляр на Oх, равный АВ=d. Заметим, что угловая скорость получится, разделив скорость V на d

$$\omega = \frac{V}{d}$$

Определим V и d. Мы имеем

$$V = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

Так как наша точка имеет координаты: $x=1, y=0$
и $z=0$, то по формулам Эйлера имеем:-

$$\frac{dx}{dt}=0, \quad \frac{dy}{dt}=z, \quad \frac{dz}{dt}=-q.$$

откуда:

$$V = \sqrt{z^2 + q^2}$$

Далее из треугольника AOB находим:-

$$d = l \cdot \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{p^2}{p^2 + q^2 + z^2}} = \sqrt{\frac{q^2 + z^2}{p^2 + q^2 + z^2}}$$

теперь составим ω .

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{q^2 + z^2} \cdot \sqrt{\frac{q^2 + z^2}{p^2 + q^2 + z^2}} = \\ &= \sqrt{p^2 + q^2 + z^2} \end{aligned}$$

Максимальное угловая скорость является здесь диагональю параллелепипеда, построенного на трех отрезках p, q, z , отложенных по осям x, y и z .

Покажем, что направление оси вращения O совпадает с направлением этой диагонали. Действительно мы имеем:

$$\cos \alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + z^2}} = \frac{p}{\omega}$$

$$\cos \beta = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + z^2}} = \frac{q}{\omega}$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{p^2 + q^2 + z^2}} = \frac{z}{\omega}$$

Кроме того из этих формул следует:-

$$p = \omega \cos \alpha, \quad q = \omega \cos \beta, \quad z = \omega \cos \gamma.$$

Ответ. наши параметры суть проекции на оси коор. угловой скорости, отложенной на мгновенной оси вращения. Если p, q, z положит., то движение происходит по спирали; при $q=z=0, p=\omega$ получим форм. Эйлера применив вращ.- $\frac{dx}{dt}=0; \quad \frac{dy}{dt}=-\omega x \quad \text{и} \quad \frac{dz}{dt}=\omega y.$

Определение скоростей точек свободной неизменяемой системы

Пусть оси координат x, y, z неподвижны, а оси ξ, η, ζ по сравнению неизменно соединены с телом. Здесь положение движущихся осей относительно неподвижных определяется 6^ю параметрами — тремя координатами α, β, γ начала подвижных координат, и тремя углами, дающими направления осей координат ξ, η, ζ ; поэтому скорости каждой точки тела можно характеризовать точки во свое время 6^ю параметрами, определяющими движение во данный момент времени. Напишем формулы перехода от одних осей координат к другим — эти формулы будут:

Мод-я свобод.

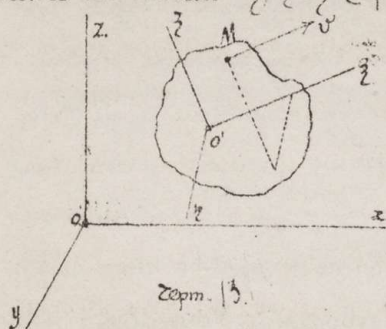
	ξ	η	ζ
x	a	b	c
y	a'	b'	c'
z	a''	b''	c''

$$\left. \begin{aligned} x &= \alpha + a\xi + b\eta + c\zeta \\ y &= \beta + a'\xi + b'\eta + c'\zeta \\ z &= \gamma + a''\xi + b''\eta + c''\zeta \end{aligned} \right\} \text{формулы перехода}$$

Формулы обратного перехода представляются так:

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha(x - \alpha) + a'(y - \beta) + a''(z - \gamma) \\ \eta &= b(x - \alpha) + b'(y - \beta) + b''(z - \gamma) \\ \zeta &= c(x - \alpha) + c'(y - \beta) + c''(z - \gamma) \end{aligned}$$

Для определения проекции скорости V на оси x, y, z берем производные по времени от первых формул перехода, зная, что $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c, \dots$ суть функции времени, а z, β, γ суть величины постоянные, так как точка M неизменно соединена с осью z , β и γ (ср. 13) получим: -



$$\frac{dx}{dt} = \frac{da}{dt} + z \frac{d\alpha}{dt} + \beta \frac{d\gamma}{dt} + \gamma \frac{d\epsilon}{dt}$$

Подставляя сюда z, β и γ из первых формул перехода, получим: -

$$\frac{dx}{dt} = \frac{da}{dt} + (a-\alpha)(a' \frac{d\alpha}{dt} + b' \frac{d\beta}{dt} + c' \frac{d\gamma}{dt}) + (y-b)(a' \frac{d\alpha}{dt} + b' \frac{d\beta}{dt} + c' \frac{d\gamma}{dt}) + (z-\gamma)(a' \frac{d\alpha}{dt} + b' \frac{d\beta}{dt} + c' \frac{d\gamma}{dt})$$

Еще, теперь предположим относительно q косинусов те формулы, которых дали выше, то найдем это: -

$$a \frac{da}{dt} + b \frac{db}{dt} + c \frac{dc}{dt} = 0$$

$$a' \frac{da}{dt} + b' \frac{db}{dt} + c' \frac{dc}{dt} = -z$$

$$a'' \frac{da}{dt} + b'' \frac{db}{dt} + c'' \frac{dc}{dt} = q$$

На основании этого получим, что: -

$$\frac{dx}{dt} = \frac{da}{dt} + q(z-\gamma) - z(y-\beta)$$

Подобным же образом найдем также аналогичные формулы

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\beta}{dt} + z(x-\alpha) - p(z-\gamma)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d\gamma}{dt} + p(y-\beta) - q(x-\alpha)$$

Это суть формулы, выражающие проекции скорости точки по неизменяемым осям координат. Формулы эти отличаются от формул Дйлера только тем, что в них прибавлены иные члены: -

$$\frac{da}{dt}, \frac{d\beta}{dt} \text{ и } \frac{d\gamma}{dt}$$

выражающие проекции скорости точки O' на оси x, y, z и кратя того, вместо x, y, z , стоящих в формулах Дйлера, здесь возьмем:

$$(x-d); (y-\beta); (z-\gamma)$$

Это же удобнее выставить на видге геометрические значения найденных формул, предполагая, что в рассматриваемый момент времени точка O совпадает с O' ; это значит, что для данного момента времени

$$\alpha = \beta = \gamma = 0$$

по отсюда не следует, что:

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0; \quad \frac{d\beta}{dt} = 0; \quad \frac{d\gamma}{dt} = 0$$

так как точка O' не остается неподвижной в точке O , а движется, проходя через нее в рассматриваемый момент.

При таком предположении получим, что:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} + qz - zy$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\beta}{dt} + zx - pz$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d\gamma}{dt} + py - qx$$

Возьмем два вектора $\vec{l}$ и $\vec{w}$ таких, которые геометрическая сумма $\vec{l} + \vec{w} = \vec{v}$, и тогда, спроектировав их на оси координат, получим, что:

$$\text{пр}_x \vec{l} = qz - zy \quad \text{пр}_x \vec{w} = \frac{dx}{dt}$$

$$\text{пр}_y \vec{l} = zx - pz \quad \text{пр}_y \vec{w} = \frac{dy}{dt}$$

$$\text{пр}_z \vec{l} = py - qx \quad \text{пр}_z \vec{w} = \frac{dz}{dt}$$

Величины: $qz - zy$, $zx - pz$ и $py - qx$ суть не что иное как тиз скорости, которые даются формулами Дйлера в предположении, что начало координат осей $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ неподвижно,

поэтому можно сказать, что проекции скорости $\vec{v}$ в различные моменты, являются каждая изъ двухъ проекцій: изъ проекции скорости начала координатъ O' и изъ проекции скорости, которая получила бы, если бы точка O' представляла неподвижную, а члены между осами x, y, z и ξ, η, ζ изменялись бы такъ, какъ они изменяются на самомъ дѣлѣ. Отсюда теорема.

Теорема. Скорость точки при движении свободнаго твердаго тѣла во всякій моментъ времени складается геометрически изъ скорости $\vec{v}$ начала подвижныхъ координатъ и скорости $\vec{v}'$ которую бы имѣла разсматриваемая точка при вращеніи около оси, проходящей черезъ O то начало.

Объ ускореніяхъ точекъ неизменяемой системы

Теорема Rival'a. Предположимъ, что неизменяемая система имѣетъ неподвижную точку и по прежнему вообразимъ въ этой точкѣ начало неподвижныхъ осей x, y, z и подвижныхъ ξ, η, ζ . При этомъ тѣло неизменяемо соединено съ подвижными осями. Для проекцій скорости точки тѣла на неподвижныя оси имѣютъ формулы Дюпэра:—

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v_x - \omega y \\ \frac{dy}{dt} &= v_y + \omega x \\ \frac{dz}{dt} &= v_z\end{aligned}$$

Тогда определить проекции полжого ускорения на оси x, y, z , берем от этих формул еще раз производные, по времени, замечая, что со временем изменяются, как p, q, r , так и x, y, z . Будем иметь —

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \{ qx - zy \} = z \frac{dq}{dt} - y \frac{dz}{dt} + q \frac{dx}{dt} - z \frac{dy}{dt}$$

или:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = n p_x j$$

Подставим сюда вместо $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ их величины из формул Эйлера, найдем:

$$n p_x j = \frac{d^2x}{dt^2} = z \frac{dq}{dt} - y \frac{dz}{dt} + q (py - qx) - z (rx - py)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = z \frac{dq}{dt} - y \frac{dz}{dt} + qpy - zpx - q^2x - z^2x. (\pm p^2x)$$

или:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = z \frac{dq}{dt} - y \frac{dz}{dt} + p(rx + qy + rz) - x(p^2 + q^2 + r^2)$$

Подобные же формулы найдем для второго производной y и z , так что все три формулы будут:

$$n p_x j = \frac{d^2x}{dt^2} = z \frac{dq}{dt} - y \frac{dz}{dt} + p(rx + qy + rz) - x \omega^2$$

$$n p_y j = \frac{d^2y}{dt^2} = x \frac{dz}{dt} - z \frac{dp}{dt} + q(rx + qy + rz) - y \omega^2$$

$$n p_z j = \frac{d^2z}{dt^2} = y \frac{dp}{dt} - x \frac{dq}{dt} + r(rx + qy + rz) - z \omega^2$$

так как $p^2 + q^2 + r^2 = \omega^2$. Это и есть формула Rival'a

Выведенные из канонических уравнений; для этого разобьем вторую часть каждого из формул на две, и обозначим через l — линию, проекции которой по осям выражаются так:

$$n p_x l = z \frac{dq}{dt} - y \frac{dz}{dt}$$

$$n p_y l = x \frac{dz}{dt} - z \frac{dp}{dt}$$

$$n p_z l = y \frac{dp}{dt} - x \frac{dq}{dt}$$

Далее назовем через q' — линию, проекции которой по осям

координаты сумми -

$$np_x q' = p(px + qy + z\dot{z}) - x\omega^2$$

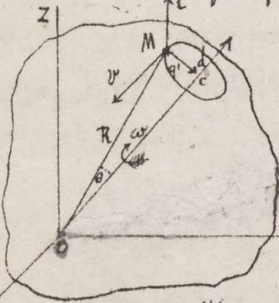
$$np_y q' = q(px + qy + z\dot{z}) - y\omega^2$$

$$np_z q' = z(px + qy + z\dot{z}) - z\omega^2$$

Тогда формула ускорения j будет сложиться геометрически из $\vec{l}$ и $\vec{q}'$, так что можно написать: -

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{q}'$$

Обратимся к указанию геометрического значения линий $\vec{l}$ и $\vec{q}'$, из которых по правилу параллелограмма сложится полное ускорение j . (черт. 14.)



Найдем q' . Так как q' есть диагональ параллелепипеда/стороны/ которого суть проекции q' на оси координат, то: -

$$q'^2 = [np_x q']^2 + [np_y q']^2 + [np_z q']^2$$

$$\text{или } q'^2 = \{p(px + qy + z\dot{z}) - \omega^2 x\}^2 +$$

$$+ \{q(px + qy + z\dot{z}) - \omega^2 y\}^2 + \{z(px + qy + z\dot{z}) - \omega^2 z\}^2 = (px + qy + z\dot{z})^2 \times$$

$$\times (p^2 + q^2 + z^2) + \omega^4 (x^2 + y^2 + z^2) - 2\omega^2 (px + qy + z\dot{z})(px + qy + z\dot{z}) =$$

$$= \omega^4 (x^2 + y^2 + z^2) - \omega^2 (px + qy + z\dot{z})^2 \text{ отсюда}$$

$$q'^2 = \omega^2 R^2 \left\{ 1 - \left(\frac{p}{\omega} \cdot \frac{x}{R} + \frac{q}{\omega} \cdot \frac{y}{R} + \frac{z}{\omega} \cdot \frac{z}{R} \right)^2 \right\}$$

Но

$$\left\{ \frac{p}{\omega} \cdot \frac{x}{R} + \frac{q}{\omega} \cdot \frac{y}{R} + \frac{z}{\omega} \cdot \frac{z}{R} \right\}^2 = \cos^2 \theta$$

(где R есть радиус радиусов радиусов точки от центра координат, а θ - угол между радиусом R и линией q'), потому что $\frac{p}{\omega}$ есть $\cos$ угла образованного ω с осью x , а $\frac{x}{R}$ - $\cos$ угла, образованного R с осью

α^{obz} . Можно также думать, что $\frac{q}{\omega}$ и $\frac{z}{\omega}$ суть $\cos^u$ углов, образующих ω с осями y^{obz} и z^{obz} , а $\frac{q}{R}$ и $\frac{z}{R}$ — суть $\cos^u$ углов, образующих R с осями y^{obz} и z^{obz} , следовательно: —

$$q'^2 = \omega^2 R^2 (1 - \cos^2 \Theta) = \omega^2 R^2 \sin^2 \Theta.$$

но так как $R^2 \sin^2 \Theta = d^2$, то и $q'^2 = \omega^2 d^2$, откуда

$$q' = \omega d = \frac{v d}{dt} = \frac{v^2}{d}$$

Эта формула показывает, что q' есть центростремительное ускорение, так как оно направлено по радиусу d и равно квадрату скорости, разделенной на радиус. Это есть то центростремительное ускорение, которое испытывает точка постоянно, если бы угловая скорость ω не меняла своего направления и своей величины. Линия q' , прибавляющаяся к ускорению точки M , происходит от перемещения ω .

Теперь определим $\cos$ угла между q' и ω ; назовем его через Θ — будем иметь: —

$$\cos \Theta = \frac{p x q'}{q' \omega} + \frac{p y q'}{q' \omega} + \frac{p z q'}{q' \omega} = \frac{1}{q' \omega} \{ (p^2 + q^2 + z^2)(p x + q y + z z) - \omega^2 (p x + q y + z z) \} = 0.$$

так как $p^2 + q^2 + z^2 = \omega^2$. Но если $\cos(q' \omega) = \cos \Theta = 0$, то следовательно сам угол $\Theta = 90^\circ$.

Определим, какой $\cos$ угла между q' и v , который обозначим через Φ , имеем: —

$$\cos \Phi = \frac{p x q'}{q' v} + \frac{p y q'}{q' v} + \frac{p z q'}{q' v} = \frac{1}{q' v} \{ (q x - z y) \{ p (p x + q y + z z) - \omega^2 \} + (z x - p z) \{ q (p x + q y + z z) - \omega^2 \} + (p y - q x) \{ z (p x + q y + z z) - \omega^2 \} \} = 0, \text{ а потому и угол } \Phi = 90^\circ$$

Таким образом получим, что углы между q' и $z = \psi$ и углы между q' и $z' = \psi$ — прямые. Это показывает, что линия q' перпендикулярна к мгновенной оси вращения и к направлению скорости точки, а потому, она направлена по радиусу. На чертеже видно, что линия q' , действительно лежит в плоскости движения точки M ; с другой стороны, будучи перпендикулярна к мгновенной оси вращения, линия q' должна идти по радиусу MC .

Разматривая формулы:

$$l_x = z \frac{dq}{dt} - y \frac{dz}{dt}$$

$$l_y = x \frac{dz}{dt} - z \frac{dx}{dt}$$

$$l_z = y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt}$$

замечаем, что эти формулы составлены подобно формулам Эйлера, только в них вместо p, q, r взято $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ и $\frac{dz}{dt}$. Отсюда заключаем, что линия l выражается по величине и направлению скоростью, которую бы получила точка, если сообщить телу мгновенное вращение, проекции которого на оси координат будут:

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \text{ и } \frac{dz}{dt}.$$

Из всего сказанного следует:

Теорема Риваля. Полное ускорение каждой точки тела, вращающегося около неподвижной точки, складывается геометрически из двух векторов, из которых первый представляет центростремительное ускоре-

ние, которое имела бы точка ~~тела~~, если бы она
не изгиблялась ни по величине, ни по направле-
нию, а второй вектор представляется ско-
ростью, которую получила бы рассматривае-
мая точка, если бы сообщить телу враще-
ние, проекции которого на оси координат суть:
 $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$ и $\frac{dz}{dt}$

Перейдем теперь к предположению, что неизменяемая си-
стема свободна.

Когда для определения полного ускорения тела надо взять
производные по времени от формул, выражающих проек-
ции скорости точки свободной системы. (терм. 15.)

Мы имеем, что:

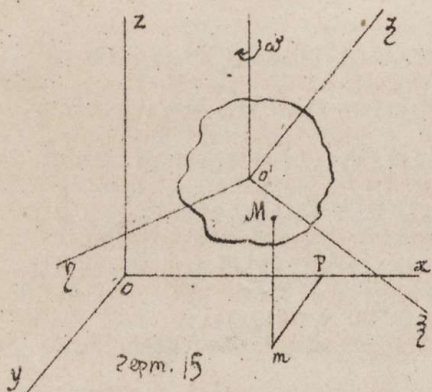
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{d\alpha}{dt} + q(z-\gamma') - z(\gamma-\beta) \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{d\beta}{dt} + z(\alpha-\alpha) - p(z-\gamma) \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{d\gamma}{dt} + p(\gamma-\beta) - q(\alpha-\alpha)\end{aligned}$$

Где α, β, γ суть координаты начала движущихся осей O'
Это можно написать еще так:-

$$\left. \begin{aligned}\frac{d(\alpha-\alpha)}{dt} &= q(z-\gamma') - z(\gamma-\beta) \\ \frac{d(\gamma-\beta)}{dt} &= z(\alpha-\alpha) - p(z-\gamma) \\ \frac{d(z-\gamma')}{dt} &= p(\gamma-\beta) - q(\alpha-\alpha)\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (K)$$

Теперь от этих формул взять производные по времени
и подставить во вторые части вместо получаемых про-
изводных:-

$$\frac{d(\alpha-\alpha)}{dt}, \frac{d(\gamma-\beta)}{dt}, \frac{d(z-\gamma')}{dt}$$



соответствующих величин из
формулы (K), эта операция та же
самая, которую мы производили
при выводе теоремы Pival'a.

Вся разница только въ томъ, что
вместо α, ψ, γ у насъ стоятъ
 $(\alpha - \alpha), (\psi - \beta)$ и $\gamma - \delta$. Поэтому у

Экономические формулы будут отличаться от формул Rival'a только этой запиской. Написать враздате мы не можем:-

$$\frac{d^2(x-\alpha)}{dt^2} = (z-\gamma) \frac{d\gamma}{dt} - (y-\beta) \frac{dz}{dt} + p(p(x-\alpha) + y(y-\beta) + z(z-\gamma)) - \omega^2(x-\alpha)$$

Чтобы дать геометрическое толкование полученным формулам, вообразим, что во разматриваемый момент времени, каганю подвижных осей координат проходит через каганю неподвижных, тогда

$$\alpha = \beta = \gamma = 0$$

и мы получили формулы:

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + \mathbf{z} \frac{d\mathbf{q}}{dt} - \mathbf{y} \frac{d\mathbf{z}}{dt} + \mathbf{p}(\mathbf{p}\mathbf{x} + \mathbf{q}\mathbf{y} + \mathbf{z}\mathbf{z}) - \omega^2 \mathbf{x}$$

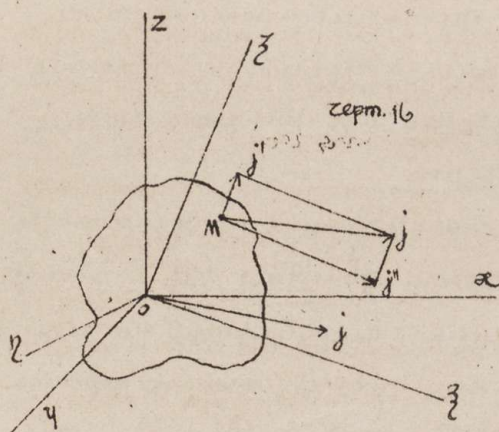
$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 \beta}{dt^2} + x \frac{dz}{dt} - z \frac{dx}{dt} + q(px + qy + rz) - \omega^2 y$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} + y \frac{dp}{dt} - x \frac{dq}{dt} + z(px + qy + rz) - \omega^2 z$$

Замечу, что эти формулы отличаются от формул Rival'a только прибавлением слагаемых:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}, \frac{d^2\beta}{dt^2}, \frac{d^2\gamma}{dt^2}$$

которые представляют проекции полного ускорения на
подвижную ось координат и на неподвижную ось.



И такъ приходится къ слѣдую-
щему закону: полное
ускореніе точки свобод-
ной неизмѣняемой сис-
темы, къ которой при-
соединены какъ нибудь
подвижныя оси ξ, η, ζ ,
слагается геометрически

изъ того полного ускоренія, которое получила бы
точка, если бы начало подвижныхъ осей считать
неподвижнымъ и измѣнять его направление
въ пространство такъ, какъ оно измѣняется
при движеніи тѣла, и изъ того полного уско-
ренія, которое имѣетъ начало вторыхъ осей
при движеніи тѣла.

О сложении движеній

Если оси координатъ, къ которымъ отнесено движеніе то-
чки, сами движутся въ пространствѣ, то движеніе точки от-
ноительно осей называется *относительнымъ*, а движе-
ніе точки въ пространствѣ называется *абсолютнымъ*.
Абсолютное движеніе слагается изъ относительнаго движенія
точки и движенія осей. Можно сказать, что движеніе
двухъ, если предположить, что оси, относительно которыхъ раз-
сматривается движеніе, сами движутся относительно вто-

рых осей точки подвижных; тогда абсолютное движение будет складаться из трех движений: из движения точки относительно первых осей, из движения первых осей и из движения вторых осей.

Представим скорость абсолютного движения по скорости движения относительно и скорости движения осей координат.

Предположим, что x, y, z будут неподвижные оси координат, а ξ, η, ζ подвижные; напишем формулы перехода:

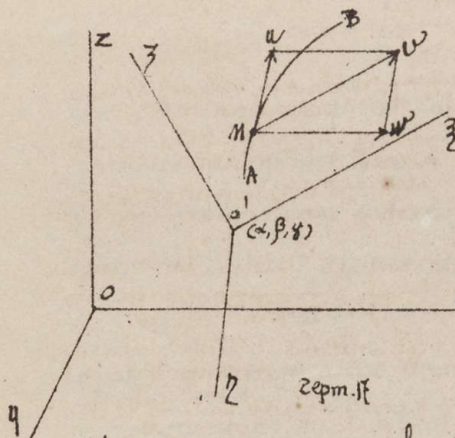
$$x = \alpha + a\xi + b\eta + c\zeta \text{ и т. д. } \dots (A)$$

Чтобы получить проекцию абсолютной скорости точки на ось x^{00} , возьмем отсюда формулы производную по времени, замечая, что со временем все величины, входящие во вторую часть изменяются. Изменяются $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c, \xi, \eta, \zeta$ потому что оси ξ, η, ζ движутся; изменяются ξ, η, ζ потому что материальная точка движется. Мы имеем:

$$\frac{dx}{dt} = \text{пр}_x v = \frac{d\alpha}{dt} + \frac{da}{dt}\xi + \frac{db}{dt}\eta + \frac{dc}{dt}\zeta + \frac{a d\xi}{dt} + \frac{b d\eta}{dt} + \frac{c d\zeta}{dt}$$

Оставим теперь проекции на ось x^{00} их скорости.

Назовем скорость U относительную скорость точки M ; она происходит только от переменных ξ, η, ζ . Если вообразим оси ξ, η, ζ неподвижными и заставим точку M двигаться по траектории AB так, как она движется на самом деле, то ее абсолютная скорость в этом случае представит скорость относительного движения т. е. U , поэтому $\text{пр}_x U = \frac{dx}{dt}$;



это знает беретая в том смысле, что при дифференцировании надо считать a, b, c и α, β, γ постоянными. Машины образуют

и найдём:-

$$\text{пр}_x u = \frac{a dz}{dt} + b \frac{dy}{dt} + c \frac{dx}{dt}$$

Предположим теперь, что точка

M задержана на своей траектории AB, а ось координат z, y, x , с которыми точка M в сферическом предположении соединена кинематически, движутся так, как они движутся на самом деле. Тогда точка M получит в пространстве некоторую скорость W , которая называется скоростью влечения. Эта скорость зависит только от изменений x, y, z, a, b, c . Как это можно написать:

$$\text{пр}_x W = \frac{\partial x}{\partial t}$$

это характеристика δ представляет дифференцирование в том смысле, что z, y, x постоянны

Найдём:-

$$\text{пр}_x W = \frac{dx}{dt} + \frac{da}{dt} z + \frac{db}{dt} y + \frac{dc}{dt} x$$

Равнявая теперь три найденных проекции скорости U, W и V видим, что проекция W на ось x есть скорость V :-

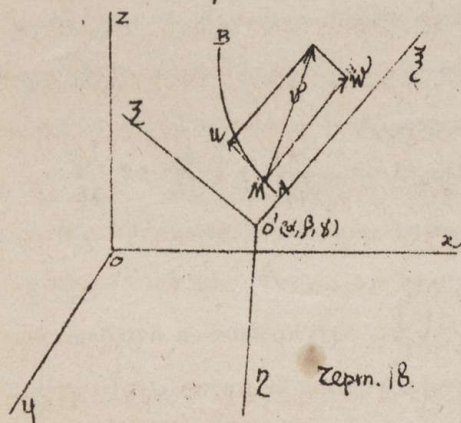
$$\text{пр}_x V = \text{пр}_x U + \text{пр}_x W$$

Можно также доказать, что:-

$$\text{пр}_y V = \text{пр}_y U + \text{пр}_y W$$

$$\text{пр}_z V = \text{пр}_z U + \text{пр}_z W$$

Но когда проекция некоторой линии во пространстве представляется суммой ^{проекции} нескольких линий, то сама линия



является геометрической суммой этих линий. И так

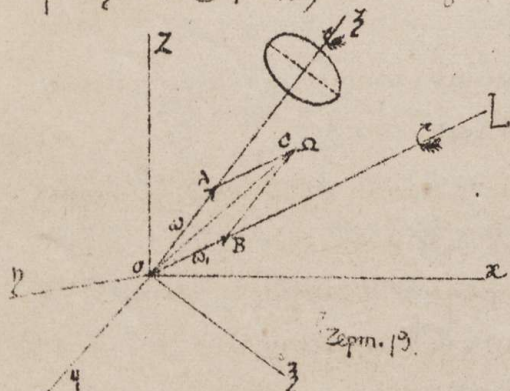
$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$$

Это и есть теорема о параллелограмме скоростей:

скорость сложного движения складывается геометрически из скорости

относительного движения и скорости влечения.

Рассмотрим одно приложение этой теоремы. Предположим, что некоторое тело касалось на ось $\vec{z}$ как на ось вращения (зерт. 19) и в данный момент времени вра-



щается около этой оси с угловою скоростью ω . Отложим эту скорость по оси $\vec{z}$ так, что $OA = \omega$ и тогда наглядно, глядящему из точки A в O, вращение казаться будет по часовой. Называя

через β, γ, z проекции ω , полученные таким образом на оси x, y, z . Получим далее, что сами оси $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, имея неподвижное начало в начале осей x, y, z , сами вращаются около этой точки, и пусть в данный момент

вращении мгновенной осью вращения является линия OL , а мгновенной угловой скоростью пусть будет ω . Откладывая $OL = \omega$, и называя p, q, z проекции ω на оси x, y, z .

Если считать оси z, y и z неподвижными и вращать тело около оси так как оно на самом деле вращается, то получим бы относительную скорость какой нибудь точки/рис-ла по следующим формулам Дйлера:

$$np_x u = qz - zy$$

$$np_y u = zx - rz$$

$$np_z u = ry - qx$$

С другой стороны, если бы мы хотели определить проекции на оси x, y, z скорости вращений, то дадим бы им бы остано-виться тело во его вращении относительно оси z , а осевые z, y и z сообщить вращение около оси OL с угловой скоростью ω ; мы получим бы по тем же же формулам Дйлера:

$$np_x w = qz - zy$$

$$np_y w = zx - rz$$

$$np_z w = ry - qx$$

По теореме о параллелограмме скоростей находим следующие проекции абсолютной скорости:

$$np_x v = np_x u + np_x w = (q+q)z - (z+z_1)y$$

$$np_y v = np_y u + np_y w = (z+z_1)x - (p+p_1)z$$

$$np_z v = np_z u + np_z w = (p+p_1)y - (q+q_1)x$$

Если теперь вообразим линию Ω , проекции которой на оси координат суть:-

$$\left. \begin{aligned} n\mathbf{p}_x - \Omega &= \mathbf{p} + \mathbf{p}_1 \\ n\mathbf{p}_y - \Omega &= \mathbf{q} + \mathbf{q}_1 \\ n\mathbf{p}_z - \Omega &= \mathbf{z} + \mathbf{z}_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots (к)$$

Если заметить, что найденный нами скорости абсолютного движения тела, являются скоростями вращательного движения, мгновенная ось которого направлена по Ω и угловая скорость которого $= \Omega$. Тогда формулирует (к) иначе —

$$\bar{\Omega} = \bar{\omega} + \bar{\omega}_1$$

поэтому Ω является диагональю параллелограмма, построенного на $\bar{\omega}$ и $\bar{\omega}_1$.

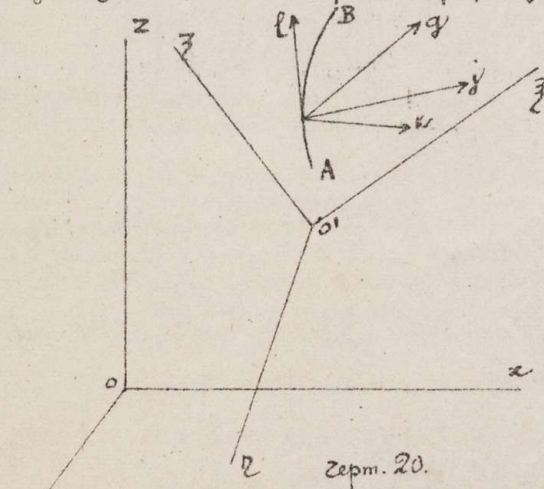
Это есть теорема о параллелограмме вращений. На нашем чертеже Ω представляется в виде OC . И так мы докажем, что от сложения двух вращательных движений около пересекающихся осей получается вращательное движение, мгновенная ось которого направлена по диагонали параллелограмма, построенного на угловых скоростях слагаемых вращений, а угловая скорость равна этой диагонали.

Об ускорении сложного движения.

Назовем через $\mathbf{j}$ вектор, представляющий полное ускорение сложного движения, через $\mathbf{q}$ назовем вектор, пред-

стабляющий полное ускорение во относительном движении или относительное ускорение и через $\vec{l}$ вектор, представляющий полное ускорение во движении влечения, то есть то полное ускорение, которое получила бы точка M , если бы мы соединили ее во данный момент времени во осами ξ, η, ζ и стали бы двигать ^{вместе} ~~во~~ этими осами так, как движутся на самом деле эти оси. $\vec{l}$ кратко называется ускорением влечения.

Чтобы составить проекции на оси x, y, z , ускорения $\vec{l}$ надо взять отсюда вторые формулы перехода, производимые по



времени, считая, что все количества $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c, \dots \xi, \eta, \zeta$ изменяются со временем. Будет произойти первая производная от вышеприведенной формулы: $\frac{d\vec{l}}{dt}$

Будем иметь: —

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{d^2\alpha}{dt^2}\xi + \frac{d^2\beta}{dt^2}\eta + \frac{d^2\gamma}{dt^2}\zeta + \frac{d\alpha}{dt}\frac{d\xi}{dt} + \frac{d\beta}{dt}\frac{d\eta}{dt} + \frac{d\gamma}{dt}\frac{d\zeta}{dt} \\ &+ \frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{d\alpha}{dt}\frac{d\xi}{dt} + \frac{d\beta}{dt}\frac{d\eta}{dt} + \frac{d\gamma}{dt}\frac{d\zeta}{dt} \end{aligned}$$

или: —

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= n\alpha\gamma = \left[\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{d^2\alpha}{dt^2}\xi + \frac{d^2\beta}{dt^2}\eta + \frac{d^2\gamma}{dt^2}\zeta \right] + \left[\alpha \frac{d^2\xi}{dt^2} + \beta \frac{d^2\eta}{dt^2} + \gamma \frac{d^2\zeta}{dt^2} \right] \\ &+ 2 \left[\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\xi}{dt} + \frac{d\beta}{dt}\frac{d\eta}{dt} + \frac{d\gamma}{dt}\frac{d\zeta}{dt} \right] \end{aligned}$$

Чтобы составить проекцию на ось x от $\vec{g}$, нужно взять

от формулы перехода (А) вторую производную, считая оси неподвижными, т.е. полагая $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c$ — постоянными.
Получим:—

$$n_{\alpha} g = a \frac{d^2 \xi}{dt^2} + b \frac{d^2 \eta}{dt^2} + c \frac{d^2 \zeta}{dt^2}$$

Наконец, чтобы определить проекции l на ось α , надо приравнять проекции M на ось ξ, η, ζ , т.е. считать во формулах (А) — ξ, η, ζ постоянными и во этих системах взять вторую производную, получим:—

$$n_{\alpha} l = \frac{d^2 b}{dt^2} + \xi \frac{d^2 a}{dt^2} + \eta \frac{d^2 b}{dt^2} + \zeta \frac{d^2 c}{dt^2}$$

Сравнивая три полученных формулы, находим:—

$$n_{\alpha} j = n_{\alpha} g + n_{\alpha} l + 2 \left[\frac{da}{dt} \frac{d\xi}{dt} + \frac{db}{dt} \frac{d\eta}{dt} + \frac{dc}{dt} \frac{d\zeta}{dt} \right]$$

Подобные же формулы найдены для проекции на другие оси.

Во законе мыслить, когда оси координат ξ, η, ζ движутся поступательно, т.е. уны, ось которых суть $a, b, c, a', b', \dots$ не изменяются со временем и тогда:

$$\frac{da}{dt} = \frac{db}{dt} = \dots = 0$$

Поэтому:—

$$n_{\alpha} j = n_{\alpha} g + n_{\alpha} l$$

$$n_{\eta} j = n_{\eta} g + n_{\eta} l$$

$$n_{\zeta} j = n_{\zeta} g + n_{\zeta} l$$

Эти формулы показывают, что:

$$\vec{j} = \vec{g} + \vec{l}$$

т.е. во этом случае имеет место теорема параллелограмма векторов: Если оси дви-

двигаясь поступательно, то полное ускорение в сложном движении получается по правилу параллелограмма из полного ускорения в относительном движении и полного ускорения влечения.

Переходим к предположению, что $a, b, c, \dots$ изменяются со временем и назовем через K вектор, проекции которого на оси координат суть: -

$$\text{пр}_x K = 2 \left[\frac{da}{dt} \frac{dz}{dt} + \frac{db}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{dc}{dt} \frac{dz}{dt} \right]$$

$$\text{пр}_y K = 2 \left[\frac{da'}{dt} \frac{dz}{dt} + \frac{db'}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{dc'}{dt} \frac{dz}{dt} \right]$$

$$\text{пр}_z K = 2 \left[\frac{da''}{dt} \frac{dz}{dt} + \frac{db''}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{dc''}{dt} \frac{dz}{dt} \right]$$

Чтобы вывести геометрическое значение вектора K , займемся преобразованиями полученных формул; для этого представим вместо $\frac{dz}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ соответствующие им величины из проекций скорости относительного движения на неподвижные оси x, y, z .

Мы имеем формулы перехода: -

$$\xi = a(x-\alpha) + a'(y-\beta) + a''(z-\gamma)$$

$$\eta = b(x-\alpha) + b'(y-\beta) + b''(z-\gamma)$$

$$\zeta = c(x-\alpha) + c'(y-\beta) + c''(z-\gamma)$$

Предполагая, что оси остаются неподвижными, а координаты x, y, z изменяются только вследствие относительного движения точки, т.е. вследствие изменения ξ, η и ζ , возьмем производные от этих формул по времени, получим: -

$$\frac{dz}{dt} = a \frac{dx}{dt} + a' \frac{dy}{dt} + a'' \frac{dz}{dt} = a n p_x u + a' n p_y u + a'' n p_z u$$

Можно также написать:-

$$\frac{dx}{dt} = b n p_x u + b' n p_y u + b'' n p_z u$$

$$\frac{dy}{dt} = c n p_x u + c' n p_y u + c'' n p_z u$$

Подставляя в формулу для проекции касов $\mathcal{K}$ относительно K ,

получим:-

$$n p_x K = 2 \left[(a \frac{da}{dt} + b \frac{db}{dt} + c \frac{dc}{dt}) n p_x u + (a' \frac{da}{dt} + b' \frac{db}{dt} + c' \frac{dc}{dt}) n p_y u + (a'' \frac{da}{dt} + b'' \frac{db}{dt} + c'' \frac{dc}{dt}) n p_z u \right]$$

Если припомним то связь, которая была выведена между производными косинусов при составлении формулы Дйлера, мы увидим, что:-

$$a \frac{da}{dt} + b \frac{db}{dt} + c \frac{dc}{dt} = 0$$

$$a' \frac{da}{dt} + b' \frac{db}{dt} + c' \frac{dc}{dt} = -\mathcal{Z}$$

$$a'' \frac{da}{dt} + b'' \frac{db}{dt} + c'' \frac{dc}{dt} = q$$

Получим:-

$$n p_x K = 2 [q n p_z u - \mathcal{Z} n p_y u]$$

Также найдем:-

$$n p_y K = 2 [\mathcal{Z} n p_x u - p n p_z u]$$

$$n p_z K = 2 [p n p_y u - q n p_x u]$$

Эти три формулы напоминают по своему составу формулы Дйлера и отличаются от них только тем, что вместо $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$, здесь стоят $n p_x u, n p_y u, n p_z u$; и кроме того имеется лишний множитель 2. Чтобы избежать указать геометрическое значение вектора K , расположившим наши неподвижные оси координат $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$

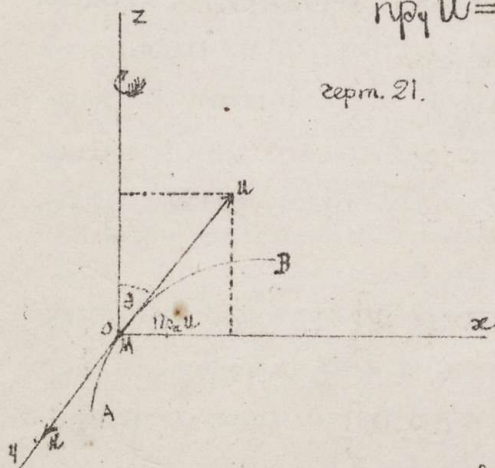
должен упрощаться; именно предположив, что каковы координаты неподвижных осей лежат в положении двукружной точки в данный момент времени, это многогранная ось вращения осей ξ, η, ζ направлена по оси Z и наоборот, это сама относительная скорость W располагается в плоскости XZ . В следующем предположении имеем:

$$p=0, q=0, z=\omega$$

Далее так как сама относительная скорость W лежит в плоскости XZ , то очевидно, что

$$\text{пр}_y W = 0.$$

черт. 21.



Подставив найденные величины для p, q, z и $\text{пр}_y W$ в найденный формулы $\text{пр}_x K$, получим:

$$\text{пр}_x K = 0$$

$$\text{пр}_y K = 2\omega \text{пр}_x W$$

$$\text{пр}_z K = 0$$

Так как линия K дает проекции только на ось Y ось, то она сама направлена по оси Y и равна этой проекции. Обозначая через θ угол между относительной скоростью W и извращенной осью вращения Z , найдем:

$$K = 2\omega W \sin \theta$$

Из всего сказанного мы получаем следующее правило для определения величины и направления вектора K :

нужно провести через рассматриваемую точку мгновенную ось вращения подвижных осей координат и отложить на ней угловую скорость вращения, потом провести через рассматриваемую точку еще относительную скорость W . Эту скорость надо спроектировать на плоскость перпендикулярную к оси вращения; полученную проекцию следует умножить на двойную угловую скорость ω и повернуть на прямой угол около оси вращения в сторону вращения тогда и получится вектор K . Горизонталь называется K скоростью центростремительным ускорением. Мы же будем называть его поворотным ускорением.

Надо помнить, что поворотное ускорение перпендикулярно к относительной скорости W к мгновенной оси вращения. Возвращаясь теперь к нашим формулам для pr_xj , pr_yj и pr_zj , видим, что

$$pr_xj = pr_xg + pr_xl + pr_xK$$

$$pr_yj = pr_yg + pr_yl + pr_yK$$

$$pr_zj = pr_zg + pr_zl + pr_zK$$

Когда проекции линий на оси являются суммами проекций нескольких других линий, то рассматриваемая линия есть геометрическая сумма этих других линий.

Такие образы:-

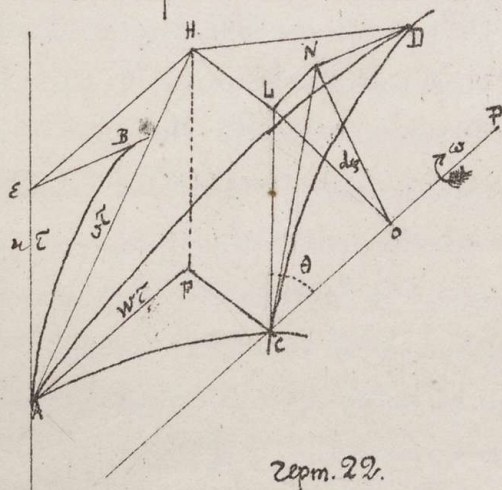
$$\vec{j} = \vec{g} + \vec{l} + \vec{k}$$

Это показывает, что полное ускорение сложного движения складывается по правилу многоугольника из полного ускорения относительного движения, из полного ускорения влечения и из поворотного ускорения

Во этом правиле заключается так называемая теорема Кориолиса.

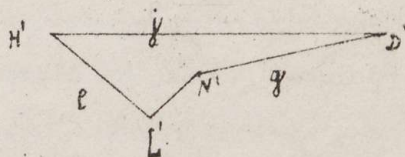
Геометрическое доказательство теоремы Кориолиса.

Теорема Кориолиса может быть доказана очень просто геометрически, пользуясь аксиомой о девиации. Положим, что материальная точка движется во относительном



Зерт. 22.

движении в продолжении безжестко связанного вращения τ путь AB (Зерт. 22).



Проведем в точке A касательную AE и отложим на ней $AE = \tau u$,

где W относительная скорость. Тогда BE будет представлять девиацию в относительном движении. Положим далее, что вследствие движения оси Z , z и Z траекторий AB в продолжение времени T переносится в положение CD , при этом точка A описывается в движении влета путь AC . Построим касательную AF и отложим на ней $AF = W'T$, где W' - скорость влета.

В абсолютном движении точка во время T пройдет некоторый путь AD . Если соединим линии AE и AF параллельно параллелограмма, то диагональ AH выразит нашу линию касательную к абсолютной траектории AD и равную $AH = V'T$, где V скорость абсолютного движения; это следует из параллелограмма скоростей. Соединим H и D , получим линию HD , представляющую девиацию в абсолютном движении.

Если траектория AB переносилась поступательно, то касательная AE по прошествии времени T , займет положение CE равное и параллельное AE . Но так как кроме поступательного движения траектория имеет вращение и все ее движение можно было бы представлено поступательным движением соответствующей точки C и вращением около некоторой оси CP с угловою скоростью ω , то касательная, повернувшись около этой оси на угол ωT займет положение EN , а линия BE займет положение ND . Строим развинутой многоу-

зависимых $HLND$, зависящая сторона которой есть наша исконая deviation ND . Также это мы можем написать:

$$ND = HL + LN + ND.$$

Определим каждое из геометрических слагающих этой суммы, имеем:-

$$ND = \frac{g\tau^2}{2} \text{ (deviation абсолютного движения)}$$

$$HL \neq FC \text{ (deviation в движении везикулы)}, HL = \frac{v\tau^2}{2};$$

$$ND \text{ (по везикуле)} = \frac{g\tau^2}{2}$$

Здесь надо обратить внимание, что направление ND без сомнения мало разнится от направления BE , т.е. от направления полного ускорения в относительном движении.

Переходим к определению LN

Эту величину можно рассматривать, как безконечно малую дугу, пройденную точкой L во время τ от вращения ω . Пусть O будет центр этой дуги, тогда, проходя через OL безконечно малый угол $LO\omega$, найдем:-

$$d\omega = \omega \tau \text{ и}$$

$$LN = \omega \tau \cdot LO$$

Пусть угол $LO\omega = \theta$ тогда $LO = LC \sin \theta = u\tau \sin \theta$ и

$$LN = \omega \tau \cdot u\tau \sin \theta = \omega u \tau^2 \sin \theta$$

Это кажется, что направление линии LN , то она перпендикулярна оси вращения OP и скорости CL относительного движения. Подставляя найденные величины в нашу геометрическую сумму:-

$$\frac{g\tau^2}{2} = \frac{v\tau^2}{2} + \omega u \tau^2 \sin \theta + \frac{g\tau^2}{2}$$

При этом 1 и 2 линии сдвинуты относительно друг друга на расстояние δ , 3-я линия имеет направление, перпендикулярное к δ и к W , а 4-я имеет направление безконечно мало отличающееся от направления δ .

Разделим найденное геометрическое равенство на $\frac{\tau^2}{2}$. С точки зрения геометрии такое деление означает построение многоугольника $H'Z'N'L'$, подобнаго многоугольнику $HZN'L$, при этом все стороны нового многоугольника относятся к сторонам прежняго, как $2:\tau^2$. Получим: —

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \tau + \frac{1}{2} \vec{a} \tau^2 \quad (A)$$

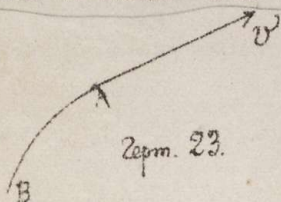
Так как линия DN' безконечно мало отличается от направления δ , то в предельном, приближаясь τ к 0, мы получим, что эта линия совпадает с направлением δ и найденная формула (A) выразит нашу теорему Корисуса во всей ее полноте.

Динамика материальной точки

Законы динамики

1^й закон, — закон инерции

Материальная точка, на которую не действуют силы, находится в покое или движется прямолинейно и равномерно.



Если силы в известный момент времени прекращают действие, то тело продолжает двигаться со скоростью,

соответствующей моменту прекращения действия силы и по касательной к концу траектории

2^й закон — закон совместного действия сил.

Если на материальную точку действуют сразу несколько сил, то она получит движение, складывающееся из движений, которая соединяла бы каждая сила порознь. При этом если точка движется по иериди и на нее действует сила, то ее движение складывается из движения по иериди и движения, которое соединяла бы она точку покоящейся

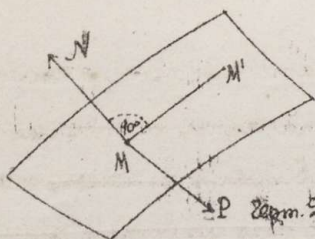
3^й закон — закон действия равных противоположных.

Если первая материальная точка действует на вторую по линии их соединяющей, то и вторая действует на первую по той же линии с равной силой в противоположную сторону.

Как следствие этого закона имеем, что две точки, разстояние между которыми не изменяется, уравновешиваются под действием равных и противоположных сил, направленных по линии, соединяющей эти точки.

4^й закон — закон несвободной точки.

Если точка несвободна, то препятствия разбивают силы сопротивления, которые перпендикулярны к возможным перемещениям точки. Например точка находится на поверхности, то ее можно перемещать по поверхности. Тогда поверхность развевает сопротивление, которое будет перпен-



Зерт. 24.

дискулярно к этой поверхности. При этом рассматриваются угловые несвободные точки, находящиеся под действием тре-

ния; последний вносится в механику, как сила.

5^й и 6^{ой} законы относятся, собственно к целой системе, т.е. к содружно движущимся материальным точкам; они выражаются так:—

5: Если система находится в равновесии, то равновесие не нарушится от приложения к этой системе новых геометрических условий, допускающих ее свободу, или от действия на систему новых сил, которые между собою уравновешиваются.

6: Если система движется, то ее движение не изменяется от приложения к этой системе новых геометрических условий, допускающих рассматриваемое движение, или от приложения новых сил между собою уравновешивающихся.

Теорема. Постоянная сила сообщает материальной точке, начальная скорость которой равна нулю, или направлена по силе, прямолинейное равноускоренное движение.

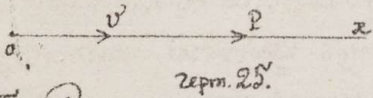
Для большей простоты можно принять касательную скорость равной нулю, т. е. если она не равна нулю, то движение материальной точки сложится из движения по инерции с постоянной скоростью и из движения от действия силы.

Пусть движение совершается по оси Ox ; выразим закон пространства формулой: -

$$S = S(t)$$

тогда закон скорости выразится формулой

$$v = S'(t)$$

Допустим, что в момент t сила перестала действовать -

 вать и определим скорость попросту безконечно малого времени τ .

Тогда скорость по инерции будет таже, т. е. $S'(t)$. Полагая же с другой стороны, что точка в момент времени t потеряла свою скорость. Тогда от действия силы в продолжении времени τ она приобретет некоторую скорость Δv . Для определения этой скорости предположим вооде, что сила такова, что в продолжении времени Δt сообщает той же скорости Δv и возьмем дробь $\frac{\Delta v}{\Delta t}$. Предель к которой стремимся, эта дробь при $\Delta t = 0$, есть некоторая, почтикая величина g , вполне зависящая от силы и от материальной точки. Макс это -

$$\lim \frac{\Delta v}{\Delta t} = g$$

Отсюда следует, что для безконечно малого времени τ

$$\Delta v = g\tau + \epsilon\tau$$

где ε обращается в 0 при $\tau=0$.

Макс как же у нас ни скорость V не уничтожается, не сила не перестала действовать, то будет иметь по второму закону другой вид уравнения движения по инерции и движение от действия силы.

Макс как с другой стороны, при уравнении движения скорости складываются геометриски, то наша материальная точка будет иметь во время $t+\tau$ скорость: -

$$v'(t) + g\tau + \varepsilon\tau$$

Но эта скорость может быть представлена с другой стороны в виде: - $v'(t+\tau)$; поэтому

$$v'(t+\tau) = v'(t) + g\tau + \varepsilon\tau$$

Развертываем 1^ю часть по ступ. Тейлора, получим: -

$$v'(t) + v''(t)\tau + \frac{v'''(t)\tau^2}{2} + \dots = v'(t) + g\tau + \varepsilon\tau$$

Сокращаем как $v'(t)$ и делим на τ , получим: -

$$v''(t) + \frac{v'''(t)\tau}{2} + \dots = g + \varepsilon$$

Предположим, что τ стремится к 0, получим: -

$$v''(t) = g$$

Но показанному в кинематике: -

$$v'(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right)$$

Аналогательно: -

$$\frac{dv}{dt} = g \text{ или } dv = g dt$$

Интегрируя находим: -

$$v = gt + C$$

Тогда к. при $t=0$ по нашему условию и $v=0$, то и $C=0$

Следовательно:

$$v = gt \dots (1)$$

Что касается ур-я прогн-жа, то оно найдется, так:-

$$\frac{ds}{dt} = v = gt + c$$

откуда, интегрируя находим:-

$$s = \frac{gt^2}{2} + c'$$

Если теперь предположим, что мат. точка/итона/какая-нибудь скорости v_0 , которая направлена по действию силы, то движение точки сложилось бы из движения по инерции со скоростью v_0 и движения, определенного формулой (1). Тогда скорость по траектории была бы:-

$$v = v_0 + gt$$

Если же сила действует против начальной скорости v_0 , то из движения по инерции придется вычитать движение под действием силы, получим:-

$$v = v_0 - gt$$

Это есть формула скорости во равномерно переменном движении.

Теорема. Силы, действующие на одну и ту же точку пропорциональны сообщаемым или ускорениям.

Пусть одна и та же материальная точка движется 2 раза; первый раз под действием силы P равномерно-переменным движением с ускорением g , а 2^{ой} раз под действием силы P' с ускорением g' равномерно переменным движ.

* Эта теорема здесь пока доказывается для постоянных сил.

Положим, что некоторая сила q ускоривается, число раз в P и P' , такъ что

$$P = nq, P' = n'q$$

Допустимъ, что отъ дѣйствія силы q мат. точка/поузда-
етъ равноимерно-переменное движеніе съ ускореніемъ k . Тогда
путь, пройденный по оси x отъ дѣйствія силы q въ предше-
ствіи времени t будетъ

$$x = \frac{kt^2}{2}$$

Если дѣйствуетъ сила P , то ея дѣйствіе соотвѣствуетъ
одновременному движенію N силъ q .

По 2^{му} закону и путь, пройденный отъ дѣйствія силы P со-
стоитъ изъ N путей, пройденныхъ отъ дѣйствія силы q .

Этотъ путь будетъ: -

$$x = \frac{nkt^2}{2}$$

Разрѣдая, такъже найдемъ, что отъ дѣйствія силы P' бу-
детъ пройденъ путь:

$$x' = \frac{n'kt^2}{2}$$

Слѣдовательно -

$$q = nk, \text{ а } q' = n'k$$

Прѣжде мы имѣли -

$$\frac{P}{P'} = \frac{nq}{n'q} = \frac{n}{n'}$$

А теперь получимъ: -

$$\frac{q}{q'} = \frac{nk}{n'k} = \frac{n}{n'}$$

$$\text{Слѣдовательно } \frac{P}{P'} = \frac{q}{q'}$$

Этому требовалось доказать: -

О массе.

Напишем найденную пропорцию в следующем виде: -

$$\frac{P}{g} = \frac{P'}{g'}$$

Разматривая эту пропорцию мы замечаем, что отношение сил к ускорениям, которая отсюда сообщается точке и точке материальной точки есть величина постоянная, зависящая только от самой точки. Это постоянную величину, которую характеризует эффект точки на движение, получаемое от действия силы, называют в механике массой материальной точки, то есть: -

$$\frac{P}{g} = m \dots \dots \dots (1)$$

Ответственно массе материальной точки определяется как отношение силы, действующей на материальную точку, к ускорению, которое она сообщает точке.

Вспомогательные теперь какими единицами измеряется масса. Если условимся в единицах силы, пространства и времени, то единица массы определяется сама собою; будем считать: -

за единицу силы.... 1 клге.

за единицу времени... 1"

за едн. пространства... 1 мтр

Получим из формулы (1) $P = 1 \text{ клге}$; $g = 1 \text{ мтр}$, получим

единицу массы

$$m = \frac{1}{1} = 1.$$

И такъ материальная точка имѣетъ тогда единицу массы, когда она подъ дѣйствіемъ силъ въ 1 кг^с получаетъ ускореніе $= 1^m$ (въ этомъ опредѣленіи заключается и единица времени)

Массу можно еще выразить известнымъ количествомъ вѣса тѣла. Известно, что все падающее тѣло падаетъ въ пустотѣ отъ притяженія земли равноускоренно съ ускореніемъ $9,8^m$ въ 1". Помогая это мы имѣемъ зб-ло, вѣсъ которого $9,8^{kg}$ и требуется опредѣлить его массу. Тогда представимъ, что на него дѣйствуетъ сила естественнаго вѣса, это будетъ имѣть мѣсто, если тѣло падаетъ въ пустотѣ, тогда, полагая въ формулѣ (1) $P = 9,8^{kg}$ и $g = 9,8^m$, имѣемъ: —

$$m = \frac{9,8}{9,8} = 1.$$

И такъ тѣло, имѣющее вѣсъ $9,8^{kg}$, состоитъ изъ материальныхъ точекъ, сумма массъ которыхъ $= 1$. Центръ тяжести такого тѣла можно разсматривать, какъ материальную точку съ единицею массы. Отсюда: — каждая единица массы вѣситъ $9,8^{kg}$

Если мы имѣемъ тѣло вѣса Q , то для того, чтобы узнать, сколько въ немъ единицъ массы, надо его вѣсъ разделить на $9,8$, тогда получимъ его массу,

$$m = \frac{Q}{9,8}.$$

Последнее предположение для выражения массы тела можно и самостоятельно вывести:

Пусть тело падает под влиянием соответственной силы, тогда оно будет падать равноускоренно с ускорением $g, 8^m$, сила же, производящая падение есть Q , следовательно по формуле (1) получим: -

$$m = \frac{Q}{g, 8}$$

И так существует два определения массы: -

а) теоретическое: - чтобы определить единицу массы, нужно взять такую точку, которая от действия на нее силы в 1^{kg} получает ускорение равное 1^m в 1^s

б) практическое, при котором, для определения массы, вес тела надо разделить на $g, 8$.

Обращаясь к формуле (1), мы увидим, что

$$P = mg \dots \dots (2),$$

т.е. сила равна массе, умноженной на полное ускорение.

Скажем теперь об измерении механических величин. Примем за основные величины, 3 величины именно: пространство S , время t и силу P . Всякая механическая величина есть функция этих трех величин и потому функция однородная, т.е.

$$u = f(S, t, P)$$

Докажем 2 теоремы: -

Теорема I. Если механическая величина u -

где $n^{\text{о}}$ измерения относительно какойнибудь
из механических единиц, то она увеличится
в $K^{\text{н}}$ раз, когда соответствующая механическая
единица уменьшится в K раз.

Положим у нас было единицей измерения время t , по-
тому изменив ее, именно возмем в K раз меньшую —

— t' , т.е.

$$t = Kt'$$

тогда

$$u = f(s, Kt', P),$$

но эта функция однородна, следовательно

$$f(s, Kt', P) = K^n f(s, t', P) = u' K^n$$

а потому: —

$$u = u' K^n$$

Теорема 2.^я Всякое соотношение между состав-
ными механическими единицами однородно.

Пусть это соотношение есть: —

$$\varphi(s, s', \dots, t, t', \dots, P, P', \dots) = 0$$

Возмем его относительно которойнибудь из величин, по-
ложим S , получим:

$$S = \theta(s', \dots, t, t', \dots, P, P', \dots) \dots \dots (1)$$

Теперь изменим единицу длины, единицу массы, положивши

$$S_1 = S K \dots \dots (x)$$

т.е. возмем в K раз большую. Тогда, заменив в ур-и

(1) S на $S_1 = S K$, мы должны будем и S' заменить на $S'_1 K$,

т.е. будем иметь, что

$$S_1 = \theta(s'_1 K, \dots, t, t', \dots, P, P', \dots) \dots \dots (2)$$

Сравнивая ур-е (2) с ур-е (1), будем иметь:-

$$\theta(s', t', P') = K\theta = (\text{на основании ур-я (1)}) K\theta(s', t', P')$$

Это и требовалось доказать.

Перейдем теперь к механическим величинам кинематическим и динамическим.

1) Кинематическая величина есть скорость V и ускорение g . Скорость равномерного движения выражается так:-

$$V = \frac{s}{t}$$

следовательно размер V будет:-

$$[s', t', P^0]$$

т.е. V относительно S — первая из переменных, относительно $t = (-1)$, и $P = 0$.

Ускорение

$$g = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

следовательно размер g будет:-

$$[s', t^{-2}, P^0]$$

Например $g = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{[s']}{[t^2]} = [s', t^{-2}, P^0]$

2) Динамические величины суть:- масса m , работа J , сила F , количество движения K и импульс силы I .

Масса выражается так:-

$$m = \frac{P}{g}$$

следовательно:-

$$\text{размер } m = \frac{\text{разм. } P}{\text{разм. } g} = \frac{[t^0, s^0, P^1]}{[s', t^{-2}, P^0]} = [t^2, s^{-1}, P^1]$$

Работа:-

$$J = P \cdot s$$

следовательно:-

размер $\mathcal{P} = [s', t', p']$
 Живая сила: — $\mathcal{H} = \frac{mv^2}{2}$

изготовительно: —

разм $\mathcal{H} = \text{разм. } m \cdot \text{разм. } v^2 = [t^2, s', p'] \cdot [t^{-2}, s^2, p^0] =$
 $= [t', s', p']$

количество движения $K = mv$

изготовительно: —

разм $K = \text{разм. } m \cdot \text{разм. } v = [t^2, s', p'] \cdot [t^{-1}, s', p^0] =$
 $= [t', s^0, p']$

Умножить силы: — $\mathcal{J} = \mathcal{P}t$

изготовительно: —

разм. $\mathcal{J} = [s^0, t', p']$

О дѣйствіи перемѣнной силы на матеріальную точку

Положимъ теперь, что на матеріальную точку дѣйствуетъ сила, перемѣнная по величинѣ, но постоянная по направленію = p ; спрашивается можно ли безъ доказательства, что $p = mg$. Очевидно, что если сила дѣйствуетъ на покоящуюся матеріальную точку, то движеніе произойдетъ прямолинейное, такъ какъ сила сообщаетъ скорость матеріальной точкѣ по своему направленію, направленіе же ея по условію постоянно. Отсюда мы заключаемъ, что движеніе матеріальной точки будетъ совершаться

по закону $S = f(t)$. Будем затем разуждать таким образом: предположим, что переменная сила в момент t перестала действовать на материальную точку; тогда дальнейшее движение будет совершаться по инерции со той скоростью, какую имела точка в момент прекращения действия силы, т.е. со скоростью

$$v = f'(t).$$

Находя движение по инерции во время τ , найдем, каковы бы предшествовавшие, что путь, пройденный точкой во время τ - будет: -

$$S = f'(t)\tau.$$

А если бы на материальную точку действовало в то же самое время постоянная сила P , сообщающая ускорение g , то путь, пройденный точкой во время τ был бы: -

$$S = \frac{g\tau^2}{2} = \frac{P\tau^2}{2m}$$

Это был бы путь, пройденный материальной точкой под действием силы постоянной по величине и направлению. Если же сила переменна по величине, но постоянна по направлению, то материальная точка под ее действием пройдет иной путь, который будет: -

$$S = \frac{P\tau^2}{2m} + \frac{E\tau^2}{2}$$

где E есть величина, зависящая как от времени τ , так и от того, как изменяется сама сила, и обращающаяся в 0 выхвост от τ . Последнее показывается так: разделив вышеописанное равенство на τ^2 , тогда получим: -

$$\frac{G'}{\tau^2} = \frac{P}{2m} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Если время τ подходит к нулю, то и сила переменная сила подходит к постоянной и наконец в предположении, при $\tau=0$, силу переменную из данного момента можно считать постоянной и потому $\varepsilon=0$.

Итак у нас теперь получились 2 движения материальной точки от переменной силы а) движение поперечное, при котором пройденный путь во время τ равен

$$S = f'(t)\tau$$

и б) движение от переменной силы, при котором пройденный во время τ путь равен

$$S' = \frac{P\tau^2}{2m} + \frac{\varepsilon\tau^2}{2}$$

Если же переменная сила будет действовать на движущуюся поперечно материальную точку, то по второму закону мы должны кинематически сложить определенные движения; тогда пройденный путь будет равен

$$f'(t)\tau + \frac{P\tau^2}{2m} + \frac{\varepsilon\tau^2}{2}$$

Но с другой стороны этот путь можно выразить и так:

$$f(t+\tau) - f(t)$$

следовательно:-

$$f(t+\tau) - f(t) = f'(t)\tau + \frac{P\tau^2}{2m} + \frac{\varepsilon\tau^2}{2}$$

Разложив 1^ю часть этого равенства в ряд по формуле Тейлора, тогда

$$f(t+\tau) - f(t) = f(t) + f'(t)\tau + f''(t)\frac{\tau^2}{2} + f'''(t)\frac{\tau^3}{2 \cdot 3} + \dots - f(t)$$

Вставляя это в предыдущее выражение и сокращая равенство

иены, получим: -

$$f''(t)\frac{\tau^2}{2} + f''(t)\frac{\tau^2}{6} + \dots = \frac{P\tau^2}{2m} + \frac{\mathcal{E}\tau^2}{2}$$

Для все на $\frac{\tau^2}{2}$ и далее $\tau=0$, получим: -

$$f''(t) = \frac{P}{m},$$

откуда

$$P = f''(t) \cdot m,$$

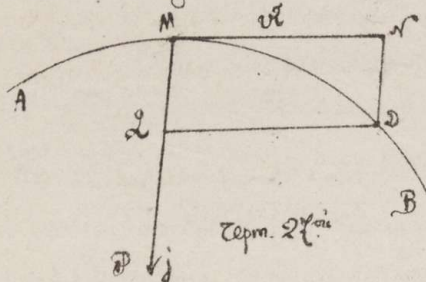
но $f''(t)$, как мы знаем есть тангенциальное ускорение в данный момент времени; следовательно величина силы переменнкой по величине, но постоянной по направлению выражается произведением из массы на тангенциальное ускорение.

Придется еще разсмотреть выражение силы в случае криволинейного движения материальной точки. Криволинейное движение бывает всякий раз, когда сила действующая на материальную точку, или точку из которой касательную скорости, не совпадающую с направлением силы; во всем направление скорости постоянно меняется. Рассмотрим, какая в этом случае существует связь между силой и ускорением.

Получим, что мы имеем криволинейное движение материальной точки, совершающееся под действием из которой силы. Рассмотрим движение материальной точки в некоторый бесконечно малый промежуток времени τ и определим движущую силу, которую из этого промежутка можно считать постоянной по вели-

сина и направления

Если бы действие силы прекратилось, то точка M по-



двигалась бы (терм. 24) ввиду отсутствия инерции по касательной MN и проходила бы по ней во время t — путь $MN = vt$, где v — скорость на траектории во касатель промежутка t , но

так как действие силы не прекращалось, то материальная точка по прошествии времени t будет не в точке N , а в точке D ; соединив N с D , получим вектор, называемый девиацией. Устойчивое движение материальной точки мы теперь вообразим себе совершающимся так, что материальная точка движется по траектории MN равномерно, при этом сама траектория переносится поступательно так, что точка M по прошествии времени t занимает положение L , при этом $ML \neq ND$. Из теоремы о девиации мы знаем, что

$$ND = ML = \frac{1}{2} j t^2,$$

где j есть полное ускорение точки и ML направлено по направлению полного ускорения. (Такое движение материальной точки мы свели к двум движениям а) движению по инерции и б) движению равномерно-ускоренному по направлению полного ускорения; следовательно по второму закону, движущая сила покоится материальной точке

сообщаешь движение по ML , выражаемое формулой:

$$\sigma = ML = \frac{v^2}{2}$$

Но по предыдущему для сообщения такого движения нужна сила $P = m\dot{v}$, направленная по ML , т.е. по направлению $\dot{v}$.

Итак сила, движущая материальную точку по криволинейному пути, во всякий момент времени направлена по направлению полного ускорения и равна массе, помноженной на полное ускорение.

Мы видим на основании сказанного, что сила вполне характеризуется полным ускорением и массой точки. Если движение от силы прямолинейное, то сила, перпендикулярная по величине, направлена по касательной скорости, а если сила образует с касательной скорость некоторый угол, то уже сила характеризуется не только изменением величины скорости, но и изменением ее направления, т.е. в этом случае сила характеризуется полным ускорением.

Итак весь эффект силы состоит в том, что она входит в движение материальной точки ускорение, а если силы нет, то движение материальной точки совершается прямолинейно равномерно.

В этом случае, обращаясь к формуле, увидим, что

$$j = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{S}\right)^2} = 0.$$

это может быть только тогда, когда $\frac{dv}{dt} = 0$ и $\frac{v^2}{S} = 0$, но когда $\frac{dv}{dt} = 0$, то $v = \text{const}$, а когда $\frac{v^2}{S} = 0$, где v , конечно, то $S = \infty$, т.е. движение будет совершаться прямолинейно с постоянной скоростью $= v$.

Выведенные нами формулы для определения силы во всяком движении позволяют очень просто доказать теорему о сложении сил. Если две силы P и Q действуют по одной и той же прямой, то они сообщают точке равноускоренное движение с ускорением $\frac{P}{m}$ и $\frac{Q}{m}$.

На основании второго закона пройденный путь будет равен сумме путей, пройденных от действия той и другой силы. Поэтому этот путь выразится формулой:—

$$S = \frac{P}{m} \cdot \frac{t^2}{2} + \frac{Q}{m} \cdot \frac{t^2}{2} = \frac{t^2}{2m} (P+Q)$$

С другой стороны, если назовем через R силу, которая сообщает точке движение как и силы P и Q , то

$$S = \frac{t^2}{2} \cdot \frac{R}{m}.$$

Следовательно

$$\frac{t^2}{2m} (P+Q) = \frac{t^2}{2m} R$$

откуда

$$R = P+Q.$$

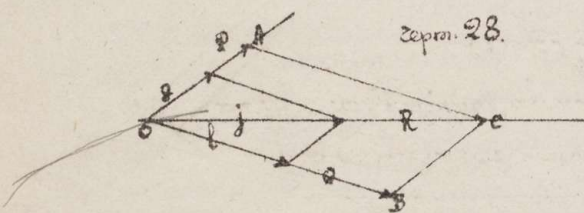
т.е. равнодействующая сила равна алгебраической сумме действующих сил.

Подобным же образом доказываем сумму сил направ-

векторы в разные стороны.

Переходим к самому движению частицы. Полагая, что материальная точка имеет криволинейное движение под действием двух сил P и Q . Остается выяснить на какомнибудь моменте времени, мы знаем, что после этого момента в продолжении времени мало времени t , движение точки распадается из трех движений: 1) из движения по инерции с приобретенной скоростью, 2) из движения от действия силы P и 3) из движения от действия силы Q .

Потому ускорение сложного движения будет получаться по правилу параллелограмма из ускорений движений, сообщаемых силами P и Q . Также как при движении по инерции есть ускорения, так материальная точка получает потому ускорения j , а также из ускорений g и l (фиг. 28), сообщаемых си-



лами P и Q . Если вообразим параллелограмм ускорений (фиг. 28) и построим другой параллелограмм $OACB$ подобный параллелограмму ускорений, стороны которого в n раз больше сторон параллелограмма ускорений, то найдем:

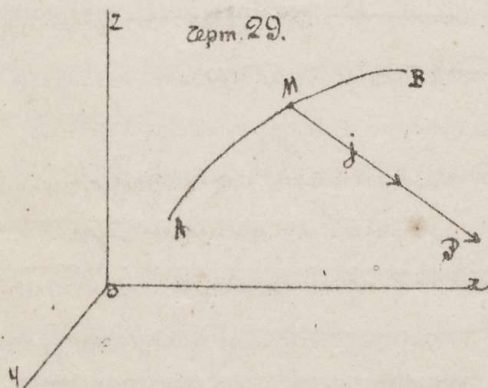
$$OA = gn = P; OB = ln = Q; OC = jn$$

Разобравшись $OC = R$ есть равнодействующая сила.

Таким образом доказано, что равнодействующая сил, действующих под углом, равна диагонали параллелограмма, построенного на действующих силах.

Дифференциальные уравнения движения

Положим, что сила P производит и полное ускорение j , образует с осями координат углы α, β, γ . Напишем



Зерт. 29.

основное уравнение

$$P = mj$$

и умножим это уравнение полагательно на $\cos \alpha$, $\cos \beta$ и $\cos \gamma$

$$P \cos \alpha = mj \cos \alpha$$

$$P \cos \beta = mj \cos \beta$$

$$P \cos \gamma = mj \cos \gamma$$

Назовем проекции действующей силы на оси координат через X, Y, Z , эти величины называются компонентами действующей силы по осям.

Тогда найдем:

$$P \cos \alpha = X, P \cos \beta = Y \text{ и } P \cos \gamma = Z.$$

С другой стороны в кинематике было доказано, что:

$$j \cos \alpha = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$j \cos \beta = \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$J \cos \varphi = \frac{d^2 z}{dt^2}$$

Представляя, найдем: -

$$x = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$y = m \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$z = m \frac{d^2 z}{dt^2}$$

Эти уравнения и называются дифференциальными уравнениями движения материальной точки.

С помощью этих мы определяем движение, если даны силы X, Y, Z и наоборот находим силы, когда известно движение.

Последняя задача гораздо проще, ибо если дано: -

$$x = f(t)$$

то определение X, Y и Z сводится к простому дифференцированию. Наоборот, если даны X, Y и Z , как некоторые функции координат, времени и скорости, то отыскание уравнений -

$$x = f(t); \quad y = g(t) \quad \text{и} \quad z = \psi(t)$$

сводится к интегрированию соответствующих дифференциальных уравнений второго порядка, что по большей части представляет значительное затруднение и может быть выполнено только в некоторых частных случаях.

Важным, что при решении 3^{rd} соответствующих дифференциальных уравнений у нас выйдет шесть произвольных постоянных, которые определяются по начальным данным, т.е. по известным координатам начального положения точки и по известным функциям начальной скорости.

Сила инерции.

Силою инерции движущейся материальной точки называют воображаемую силу, которая равна массе точки, умноженной на полное ускорение и направлена в сторону, противоположную полному ускорению.

Так как проекции полного ускорения j на оси координат суть:—

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2},$$

то проекции на эти оси силы инерции выражаются так:

$$-m \frac{d^2x}{dt^2}; -m \frac{d^2y}{dt^2}; -m \frac{d^2z}{dt^2}.$$

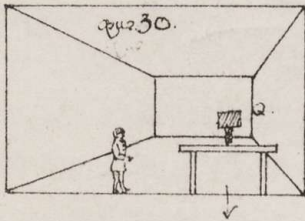
Напишем дифференциальные уравнения движения материальной точки в виде:—

$$\left. \begin{aligned} x - m \frac{d^2x}{dt^2} &= 0 \\ y - m \frac{d^2y}{dt^2} &= 0 \\ z - m \frac{d^2z}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

мы можем смотреть на эти уравнения, как на условия равновесия точки под действием силы, ее движущей и силы инерции, так это самый закон составления уравнений (1) выразится следующими словами. Если остановить материальную точку и, продолжая действовать на нее движущей силой, под действием еще на нее силы инерции, то получим равновесие.

Насамомь дѣлѣ есть только сила движущая и отъ ея дѣйствія матеріальная точка получаетъ ускореніе; но если мы хотимъ смотрѣть на движеніе, какъ на равновѣсіе, то можемъ говорить, что сила движущая уравновѣшивается силой инерціи.

Если напр. (рис. 30) грузъ Q помѣстимъ на пружину,



прикрепленную къ столу и предположимъ, что колпачокъ, въ которомъ находится грузъ и стержень, падаетъ подъ дѣйствіемъ тяжести, то грузъ

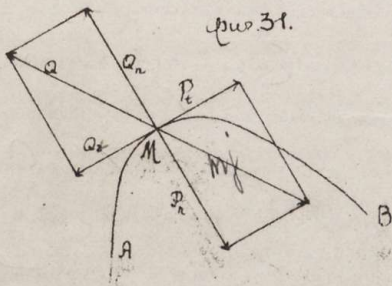
перестаетъ сжимать пружину и наблюдатель, стоящій въ колпачокъ, можетъ говорить, что этотъ грузъ уравновѣсился силой его инерціи.

Мы покажемъ, что произвѣдъ движущей силы на касательную и нормаль сунъ:—

$$P_t = m \frac{dv}{dt} \text{ и } P_n = m \frac{v^2}{\rho}$$

потому что:—

$$j_t = \frac{dv}{dt}; j_n = \frac{v^2}{\rho}; P_t = j_t m; P_n = m j_n$$



Первая сила называется тангенциальной, а вторая центробежной. Вотъ вѣтветвенно этому силѣ инерціи Q, которая равна по абсолютной величинѣ $m j$, но направлена въ сторону противоположную j , можно разложить по касательной

и нормаль на снос? -

$$Q_t = m \frac{dv}{dt} \text{ и } Q_n = m \frac{v^2}{R}.$$

Первая является тангенциальной силой инерции и направлена в сторону, обратную той, куда скорость возрастает; вторая же как центростремительная сила инерции и направлена по той же нормали от центра кривизны. Если движение равноускоренное, то $\frac{dv}{dt} = 0$ и $Q_t = 0$ и мы получаем только одну центростремительную силу инерции.

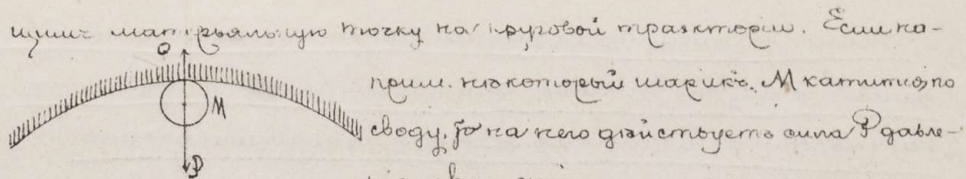
Во простейшем случае, когда материальная точка движется равномерно по кругу радиуса r , центростремительная сила, можно формулировать -

$$Q = \frac{mv^2}{r} \dots (2)$$

можно было бы еще представить в ином виде, полагая $v = \omega r$, где ω - угловая скорость вращения радиуса точки. Мы получаем, что: -

$$Q = \frac{m\omega^2 r^2}{r} = m\omega^2 r \dots (3)$$

Анализируя силу инерции, центростремительная сила есть реакция, она должна быть присоединена к материальной точке, если мы хотим вопрос о ее движении рассматривать, как задачу об относительном равновесии (точка, присоединенная к маховому колесу центростремительной машины, мы рассматриваем, как уравновешенную на этом колесе). Край того центростремительная сила является, как к некоторой действительной силе, если мы будем считать ее присоединенной не к материальной точке, а к точке, удерживаю-



фиг. 32.

приш. на который шарикъ M катится по своду, то на него действует сила P давления свода, которая для шарика есть центростремительная сила. По закону: «действие равно противоположному» сама свода посылаетъ отъ шарика давление Q , которое по величине и направлению представляетъ центробежную силу, только эта сила приложена къ своду, а не къ шару M .

Объясняя зто различие центробежной силы, обратимъ внимание на формулы (2) и (3). По формуле (2) центробежная сила обратно пропорциональна радиусу, а по формуле (3) прямо пропорциональна ему. Это кажется противоречиемъ, но удерживается, когда заметимъ, что по формуле (2) центробежная сила обратно пропорциональна радиусу, если брать постоянную линейную скорость материальной точки, а по формуле (3) она прямо пропорциональна радиусу при постоянной угловой скорости. Если шарикъ будетъ вращаться около пальца нитки на нитке, то заметимъ, что центробежная сила быстро возрастаетъ съ ускориваниемъ нитки; это потому, что въ этомъ случае ω — постоянна (по теореме унв. в. сил). Если же будемъ посылать нитку на центробежной машинѣ, тогда отъ осн. вращенія, то увидимъ, что центробежная сила становится больше; это происходитъ потому, что въ этомъ случае ω — постоянно.

Теперь обратимся к рассмотрению равноускоренного движения точки; оно бывает, когда сила имеет постоянное направление и начальная скорость направлена по силе. В этом случае можно перейти к дифференциальным ур-ям motion, рассматривать только одно. Если направление движения совпадает по оси x , то для его описания нужно взять только одно ур-е: —

$$x = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Рассмотрим, как интерпретируется это ур-е в различных случаях. Сила x может быть или функцией времени, или функцией пространства, или функцией скорости

$$x = f(t); \quad x = f(x) \quad \text{или} \quad x = f(v)$$

Чтобы приступить к решению этого вопроса, преобразуем самое дифференциальное ур-е. Заметим для этого, что:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} = \frac{x}{m}$$

таким образом можно написать

$$x = m \frac{dv}{dt} \quad \text{или} \quad x = m \cdot v \cdot \frac{dv}{dx}$$

Означим еще зависание относительного знака силы x . Если сила x направлена в сторону положительной оси x , то она имеет знак (+), в противном случае (—)

Это положение можно формулировать так: если сила стремится увеличить положительную координату x , то она положительна, если она стремится уменьшить положительную координату, то она отрицательна.

1^й Случай. $x = f(t)$; $x = m \frac{dv}{dt}$, сила — функция времени.

Умножим на dt и интегрируем:

$$m dv = x dt; m v = \int x dt + c$$

Для определения c полагаем, что при $t=0$; $v=v_0$, получим:—

$$m v_0 = \int x dt + c$$

вычитаем:

$$m v - m v_0 = \int x dt \dots (1)$$

Эта формула называется формулой количества движения. Произведение массы на скорость называется количеством движения, а $x dt$ называется импульсом силы. Формула показывает, что приращение количества движения равно сумме импульсов сил. В частном случае, когда x есть величина постоянная $x = P$, то

$$m v - m v_0 = P \int dt = P t$$

Таким образом при постоянной силе приращение количества движения равно произведению силы на время.

Из найденного интеграла (1) можно определить скорость v , а именно:—

$$v = v_0 + \frac{1}{m} \int x dt = v_0 + q(t)$$

Положим для удобства $v \dots \frac{dx}{dt}$, имеем:—

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + q(t)$$

умножим на dt и интегрируем

$$x = v_0 t + \int q(t) dt + c'$$

Для определения c' полагаем, что при $t=0$ $x=x_0$.

тогда

$$x_0 = \int_0^t q(t) dt + c$$

Возвращаемся:-

$$x - x_0 = \int_0^t q(t) dt + v_0^2 t$$

таким образом

$$x = x_0 + v_0^2 t + \int_0^t q(t) dt \dots (2)$$

Максимум образцов найдем x , как функцию времени t

Эксперимент. Если сила есть функция пространства, то имеем

уравнение вида: $x = f(x)$

$$x = m v \frac{dv}{dx}; \quad \text{и} \quad \int_0^x x dx = \frac{m v^2}{2} + c$$

$$\text{при } x=0 \dots v=v_0 \quad \text{и} \quad \int_0^0 x dx = \frac{m v_0^2}{2} + c$$

Возвращаемся снова к уравнению, имеем:-

$$\int_0^x x dx = \frac{m v^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2}$$

Это есть формула Жюльена для v . В ней $\frac{m v^2}{2}$ называется энергией. В выражении $x dx$ элементарная работа силы на пути dx , а интеграл $\int_0^x x dx$ представляет работу переменной силы на всем пути от нуля до x

Отсюда теорема: - приращение энергии на данном пути равно работе силы на этом пути

Определим из найденной формулы v

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2}{m} \int_0^x x dx;$$

это есть функция x . Для сокращения положим:-

$$\frac{2}{m} \int_0^x x dx = Q(x)$$

тогда

$$v = \pm \sqrt{v_0^2 + Q(x)}$$

Здесь перед корнем надо взять знак + или -, смотря по тому, куда точка движется. В ту или другую, куда x возрастает, или куда x убывает.

Положим, что мы берем знак +, тогда

$$\dot{x} = \sqrt{V_0^2 + Q(x)}$$

Далее заменим $\dot{x}$ через $\frac{dx}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{V_0^2 + Q(x)};$$

Разделяя переменные, получим:-

$$\frac{dx}{\sqrt{V_0^2 + Q(x)}} = dt$$

интегрируя, имеем:-

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{V_0^2 + Q(x)}} + C_1$$

Положив для определения C_1 при $t=0 \dots x=L_0$, получим:-

$$0 = \int \frac{dx}{\sqrt{V_0^2 + Q(x)}} + C_1$$

Возьмем, получим:-

$$t = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{V_0^2 + Q(x)}}$$

Из этой формулы, если ее можно решить относительно x , выразим x в функции времени, так это задача бифуркационного анализа. Если же этой формулы нельзя решить относительно x , все равно задача считается решенной, так как дана x как функция времени из кривой комбинационной, что значит, что t .

Случай L_0^2 бывает тогда, когда

$$x = f(t)$$

Здесь для решения задачи можно написать дифференциальное уравнение движения в других видах, или

$$x = m \frac{dv}{dt} \dots \dots (1)$$

или

$$x = m\dot{v} \frac{dv}{dx} \dots (2)$$

Возвращаясь к уравнению и разделив переменные

$$m \frac{dv}{x} = dt$$

интегрируя, получим:

$$m \int \frac{dv}{x} = t + c$$

Положим, что при $t=0 \dots v=v_0$, тогда

$$m \int_{v_0}^v \frac{dv}{x} = c$$

Возвращаясь, получим:

$$m \int_{v_0}^v \frac{dv}{x} = t \dots (3)$$

Дальнейшее интегрирование возможно, если это уравнение можно представить отключенно v , т.е. получим:

$$v = \varphi(t)$$

и интегрируем уравнение

$$dx = \varphi(t) dt$$

Но по заданной задаче отключение v не получится, т.е. требуется замкнуть переменные. Тогда представим координату x как функцию от времени t и получим:

$$m \frac{v dv}{x} = dx$$

откуда

$$m \int \frac{v dv}{x} = x + c$$

Положим, что при $x=0 \dots v=v_0$ и получим:

$$m \int_{v_0}^v \frac{v dv}{x} = c$$

Возвращаясь, получим:

$$m \int_{v_0}^v \frac{v dv}{x} = x \dots (4)$$

Формула (4) дает связь между x и v , так что, подставив в ней формулу (3), будем иметь много два уравнения между 3 переменными x, v и t , которые принимаются нами за дагу.

Замечим, что кроме рассмотренных случаев прямолинейного движения, могут быть еще другие, гораздо более сложные, когда сила является функцией двух или трех переменных. Например, когда она является функцией пространства и скорости, или пространства и времени или наконец всех трех величин вместе.

Напишем тогда

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(t, x, v)$$

или

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(t, x, \frac{dx}{dt})$$

Будем иметь дифференциальное уравнение 2^{го} порядка относительно функции x и независимую переменную x .

Это ур-е следует интегрировать по правилам, данным в теории дифференциальных ур-ий.

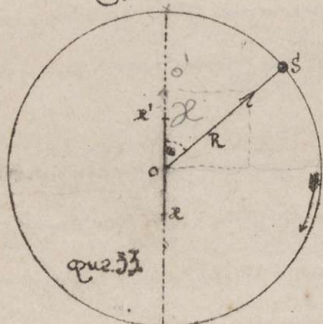
Решение подобных вопросов мы рассмотрим на примере, к которому теперь и перейдем. x

Примеры

1. Движение точки под действием весьма далеко притягивающего центра, вращающегося равномерно по кругу.

Пусть материальная точка должна оставаться на

прямой xx' , которая проходит через центр весьма большого круга, а по этой кривой движется точка S , представляющая материальную точку. Если радиус круга весьма мал по сравнению с радиусом R , на котором наблюдается движение точки, то можно принять, что движение точки S зависит



только от угла α , образующегося радиусом OS с линией xx' . Пусть этот угол α выражается следующей функцией времени:

$$\alpha = at$$

Положим еще

$$x = R \cos(at)$$

где R есть величина радиуса большого круга по радиусу OS . Мы оставим знак $-$, ибо при некотором угле α , когда $\cos$ становится, сина x становится увеличивающейся координатой x . Угол α увеличивается непрерывно без остановки:

$$m \frac{dv}{dt} = R \cos(at)$$

Интегрируем, умножив на dt , получим:

$$mv + c = \frac{R}{a} \sin(at)$$

Положим, что при $t=0$, когда точка находится в центре O , $v=0$, будем иметь $c=0$, так что:

$$v = \frac{R}{am} \sin(at).$$

Запишем v через $\frac{dx}{dt}$, получим: -

$$\frac{dx}{dt} = \frac{R}{am} \sin(at)$$

Интегрируем по dt и интегрируем: -

$$x = -\frac{R}{a^2 m} \cos(at) + C,$$

Из определения C , заключаем, что при $t=0$ $x=0$.

Следует учесть: -

$$0 = -\frac{R}{a^2 m} + C,$$

Воспользуемся: -

$$x = \frac{R}{a^2 m} (1 - \cos(at))$$

Мы видим, что x будете всегда положительной, так как $\cos(at) < 1$. Но по прошествии каждого промежутка времени, когда $\cos$ обращается в единицу,

$$at = 2\pi; t = \frac{2\pi}{a}$$

x опять становится нулем.

И так: точка будете колебаться, совершая полные колебания во время $\frac{2\pi}{a}$, то отходя от центра O , то опять к нему, приближаясь. Амплитуда колебания, т.е. наибольшая величина x найдем из формулы:

когда $\cos(at) = -1$ $t = \frac{\pi}{a}$,

$$x = \frac{2R}{a^2 m} = 0.0'$$

2) Разделение тела с большой высоты.

Когда тело притягивается к центру земли с всею значительною разностью, то силу притяжения земли можно считать постоянною, а тело притягивать изотопическою по закону Ньютона, т.е. об-

ратно пропорциональной квадрату расстояний и прямо пропорциональной произведению масс.

Пусть масса материальной точки будет m , масса земли — M , тогда сила притяжения выразится: —

$$P = K \frac{m \cdot M}{x^2}$$

где x — расстояние материальной точки от центра земли; K — коэффициент Ньютона притяжения. Удобно его соединить вместе с множителем M в одно число и положить: —

$$KM = \mu.$$

Тогда μ может быть вычислено, зная силу притяжения земли. Будем считать: —

$$P = \frac{m\mu}{x^2} \dots \dots \dots (1)$$

Если положить, что точка массы единицы находится при поверхности земли, то при $m=1$, $x=R$, $P = 9,81 \text{ клф}$, так как так мало, что масса, равная единице, весит $9,81 \text{ клф}$. Принимая далее за формулу $x=R$, где R — радиус земли, получим: —

$$9,81 = \frac{\mu}{R^2}$$

откуда

$$\mu = 9,81 R^2$$

Подставляя сюда величину радиуса земли в сантиметрах, найдем μ . Обращаясь к нашей задаче. Положим, что тело начинает падать, отстоя от земли на расстоянии A , не имея начальной скорости; тогда

оно будет двигаться по радиусу АО. Если L в каком-либо положении В, определяется с помощью формулы (1). Так как сила притяжения земли стремится, уменьшив положение радиуса L , которая стремится по направлению от центра вверх, то: -

$$L = - \frac{m\mu}{x^2}$$

Принимая дифференциальное уравнение движения в таком виде: -

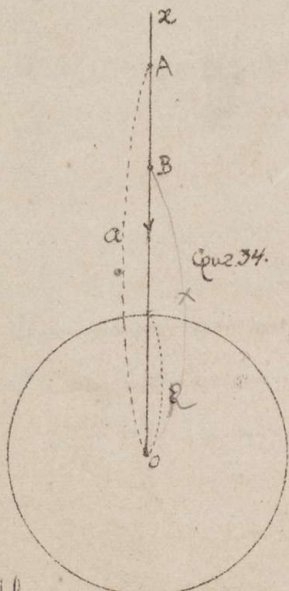
$$m \frac{v dv}{dx} = - \frac{m\mu}{x^2}$$

или

$$\frac{v dv}{dx} = - \frac{\mu}{x^2}$$

Разделив переменные и интегрируя на 2, имеем

$$2v dv = - 2\mu \frac{dx}{x^2}$$



Умножив на

$$v^2 = 2\frac{\mu}{x} + C$$

Для определения произвольного постоянного C , принимаем это при $x=a$... $v=0$, получим: -

$$0 = \frac{2\mu}{a} + C$$

Выведем:

$$v^2 = 2\mu \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right)$$

$$v = \pm \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right)}$$

откуда: -

Здесь перед корнем надо взять (-), ибо точка ~~А~~ имеет скорость, направленную в обратную сторону по-

поперечной направленной оси $x^{\text{об}}$; значит: -

$$v = -\sqrt{2\mu\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right)} \dots (1)$$

По этой формуле можно решить следующий интересный вопрос: - с какой скоростью унагнется на земную безконечно-удаленная точка.

Для решения вопроса надо положить в формулу (1) $x=R$, $a=\infty$, получим: -

$$v = -\sqrt{\frac{2\mu}{R}}$$

Мы знаем, что $\mu = R^2 \cdot 9,81$, поэтому

$$v = -\sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot R}$$

(скорость, которую каждая точка имеет на поверхности земли). Образуется к гравитационному, энергетическому нашему g -ю. Для этого подставим в формулу (1) $v = \frac{dx}{dt}$, получим: -

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{2\mu \frac{a-x}{a^2}}$$

Разделив переменные, получим: -

$$\frac{\sqrt{2\mu}}{a} dt = -\frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a-x}} dx$$

Чтобы удобнее интегрировать, умножим числитель и знаменатель второй части на $\sqrt{x}$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2\mu}}{a} dt &= -\frac{x dx}{\sqrt{ax-x^2}} = +\frac{1}{2} \cdot \frac{-2x dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(a-2x) dx}{\sqrt{ax-x^2}} - \frac{1}{2} \frac{a dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \\ &= d\sqrt{ax-x^2} - \frac{1}{2} \frac{a dx}{\sqrt{\frac{a^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}} = d\sqrt{ax-x^2} - \frac{a}{2} \frac{\frac{dx}{a}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-a}{a}\right)^2}} = \\ &= d\sqrt{ax-x^2} + \frac{a}{2} d\arccos \frac{x-a}{a} \end{aligned}$$

Решив интегрируя от обеих частей, получим: -

$$t \sqrt{\frac{2\mu}{a}} = \sqrt{ax-x^2} + \frac{a}{2} \arccos \frac{x-a}{a} + C,$$

Для определения C , замечаем, что при $x=a$, $t=0$, тогда

получим

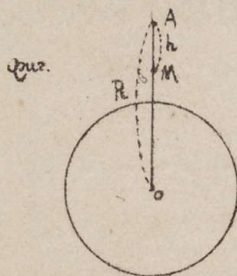
$$0 = 0 + \frac{a}{2} \arccos(1) + C_1 \dots C_1 = 0$$

Значит: -

$$\sqrt{\frac{2a}{a}} \cdot t = \sqrt{ax - x^2} + \frac{a}{2} \arccos \frac{2x-a}{a} \dots (2)$$

Формула (2) позволяет при всяком положительном x найти соответствующее время t . Вспомогаясь формул. (1) она вполне решает предложенную задачу.

Покажем, что при падении тела с неизменной высоты формула (2) приводится к той же формуле падения тела, которая была предложена в физике.



Поскольку падение совершается весьма близко от поверхности земли, то принимаем $a = R$, а положение точки определяем произвольной высотой $AM = h$. Тогда в нашей формуле надо бы

это положить: -

$$a - x = R - x = h.$$

Кроме того можно положить

$$u = R^2 \cdot g = R^2 g.$$

Кроме того введем вместо $\arccos$ — $\arcsin$. Для этого замечаем, что: -

$$\arccos z = \arcsin \sqrt{1 - z^2}$$

также что:

$$\begin{aligned} \arccos \frac{2x-a}{a} &= \arcsin \sqrt{1 - \left(\frac{2x-a}{a}\right)^2} = \arcsin \sqrt{1 - \frac{4x^2 - 4ax + a^2}{a^2}} \\ &= \arcsin \sqrt{\frac{a^2 - 4x^2 + 4ax - a^2}{a^2}} = \arcsin \sqrt{\frac{4x(a-x)}{a^2}} = \end{aligned}$$

$$= \arcsin \sqrt{\frac{4(R-h)h}{R^2}}$$

Подставляя в формулу (2), получим: -

$$\sqrt{2gR} \cdot t = \sqrt{(R-h)h} + \frac{R}{2} \arcsin \sqrt{\frac{4(R-h)h}{R^2}}$$

Возьмем на $\sqrt{R}$ и получим, что $R = \infty$

$$\sqrt{2g} \cdot t = \sqrt{h - \frac{h^2}{R}} + \frac{\sqrt{R}}{2} \arcsin \sqrt{\frac{4h}{R} - \frac{4h^2}{R^2}}$$

В предельном случае: -

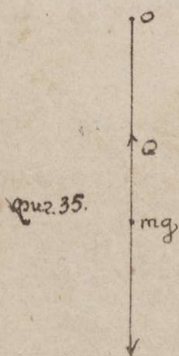
$$\sqrt{2g} \cdot t = \sqrt{h} + \sqrt{h} \frac{\arcsin \sqrt{\frac{4h}{R}}}{\sqrt{\frac{4h}{R}}} = \sqrt{h} + \sqrt{h}$$

или: -

$$2\sqrt{h} = \sqrt{2g} \cdot t \text{ или } h = \frac{g t^2}{2}$$

Движение тела в сопротивляющейся среде

Задача I. Рассмотрим падение тела, принимая во внимание сопротивление воздуха. Положим из точки O



под действием силы тяжести падает тело и вернется к сопротивлению воздуха, которое казавшись через Q, проходит протрактом 2. Сила сопротивления Q, как показано опытно, может быть принята прямо пропорциональной квадрату скорости $Q = K_1 v^2$; это касается до коэффициента K_1 , то его

представим так: - $K_1 = mgk^2$
тогда

$$Q = mgk^2 v^2$$

Сила тяжести по вертикали

$$X = mg - mg\kappa^2 \frac{v^2}{c^2} = mg(1 - \kappa^2 v^2)$$

Получим уравнение движения:

$$\frac{mdv}{dt} = mg(1 - \kappa^2 v^2); \quad \frac{dv}{1 - \kappa^2 v^2} = g dt$$

или

$$\frac{1}{2} \frac{dv}{1 - \kappa^2 v^2} + \frac{1}{2} \frac{\kappa^2 v dv}{1 - \kappa^2 v^2} = \kappa^2 g dt$$

Интегрируем и получим на 2 постоянных:

$$\frac{1}{2} \lg(1 + \kappa v) - \frac{1}{2} \lg(1 - \kappa v) = \kappa^2 g t + C$$

или

$$\lg \frac{1 + \kappa v}{1 - \kappa v} = 2\kappa^2 g t + C$$

Определим C . При $t=0$ и $v=0$. Тогда $\lg 1 = 0 + C$, следовательно $C=0$

$$\lg \frac{1 + \kappa v}{1 - \kappa v} = 2\kappa^2 g t$$

или

$$\frac{1 + \kappa v}{1 - \kappa v} = e^{2\kappa^2 g t} \quad 1 + \kappa v = e^{2\kappa^2 g t} (1 - \kappa v)$$

откуда

$$v = \frac{1}{\kappa} \frac{e^{2\kappa^2 g t} - 1}{e^{2\kappa^2 g t} + 1} \quad (1)$$

Получим числитель и знаменатель на $e^{-\kappa^2 g t}$ получим:

$$v = \frac{1}{\kappa} \frac{1 - e^{-2\kappa^2 g t}}{1 + e^{-2\kappa^2 g t}}$$

если $t \rightarrow \infty$, то $v = \frac{1}{\kappa}$ следовательно: во все дальнейшее время скорость придёт к предельной и будет постоянной. Интегрируем далее

числитель и знаменатель, форму (1) на $e^{-\kappa^2 g t}$, тогда

$$v = \frac{1}{\kappa} \frac{e^{\kappa^2 g t} - e^{-\kappa^2 g t}}{e^{\kappa^2 g t} + e^{-\kappa^2 g t}}$$

интегрируем на $\kappa^2 g dt$, тогда

$$\kappa^2 g dx = \frac{(e^{\kappa^2 g t} - e^{-\kappa^2 g t}) \kappa^2 g dt}{e^{\kappa^2 g t} + e^{-\kappa^2 g t}}$$

интегрируя получим

$$\kappa^2 g x = \lg \left(\frac{e^{\kappa^2 g t} + e^{-\kappa^2 g t}}{2} \right) + C_1$$

Определим C_1 ; при $x=0$ и $t=0$; следовательно $0 = \lg 2 + C_1$,
откуда $C_1 = -\lg 2$

подставивши; получим:—

$$\kappa^2 g x = \lg \left(\frac{e^{\kappa g t} + e^{-\kappa g t}}{2} \right)$$

По этой формуле можно вычислять пройденный путь

Покажем, что если t не велико, то получим обыкновенную

формулу падения:—

$$e^{\kappa g t} = 1 + \kappa g t + \frac{\kappa^2 g^2 t^2}{1.2} + \dots$$

$$e^{-\kappa g t} = 1 - \kappa g t + \frac{\kappa^2 g^2 t^2}{1.2} - \dots$$

Сложивши обе строки и разделив пополам, получим:—

$$\kappa^2 g x = \lg \left(1 + \frac{\kappa^2 g^2 t^2}{2} \right)$$

а, разложивши вторую часть равенства по формуле:—

$$\lg(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

получим:—

$$\kappa^2 g x = \frac{\kappa^2 g^2 t^2}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa^2 g^2 t^2}{2} \right)^2 + \dots$$

Отбрасывая высшие степени, получим:—

$$\kappa^2 g x = \frac{\kappa^2 g^2 t^2}{2}$$

или

$$\cancel{2 \kappa^2 g x} = \kappa^2 g^2 t^2$$

откуда

$$x = \frac{g t^2}{2}$$

а это и есть обыкновенная формула падения

Задача II. Разсмотрим движение тела, брошенного по вертикальной линии снизу вверх, принимая во внимание сопротивление воздуха. Эта сила сопротивления, как показывает опыт, при очень больших и очень малых скоростях (меньше 60 и больше 380 метр.) может быть принята прямо

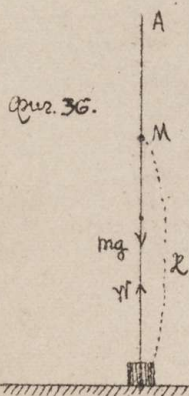
пропорционально квадрату скорости

Принимая закон квадрата скорости, мы получим формулу

$$dV^2 = k^2 mg v^2$$

где m — масса снаряда и $g = 9,81$

Положим, что тело брошено вверх (из орудия). Мы можем



заместить, это снаряд, находясь в M , начинает под действием следующих сил: во 1^ю вверх — сопротивление воздуха и во 2^ю сила тяжести тогда сверху вниз.

$$X = -mg - k^2 mg v^2$$

$$m \frac{dv}{dt} = -mg(1 + k^2 v^2)$$

Разделим переменные, имеем:

$$\frac{dv}{1 + k^2 v^2} = -g dt$$

умножим на K , имеем:

$$\frac{k dv}{1 + k^2 v^2} = -k g dt$$

интегрируем:

$$\arctg kv = -kgt + c$$

Для определения произвольного постоянного C , замечая, что при $t=0$, когда снаряд вылетает из орудия, его скорость была $V=W$, тогда будем иметь:

$$\arctg(kW) = c$$

Подставив, получим:

$$\arctg(kv) = -kgt + \arctg(kW)$$

$$kgt = \arctg(kW) - \arctg(kv)$$

Воспользуемся тригонометрической формулой:

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}$$

Получим: -

$$\kappa g t = \operatorname{arctg} \frac{\kappa w - \kappa v}{1 + \kappa^2 w v}$$

Отсюда: -

$$\frac{\kappa w - \kappa v}{1 + \kappa^2 w v} = \operatorname{tg}(\kappa g t) \dots \dots (1)$$

Отсюда можно определить время, в которое снаряд достигнет цели на наибольшей высоте. Пусть оно будет T . Если положить $t = T$ и $v = 0$, получим: -

$$\kappa w = \operatorname{tg}(\kappa g T) \dots \dots (2)$$

Отсюда определим T , зная w

Из формулы (1) имеем: -

$$\kappa w - \kappa v = \operatorname{tg}(\kappa g t) + \kappa^2 w v \operatorname{tg}(\kappa g t)$$

откуда: -

$$v = \frac{\kappa w - \operatorname{tg}(\kappa g t)}{\kappa + \kappa^2 w \operatorname{tg}(\kappa g t)}$$

но $v = \frac{dx}{dt}$, а потому можем написать: -

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\kappa w - \frac{\sin(\kappa g t)}{\cos(\kappa g t)}}{\kappa + \kappa^2 w \frac{\sin(\kappa g t)}{\cos(\kappa g t)}} = \frac{\kappa w \cos(\kappa g t) - \sin(\kappa g t)}{\kappa \cos(\kappa g t) + \kappa^2 w \sin(\kappa g t)}$$

умножив обе части на $\kappa^2 g dt$, будем иметь: -

$$\kappa^2 g dx = \frac{g \kappa^2 w \cos(\kappa g t) - g \sin(\kappa g t)}{\cos(\kappa g t) + \kappa w \sin(\kappa g t)} dt$$

Интегрируя последнее выражение, получим: -

$$\kappa^2 g x = \int \{\cos(\kappa g t) + \kappa w \sin(\kappa g t)\} + c$$

Для определения произвольного постоянного C , заметим, что при $x=0 \dots t=0$, последнее равенство примет вид: -

$$0 = l_0 + c \dots c = 0$$

и мы получим, что:

$$\kappa^2 g x = l \{ \cos(\kappa g t) + \kappa v \sin(\kappa g t) \} \dots (3)$$

Мы предполагаем, что при $t=0 \dots t=T$, а $x=h$.

Применив формулу (3) к этой системе, имеем:

$$\kappa^2 g h = l \{ \cos(\kappa g T) + \kappa v \sin(\kappa g T) \}$$

$$\text{или } \kappa^2 g h = l \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa^2 v^2}} + \kappa v \frac{\kappa g T}{\sqrt{1 + \kappa^2 v^2}} \right\}$$

или

$$\kappa^2 g h = l \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa^2 v^2}} + \kappa v \frac{\kappa g T}{\sqrt{1 + \kappa^2 v^2}} \right\}$$

или

$$\kappa^2 g h = l (\sqrt{1 + \kappa^2 v^2}) = \frac{1}{2} l (1 + \kappa^2 v^2) \dots (A)$$

Определим теперь скорость тела, при падении на землю.

~~Пусть, произвольный момент времени, мы~~

$$x = -mg + m\gamma \kappa^2 v^2 = -mg(1 - \kappa^2 v^2)$$

или

$$m \frac{v dv}{dx} = -mg(1 - \kappa^2 v^2)$$

отсюда —

$$-\frac{v dv}{1 - \kappa^2 v^2} = +g dx$$

умножаем обе части на $2\kappa^2 v$:

$$-\frac{2\kappa^2 v dv}{1 - \kappa^2 v^2} = 2\kappa^2 g dx$$

после интегрирования (на основании предыдущего) будем иметь:

$$l(1 - \kappa^2 v^2) = 2\kappa^2 g x + C_2$$

C_2 определяется так: на высоте h у поверхности, когда тело находится падает $v=0$ и $x=h$, получим:

$$l(1) = 2\kappa^2 g h + C_2 \dots C_2 = -2\kappa^2 g h$$

Подставим в нашу формулу,

$$2\kappa^2 g x = l(1 - \kappa^2 v^2) + 2\kappa^2 g h$$

заменяя $2\kappa^2 g h$ из формулы (A) будем иметь:

$$2\kappa^2 g x = l(1 - \kappa^2 v^2) + l(1 + \kappa^2 v^2)$$

$$\text{или } \mathcal{E}k^2 a = \mathcal{E}\{(1-k^2 v^2)(1+k^2 w^2)\}$$

Когда тело упадет на землю, то $\mathcal{E}=0$, так как это будет
иметь: —

$$\mathcal{E}\{(1-k^2 v^2)(1+k^2 w^2)\} = 0$$

следовательно: —

$$(1-k^2 v^2)(1+k^2 w^2) = 1$$

раскроем скобки: $1 - k^2 v^2 + k^2 w^2 - k^4 v^2 w^2 = 1$ откуда: —

$$v^2 = \frac{w^2}{1+k^2 w^2}$$

Таким образом тело упадет со скоростью, которая $< w$

Криволинейное движение

Переходим к рассмотрению криволинейного движения точек, т.е. к интегрированию дифференциальных уравнений: —

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X; \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y; \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z.$$

Здесь, вообще говоря неизвестны общие принцип интегрирования, а. поучно указать только на некоторые интегралы, которые имеют место для различных сил природы. Эти интегралы представляются во вид механических теорем, каковы: теоремами живых сил и теоремами площадей. Рассмотрим 1^ю теорему.

Умножив наши дифференциальные уравнения на dx , dy , dz и сложим; получим

$$\frac{m(dx \cdot d^2 x + dy \cdot d^2 y + dz \cdot d^2 z)}{dt^2} = X dx + Y dy + Z dz \quad (1)$$

Обратимся ко второй части равенства (1). Если P представ-

имеем силу, действующую материю, то можно написать: -

$$Xdx + Ydy + Zdz = Pds \left(\frac{x}{P} \frac{dx}{ds} + \frac{y}{P} \frac{dy}{ds} + \frac{z}{P} \frac{dz}{ds} \right)$$

Здесь $\frac{x}{P}, \frac{y}{P}, \frac{z}{P}$ представляются cos-ы углов между силой P с осью координат $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ представляются cos-ы углов между элементом траектории ds с осью координат. Если казавшийся через θ углом, между силой P и элементом дуги ds , произведенный косинус, то найдем: -

$$Xdx + Ydy + Zdz = Pds \cdot \cos \theta.$$

Выражение $Pds \cdot \cos \theta$ называется элементарной работой силы P на пути ds .

Затем преобразуем ^{нраву} второе часть равенства (1) где тело движется выражение квадрата скорости, оно будет: -

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$$

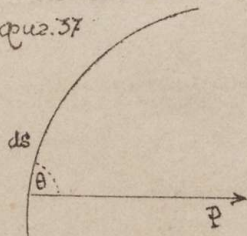
Возвращаясь отсюда к началу этого равенства гиперперпендикуляр, считая за независимое переменное t , и так $v_0 dt = 0$, найдем: -

$$dv^2 = \frac{2dx \frac{dx}{dt} + 2dy \frac{dy}{dt} + 2dz \frac{dz}{dt}}{dt^2} = \frac{2dx \frac{dx}{dt} + 2dy \frac{dy}{dt} + 2dz \frac{dz}{dt}}{dt^2} = \frac{1}{2} dv^2 = d \frac{v^2}{2}$$

отсюда

Эта элементарная работа будет пропорциональна или отпи-

рис. 37



зательная, которую по формуле, будет импортировать $\cos$ угла между силой P и элементом ds берется по абсолютной величине. Для нахождения формулы в формуле (1), найдем: -

$$d \frac{mv^2}{2} = Pds \cdot \cos \theta \dots (2)$$

Формула (2) дает как теорему: гиперперпендикуляр

Угловой силы = элементарной работы.

Если траектория известна, а направление и величина силы даны во каждой точке траектории, то P и θ суть известные функции S .

В этом случае можно интегрировать формулу (2) и получить:

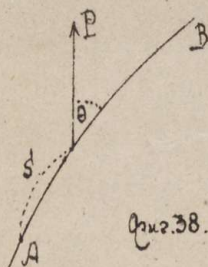


Рис. 38.

$$\frac{mv^2}{2} = \int^S P ds \cos \theta + C$$

Для определения C берем $v = 0$ при $S = S_0$

получаем:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \int^{S_0} P ds \cos \theta + C$$

вычитаем:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{S_0}^S P ds \cos \theta \dots (3)$$

(выражение угловой силы = работе силы)

Итак формула представляет такое называемый интеграл угловой силы. Она выражается следующей теоремой: выражение угловой силы при переходе точки по какому-либо пути из одного положения в другое равно разности значений силовой функции во втором и во первом положении точки.

Так как это выражение угловой силы не зависит от пути, по которому движется точка.

$\int_{S_0}^S P ds \cos \theta$ называется также работой перемещающей силы P на всем пути $S - S_0$. Формула (3) дает теорему угловой силы для криволинейного движения. Она показывает, что

приращение дробной силы на данном пути
равно работе силы на этом пути. Если
траектория известна, то интегрируя, стоящий во вто-
рой части формулы (3), вообще говоря, взять нельзя, так
как мы не знаем, какими функциями S выражают-
ся P и Q , но зато имеет место весьма важная, ос-
бенность всех сил природы, не зависящих от времени
и скорости Меленко: все известные силы, выражающиеся
функциями координат точки, обладают такою особен-
ностью, что дифференциальный трехчлен $Xdx + Ydy + Zdz$
сводится к полному дифференциалу некоторой функции
координат, которую назовем через U , так что

$$du = Xdx + Ydy + Zdz \dots (4)$$

где U называется силовой функцией.

Для того, чтобы работать (4) можно ввести X, Y, Z
функции обратные некоторым уравнениям, кото-
рые получаются так: — мы имеем кривую

$$du = \frac{du}{dx} \cdot dx + \frac{du}{dy} \cdot dy + \frac{du}{dz} \cdot dz$$

отсюда будем изговар, что

$$1) X = \frac{du}{dx}; \quad 2) Y = \frac{du}{dy}; \quad 3) Z = \frac{du}{dz}$$

Возьмем от уравнения 2) производную по Z , а от тре-
тьего производную по Y , будем иметь: —

$$\frac{dY}{dz} = \frac{d^2u}{dy \cdot dz}; \quad \frac{dZ}{dy} = \frac{d^2u}{dz \cdot dy}$$

откуда

$$\frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy}$$

Положим, что образы криволинейных и кривизн g_{ik} и g_{ik}

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz} \quad \text{и} \quad \frac{dz}{dy} = \frac{dx}{dz}$$

Если эти функции удовлетворяют, то всегда можно отыскать функцию U , полный дифференциал которой выражается по формуле (4). Подставляя X, Y и Z действующей силы по осям координат являющиеся частными производными силовой функции по координатам:-

$$X = \frac{dU}{dx}; \quad Y = \frac{dU}{dy} \quad \text{и} \quad Z = \frac{dU}{dz}$$

Из уравн (4), следует иметь:-

$$dU = Xdx + Ydy + Zdz$$

или

$$\oint \vec{P} d\vec{s} = dU$$

следовательно:-

$$\frac{m v^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = \int_0^s dU = U - U_0 \dots (5)$$

Для всех сил природы, которые суть функции координат, приращение кинетической энергии равно приращению силовой функции.

Для примера рассмотрим из которых сил природы и покажем, что они имеют силовую функцию

1. Рассмотрим силу тяжести. Направляем ось Z по вертикальной линии вверх, а оси X и Y в горизонтальной плоскости. Тогда $X=0, Y=0, Z=-mg$.

Здесь функции, удовлетворяющие силовой функции даются:-

$$\frac{dZ}{dy} = \frac{dY}{dz}; \quad \frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx}; \quad \frac{dY}{dx} = \frac{dX}{dy}$$

они, очевидно, удовлетворяются, так как все частные

производных, суть нули. Оставайтесь по формуле (4) dU

$$dU = Xdx + Ydy + Zdz = -mgdz$$

Интегрируя, получим:-

$$U = -mgz + C$$

Произвольное постоянное здесь не имеет значения, так как наши законы только производны от силовой функции. Поэтому можно положить:-

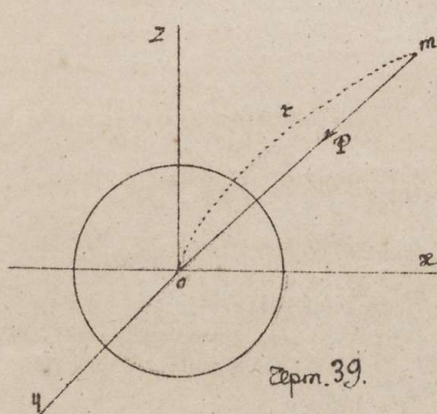
$$U = -mgz$$

2. Сила Ньютонова притяжения к центру земли.

Мы видели, что каждая материальная точка, как бы она не была велика, притягивается к центру земли, направляясь по радиусу, со силой:

$$P = \frac{\mu \cdot m}{z^2}$$

где z — расстояние точки от центра земли. Приведем начало координат в центр земли. Тогда



Зрм. 39.

составляющие силы P по осям x, y, z будут

$$X = \frac{\mu m}{z^2} \cos \alpha; \quad Y = \frac{\mu m}{z^2} \cos \beta; \quad Z = \frac{\mu m}{z^2} \cos \gamma$$

где α, β, γ суть углы, которые сила P делает с положительными осями координат. Эти углы тупые и являются дополнениями до острых углов,

$\cos$ -ы которых выражаются формулами:

Получим это: $dU = -\mu m \frac{z dz}{z^3} = -\mu m \frac{dz}{z^2}$

интегрируем implicitly:-

$$U = + \frac{\mu m}{z} + C.$$

Это и будет силовая функция для силы Ньютоновой притяжения

Другая форма интеграла уравнений силы.

Напишем ур-е (3) в таком виде:-

$$\frac{m\dot{z}^2}{2} - U = \frac{m\dot{z}_0^2}{2} - U_0.$$

Это равенство показывает, что, как в начале, так и в конце траектории, $\frac{m\dot{z}^2}{2} - U$ одно и то же, то есть во все время движения есть величина постоянная. Физики называют $\frac{m\dot{z}^2}{2}$ - кинетической энергией, а $-U = L$ - потенциальной энергией. Данное равенство представим в таком виде:

$$\frac{m\dot{z}^2}{2} + L = \text{const.}$$

Для силы тяжести $U = -mgz$ и $L = +mgz$, так что это будет иметь:-

$$\frac{m\dot{z}^2}{2} + mgz = \text{const.} \dots \dots (6)$$

5) поверхности уровня

Поверхностью уровня называется семейство поверхностей, выражаемых уравнением:

$$U = f(x, y, z) = \text{const.}$$

где U - известная постоянная будет полуротация эллипсоидов

поверхности. Лявая часть представляется числовой функцией

$$u = f(x, y, z)$$

и действующей с ней.

Поверхности уровня нормальны. Покажем это.

Припомним, что:-

$$x = \frac{du}{dx} = \frac{df(x, y, z)}{dx}$$

$$y = \frac{du}{dy} = \frac{df(x, y, z)}{dy}$$

$$z = \frac{du}{dz} = \frac{df(x, y, z)}{dz}$$

Если теперь составим $\cos$ 'ы углов α , β и γ , которые равнодействующая сила образует с осями координат, то найдем это:-

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\frac{df(x, y, z)}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{df(x, y, z)}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df(x, y, z)}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df(x, y, z)}{dz}\right)^2}}$$

точно так же:-

$$\cos \beta = \frac{\frac{df(x, y, z)}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{df(x, y, z)}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df(x, y, z)}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df(x, y, z)}{dz}\right)^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{\frac{df(x, y, z)}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{df(x, y, z)}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df(x, y, z)}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df(x, y, z)}{dz}\right)^2}}$$

Если теперь вообразим, что через рассматриваемую точку проведена поверхность уровня, удовлетворяющая уравнению:

$$f(x, y, z) - \text{const} = 0$$

и составим по формуле, данной в приложении аксиомы геометрии $\cos$ 'ы углов ρ , μ , ν , которые нормаль к поверхности образует с осями координат, то найдем:

$$\cos \lambda = \frac{\frac{df(x,y,z)}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{df(x,y,z)}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df(x,y,z)}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df(x,y,z)}{dz}\right)^2}}$$

$$\cos \mu = \frac{\frac{df(x,y,z)}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{df(x,y,z)}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df(x,y,z)}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df(x,y,z)}{dz}\right)^2}}$$

$$\cos \nu = \frac{\frac{df(x,y,z)}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{df(x,y,z)}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df(x,y,z)}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df(x,y,z)}{dz}\right)^2}}$$

Равнявая эти формулы с предыдущими, находим:

$$\alpha = \epsilon; \beta = \mu \text{ и } \gamma = \nu$$

Таким образом сила нормальна к поверхности уровня, проходящей через данную точку. Разделим это на массу тела, получим уравнение поверхности уровня на основании вышеизложенного будем:

$$-mgz = \text{const} \dots \dots z = \text{const}.$$

Это уравнение представляет ряд горизонтальных плоскостей. Знаем во всякой точке сила тяжести перпендикулярна к горизонтальной плоскости. Для силы притяжения земли на отдаленном расстоянии от точки надо написать по закону Ньютона:

$$u = \frac{a \cdot m}{z}$$

Поэтому ур-е поверхности уровня

$$\frac{a \cdot m}{z} = \text{const} \dots \dots z = \text{const}$$

т.е. поверхность уровня представляет семейство концентрических сфер, имеющих центр в центре земли. Сила притяжения во всякой точке будет:

нормальна к этой сфере.

Название поверхности уровня дано рассматриваемой поверхности во томъ смысле, что, если по этой поверхности передвигать уровень такъ, чтобы онъ своей серединой прикасался къ поверхности, то пузырекъ уровня

всегда будетъ

на нуль.

Рассмотримъ

теперь, ка-

кое значение

имеетъ по-

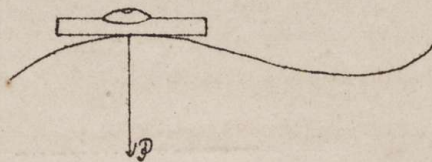
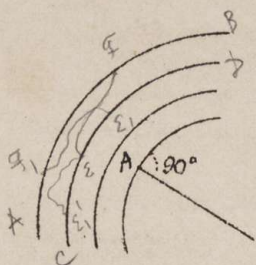


рис. 40.

нятие о поверхности уровня въ формулѣ интеграла
линейнаго силъ

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)$$

Формула показываетъ, что по какому бы пути ни проходила материальная точка отъ точки (x_0, y_0, z_0) къ точке (x, y, z) , приращение линейной силы остается то же самое. Но это мало, приращение линейной силы остается то же самое для любыхъ путей, заключенныхъ между двумя поверхностями уровня. Пусть AB и CD будутъ двѣ поверхности уровня; при этомъ для первой поверхности постоянное равно U_0 , а для второй постоянное равно U_1 , такъ что:-

$$f(x, y, z) = U_0, \text{ а вторая}$$

$$f(x, y, z) = U_1$$

Положим, что движение совершается один раз по пути EF , а другой раз по пути $E'F'$. При этом материальная точка выходит из первого случая из E , а во второй из E' , с одинаковой скоростью.

Утверждаем, что скорость в точках F и F' будет то же значение. Мы можем написать по теореме живых сил:—

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = U_1 - U_0.$$

Потому что пути второго шире:—

$$\frac{mv'^2}{2} - \frac{mv_0'^2}{2} = U_1 - U_0.$$

Возьмем шире:—

$$\frac{m}{2} (v^2 - v'^2) = 0$$

т. е.

$$v = v'$$

Материальная точка таким образом приходит из F и F' с одинаковой скоростью. Взяв раз, как материальная точка, описав в своем движении некоторый путь, возвращается на ту же поверхность уровня, из которой она вышла, скорость ее получится та же самая, которая была раньше:—спасана.

Положим, что материальная точка описывает некоторый путь EE' , тогда теорема живых сил напишется так:—

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = U_1 - U_0 = 0$$

Значит и

$$v = v_0$$

Этимъ доказывается невозможность востановления.
 Какъ бы ни была усовершенствована машина, движущаяся, по-
 току дающая черезъ некоторое время, вернуться, на пре-
 чую поверхность уровня. Потому что если бы точка
 постоянно имела поверхность уровня, то разитриная
 машины должны были бы быть безконечными. Если же
 точка возвращается на преую поверхность уровня,
 то никакого приращенія живой силы не получится,
 потому не имется запаса работы для преодоленія
 вреднаго сопротивленія и на самую дль скорость
 будетъ останавливаться все меньше и меньше, такъ что
 машина остановится.

Объ интегралъ площадей или теорема площадей

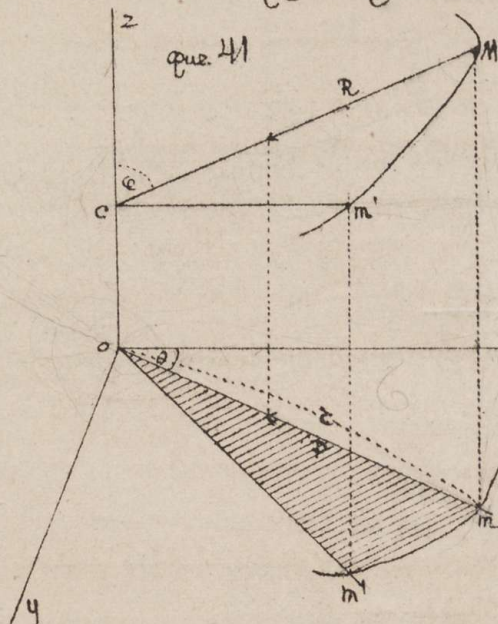
Эта теорема имется слѣдующая, когда направление
 силы, дѣйствующей на материальную точку, постоян-
 но пересѣкаетъ некоторую прямую линию, которая
 можетъ быть названа ... ОСЕЮ СИЛЪ.

Пусть направление силы R дѣлаеа всякаго положенія
 точки M пересѣкаетъ ось Z . Разлагаемъ силу R на
 двѣ составляющія: 1^{ая} направлена по оси Z , а другая
 къ оси Z перпендикулярна. Величина этой другой со-
 ставляющей будетъ равна проеции силы R на плоскость

x, y, m, e

$$P = R \sin \theta$$

Пусть P , m, e , $np(R)$ представлено непрерывно через точку O ,



так как направление
смысл R происходит через
ось Z . Смысл P
размещен на z -оси состав-
ляющий: -

$$X = -P \cos \theta = -P \frac{x}{z}$$

$$Y = -P \sin \theta = -P \frac{y}{z},$$

где $z = om$

Получив первую gla gla gla
перпендикулярная gla gla gla

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -P \frac{x}{z}$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -P \frac{y}{z}$$

Из этих уравнений можно получить интегрируе-
мые образы: - умножив первое уравнение на y ,
второе на x и вычитая первое из второго, получим: -

$$m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = 0$$

или

$$x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

Первая часть этого уравнения) можно было преоб-
разовать, обращая внимание на следующие тождества: -

$$\frac{d}{dt} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = x \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \frac{dx}{dt} - y \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt}$$

Поэтому: -

$$\frac{d}{dt} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = 0$$

Интерпретируем:-

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = C \dots \dots (1)$$

Формула (1) представляет так называемый интеграл площадей.

Чтобы понять такое название, преобразуем первую часть нашей формулы, вводя полярные координаты ρ и θ . Мы имеем:-

$$\rho^2 = x^2 + y^2; \quad \arctg \frac{y}{x} = \theta$$

Возвращаясь от обиходных значений второго равенства производную по времени:-

$$\frac{x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}}{x^2} = \frac{d\theta}{dt} \quad \text{или}$$

$$\frac{x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}}{x^2 + y^2} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = \frac{d\theta}{dt} (x^2 + y^2)$$

На основании этого нашего интеграла (1) можно написать так:-

$$\rho^2 \frac{d\theta}{dt} = C$$

Или $\frac{\rho^2 d\theta}{2}$, как было показано в приложении Аппенди к Теории, есть элементарная площадь в полярных координатах; предположив, что в продолжении времени dt проходим m раз в m' , получим:-

$$\frac{\rho^2 d\theta}{2} = \text{пл. } \theta m m'$$

Назовем эту элементарную площадь ds , тогда

имеет:
$$r^2 d\theta = ds$$

Тогда формула (1) примет вид:—

$$\frac{ds}{dt} = \frac{c}{2} \dots (2)$$

Пусть проекция траектории на плоскость xy будет $m'm'$ назовем площадь $nom = \sigma$ и предположим, что при $t=0$ точка M проектировалась в n , тогда интегрируя (2) по dt и интегрируя найдем:

$$\sigma = \frac{ct}{2} + c'$$

Так как при $t=0$ и $\sigma=0$, то:

$$0 = 0 + c' \dots c' = 0 \text{ и } \sigma = \frac{ct}{2}$$

Это равенство дает теорему площадей, которая формулируется так: Если направление силы постоянно проходит через ось Z , то проекция материальной точки на плоскость xy описывает путь, полярная площадь которого увеличивается пропорционально времени.

Перейдем теперь к рассмотрению теоремы площадей в случае центральных сил, т. е. таких направлений которые постоянно проходят через одну и ту же точку, называемый центром сил. Приняв эту точку за начало координат, определим составляющие X, Y, Z . Мы имеем:—

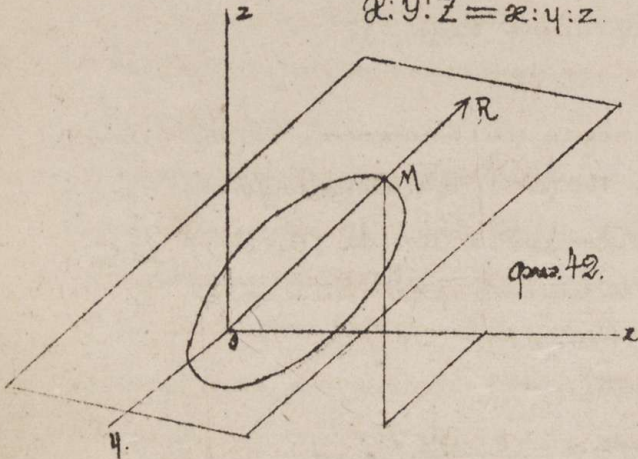
$$X = R \cos \alpha = R \frac{x}{r}$$

где r есть радиус-вектор; точно так же найдем:

$$y = R \frac{y}{z} \text{ и } z = R \frac{z}{z}$$

иначе будем иметь: -

$$R: y: z = x: y: z.$$



Нам сию криво-
ую со знаком +,
так как мы при-
нимаем сию P
оптимально.
Если сию R была
нормальной, то
в формуле вместо

R , нужно было бы взять $-R$; дифференциальные урав-
нения будут: -

$$m \frac{dx}{dt^2} = R \frac{x}{z} \dots \dots (1)$$

$$m \frac{dy}{dt^2} = R \frac{y}{z} \dots \dots (2)$$

$$m \frac{dz}{dt^2} = R \frac{z}{z} \dots \dots (3)$$

Так как здесь сию пересечется каждую из осей
координат, то можно написать три интеграла
площадей. Для наущения 1^{го} нужно (2) уравнение вы-
нести на z , dz на y и вынести z из z , найдя
по предыдущему;

$$y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} = A.$$

где A произвольное постоянное

Потому подобным же образом найдем: -

$$z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} = B.$$

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = C$$

где B и C — произвольные постоянные

B и C предыдущих уравнений, когда мы предполагаем, что сила проходит через ось Z , иными словами и того только по-сильский интеграл.

Выведем теперь симметрии, вытекающие из трех найденных интегралов поверхностей. Умножив их поочередно на x, y, z и складывая, получим:

$$Ax + By + Cz = xz \frac{dz}{dt} - zx \frac{dy}{dt} + yz \frac{dx}{dt} - xy \frac{dz}{dt} + zx \frac{dy}{dt} - zy \frac{dx}{dt}$$

$$Ax + By + Cz = 0. \quad (1)$$

Отсюда уравнение должно во всякое время удовлетворять координаты движущейся точки, так как это уравнение первой степени и не имеет ни одного из-вращения, но оно принадлежит плоскости, проходящей через начало координат. Отсюда заключаем, что во всякое время траектория центрального силы находится в одной и той же плоскости и плоскость эта проходит через центр силы.

Если для большого удобства примем эту плоскость за плоскость xy , то тогда для начала времени $z=0$ и $\frac{dz}{dt}=0$. Подставив эти величины, найдем:

$$A=0 \text{ и } B=0$$

Отсюда по формуле (1) $Cz=0$, т. е. для всякого времени $z=0$. Взаимности этого условия 1^{ой} и 2^{ой} интегралы поверхностей обратятся в тождество $0=0$ и y

как останется, только третий интеграл площадей:

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = C$$

которому, как было показано выше, можно дать вид:-

$$r^2 \frac{d\phi}{dt} = C \dots \dots (2)$$

Движение будет происходить в плоскости xy и будет характеризоваться тем, что площади, описываемые радиусом-вектором, будут увеличиваться пропорционально времени. Это следует из формулы (2). Из всего сказанного получаем следующую теорему площадей для центральной силы:-

Если сила центральная, то траектория будет плоская кривая, и плоскость ее будет проходить через центр сил. В этой плоскости точка будет двигаться так, что площади, описываемые радиусом-вектором пропорциональны времени

Обратная теорема площадей

Докажем обратную теорему площадей, т.е. допустим, что траектория плоская и площади, описываемые радиусом-вектором увеличиваются пропорционально времени и докажем, что сила будет центральной.

Предположим, что при какой-нибудь начальной скорости

материальная точка отсчитывается траекторию $M'M''$.

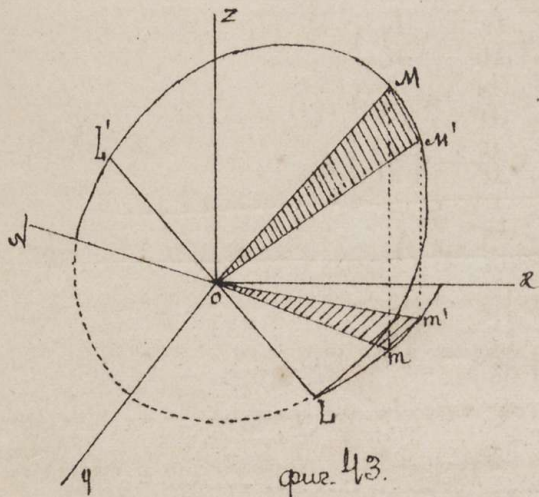


рис. 43.

При этом ее радиус-вектор OM из плоскости xy траектории отсчитывается площади, пропорциональные времени. Получим, что площадь $OMM' = dS$. Проектируем эту элементарную площадь на плоскости xy . Пусть площадь $OMM' = dS_x$; если назовем сечение

α, β и γ углами, которые нормаль ON к плоской траектории образует с осями координат, то найдем, что плоскость траектории образует с плоскостью xy угол α , так что:

$$dS_x = dS \cos \alpha$$

Пусть $\frac{dS}{dt} = \epsilon$, где $\epsilon = \text{const}$, так как теорема площадей удобна тем, что плоской траектории; тогда

$$dS = dt \epsilon$$

Подставляя, найдем: —

$$dS_x = \epsilon \cos \alpha dt; \quad \frac{dS_x}{dt} = \epsilon \cos \alpha$$

Положим также, найдем, что

$$\frac{dS_x}{dt} = h \cos \beta$$

$$\frac{dS_z}{dt} = h \cos \gamma$$

Или, наоборот,

получим:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot u = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{m}$$

или

$$Ru = \frac{P}{m}$$

откуда

$$u = \frac{P}{R \cdot m}$$

Подставляя во наши формулы и сокращая на m , найдем:-

$$x = \frac{P}{R} \alpha; \quad y = \frac{P}{R} \gamma; \quad z = \frac{P}{R} z.$$

Это суть те формулы, которых мы вывели для центрального сил.

Формулы Binet'a

Выведем основные формулы, служащие для решения задачи о движении материальной точки под действием центральной силы.

Мы знаем, что во этом случае траектория будет плоской; примем эту плоскость за плоскость полярных осей координат и для большего удобства законим примем центр силы, а полярную ось направим как надует через полюс. Между извлечением радиуса вектора r и полярным углом φ будет на основании теоремы площадей существовать следующая связь:-

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = C \dots \dots (1)$$

Дадим теперь формулы для скоростей и для движу-

щей силы, выражая в них все производные не по времени, а по независимому переменному φ , так как по формуле (1) dt может быть заменено $d\varphi$.

Обращаясь к определению скорости. Мы имеем:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Подставляя сюда выражение элементарной дуги в полярных координатах

$$ds = \sqrt{dz^2 + z^2 d\varphi^2}$$

получим:

$$v^2 = \frac{dz^2}{dt^2} + z^2 \frac{d\varphi^2}{dt^2} \dots \dots (2)$$

Заменяя здесь dt ее величину чрез элементарное угло $d\varphi$ и вместо того вместо радиус-вектора z — введем обратно величину:

$$u = \frac{1}{z}$$

Из формулы (1) имеем:—

$$dt = z^2 \frac{d\varphi}{c} = \frac{d\varphi}{u^2 c}$$

Встав, так как $z = \frac{1}{u}$, то $dz = -\frac{du}{u^2}$. Подставляя это в формулу (2), получим:

$$v^2 = \frac{du^2}{u^4} : \frac{d\varphi^2}{u^4 c^2} + \frac{1}{u^2} d\varphi^2 : \frac{d\varphi^2}{u^4 c^2} = c^2 \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + c^2 u^2$$

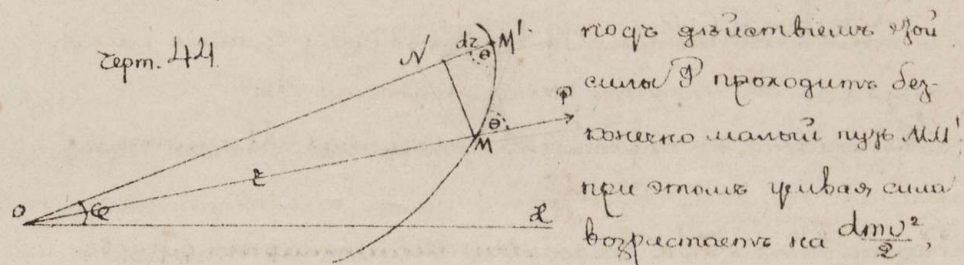
или

$$v^2 = c^2 \left[u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 \right] \dots \dots (3)$$

Это и есть искомая формула для скорости

Переходим теперь к выводу формулы для определения величины центральной силы; для этого воспользуемся теоремою живых сил. Будем считать силу P положительной, если она отталкивается от центра O и отрицательной,

если она притягивается. Пусть материальная точка



ноже движение по силе P происходит без всякого малюй пути MM' при этом убавая сила возрастает на $\frac{dmv^2}{2}$, это по теореме живых сил равно элементарной работе. Называя θ угол, который направление силы образует с направлением пути $MM' = ds$, найдем эту элементарную работу:

$$P ds \cos \theta = PM'N$$

новъ элементарный треугольник NMM' $ds \cos \theta = dz$,

поэтому $P ds \cos \theta = P dz$.

Послеобразим, получаем:-

$$P dz = d \frac{mv^2}{2}$$

Поздавляя сюда вместо v^2 его величину изъ формулы (3), измѣняя z на u , а dz на $-\frac{du}{u^2}$, получим:-

$$- \frac{P du}{u^2} = \frac{mc^2}{2} d \left[u^2 + \left(\frac{du}{de} \right)^2 \right]$$

Врени дифференцируя, считая e независимымъ переменнымъ, получимъ

$$- \frac{P du}{u^2} = mc^2 \left\{ u \cdot du + \frac{du \cdot d^2 u}{de^2} \right\}$$

Сокращаемъ на du и определяемъ P .

$$P = - mc^2 u^2 \left(u + \frac{d^2 u}{de^2} \right) \dots \dots (4)$$

Это и есть формула Binet'a.

Разсмотримъ теперь.

Движение планетъ.

Планеты при своемъ движении подчиняются тремъ законамъ, которые были найдены изъ наблюдений астрономовъ Кеплеромъ и известны подъ его именемъ.

Законъ 1^й. Все планеты движутся по коническимъ сечениямъ, въ одномъ изъ фокусовъ которыхъ находится солнце.

Законъ 2^й. Площади, описываемыя радиусомъ-векторомъ планеты, пропорциональны временимъ.

Законъ 3^й. Квадраты времени обращения планетъ относятся какъ кубы большихъ полуосей ихъ орбитъ.

Третий законъ относится только къ планетамъ и кометамъ, движущимся по параболамъ. *Меллеру*

Выведемъ главные свойства этихъ законовъ.

На основаніи 1^{го} и 2^{го} законовъ заключаемъ, что орбиты будутъ плоскія и что относительно фокуса (солнца) соблюдается правило площадей. Отсюда вытекаетъ по обратной теоремѣ площадей, что планеты движутся подъ дѣйствіемъ центральной силы, имѣющей центръ въ солнцѣ.

Далѣе, пользуясь 1^{мъ} закономъ и формулою Binet¹, можно опредѣлить силу величину центральной силы.

Въ коническихъ сеченіяхъ имѣются въ полярныхъ координатахъ

при полюсе, взятом в фокусе следующего уравнение: -

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$$

(здесь p - параметр, а e - эксцентриситет и если $e < 1$, то будет эллипс, если $e = 1$ - парабола и если $e > 1$ - гипербола)

Также это:

$$u = \frac{1}{p}(1 + e \cos \varphi)$$

Возьмем отсюда вторую производную, имеем: -

$$\frac{du}{d\varphi} = -\frac{e \sin \varphi}{p}, \quad \frac{d^2 u}{d\varphi^2} = -\frac{e \cos \varphi}{p}$$

Подставим ее в формулу Binet'a

$$F = -c^2 u^2 m \left(\frac{1}{p} + \frac{e \cos \varphi}{p} - \frac{e \cos \varphi}{p} \right)$$

$$F = -\frac{c^2}{p} \cdot \frac{m}{u^2}; \quad (u = \frac{1}{r})$$

Или, полагая, $\frac{c^2}{p} = \mu$, найдем:

$$F = -\frac{\mu m}{r^2}$$

Таким образом видим, что планеты притягиваются к солнцу с силой прямо пропорционально массам планет и обратно пропорционально квадратам расстояний от солнца. Но пока мы можем предположить, что для каждой планеты μ есть величина/размерная; 3^й закон Кеплера показывает, что μ есть величина постоянная.

Площадь эллипса, как известно, равна произведению его полуосей, фокального полу на π .

Возьмем орбиту, полурадиус которой a и b и по которой планета совершает полный оборот за время T . Площадь, описываемая радиусом-вектором за время T будет

Пав. В каждую единицу времени будет отниматься площадь: -

$$\frac{\pi ab}{T}$$

Эта величина выражается через $\mathcal{L}_c$, так как:

$$c = \frac{z^2 d\sigma}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\sigma^2}{dt}$$

т.е. представляется отношением двойной площади к dt (т.к. $z^2 d\sigma$ есть двойная площадь). Отсюда

$$d\sigma = \mathcal{L}_c dt$$

Взяв интеграл от $t=0$ до $t=1$ получим:-

$$\sigma = \frac{\mathcal{L}_c}{2}$$

т.е. площадь, отнимаемая в единицу времени $= \frac{\mathcal{L}_c}{2}$; значит:

$$\frac{\pi ab}{T} = \frac{\mathcal{L}_c}{2} \dots \dots (1)$$

Далее по 3-му закону, отношение:-

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{const} \dots (2)$$

Подставляем в формулу (1) вместо $\mathcal{L}_c$ его величину через μ , именно:

$$\frac{c^2}{p} = \mu \quad \text{и} \quad c = \sqrt{p\mu}$$

тогда получим:

$$\frac{\pi ab}{T} = \frac{2\sqrt{p\mu}}{2} \quad \text{откуда} \quad \sqrt{\mu} = \frac{2\pi ab}{T^2 \sqrt{p}}$$

но известно, что $p = \frac{b^2}{a}$, следовательно

$$\sqrt{\mu} = \frac{2\pi ab}{T^2 \frac{b}{\sqrt{a}}} = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{T^2}$$

Возводя в квадрат, получим:

$$\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$$

Но по условию (2)

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{const}$$

следовательно и

$$\mu = \text{const.}$$

Перейдем теперь к обратной задаче, т.е. допустим, что планета движется под действием гравитационной силы солнца обратно пропорционально квадрату расстояния и выведем закон движения планеты. Пусть дано:

$$F = -\frac{m\mu}{r^2} = -m\mu u^2$$

и требуется определить орбиту планеты; для этого пусть величина u в функции φ . Прибавим к функции $Biret'$ и представим, в нее данную величину ρ , получим:

$$-m\mu u^2 = -m\epsilon^2 u^2 \left(u + \frac{d^2 u}{d\epsilon^2} \right)$$

откуда

$$u = \epsilon^2 \left(u + \frac{d^2 u}{d\epsilon^2} \right)$$

Чтобы интегрировать это уравнение, введем новую переменную, полагая $\frac{du}{d\epsilon} = u'$ и полагая зависящее переменное u , получим

$$\frac{d^2 u}{d\epsilon^2} = \frac{du'}{du} \cdot \frac{du}{d\epsilon} = \frac{u' du'}{du}$$

представляя имеем:—

$$u = \epsilon^2 \left(u + \frac{u' du'}{du} \right)$$

или

$$2u u' = \epsilon^2 (2u u' + u' du')$$

Интегрируя получим:—

$$2u u' + \alpha = \epsilon^2 (u'^2 + u'^2) \dots (1)$$

Что касается α произвольного постоянного α , то из определения его величины нужно дать какое-то положение и начальную скорость планеты. Пусть для $u = u_0$ имеем $v = v_0$ и найденный интеграл представим так:—

$$2u u' + \alpha = c^2 \left[u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 \right] = V^2 \quad (\text{из формулы скорости})$$

Подставляя сюда u_0 и V_0 , найдем:

$$2u u_0 + \alpha = V_0^2$$

отсюда

$$\alpha = V_0^2 - 2u u_0 \dots (2)$$

Для дальнейшего интегрирования определим из формулы (1)

$$u'^2 = \frac{2u u'}{c^2} + \frac{\alpha}{c^2} - u^2 \text{ или}$$

$$u' = \pm \sqrt{\frac{2u u'}{c^2} + \frac{\alpha}{c^2} - u^2} = \frac{du}{d\varphi}$$

Из этого определим u , как функцию φ , надо в этой формуле опустить переписанные и совершить интегрирование. Получим: -

$$d\varphi = \pm \frac{du}{\sqrt{\frac{\alpha}{c^2} + \frac{2u u'}{c^2} - u^2}} = \pm \frac{du}{\sqrt{\frac{u^2}{c^2} + \frac{\alpha}{c^2} - \left(u - \frac{u'}{c^2}\right)^2}}$$

Получим квадратичную формулу: -

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{1}{p^2} \dots (3)$$

$$\frac{u^2}{c^4} + \frac{\alpha}{c^2} = \frac{e^2}{p^2} \dots (4)$$

Из этих формул можно определить новые, постоянные, p и e , подставляя: -

$$d\varphi = \pm \frac{du}{\sqrt{\frac{e^2}{p^2} - \left(u - \frac{1}{p}\right)^2}} = \pm \frac{p \cdot du}{\sqrt{1 - \left(\frac{u p}{e} - 1\right)^2}}$$

Первое слагаемое надо брать + или -, смотря по тому, будет ли величина u возрастать вместе с увеличением φ или наоборот. Допустим, что при равномерном движении радиус-вектор r будет возрастать с увеличением угла φ , тогда u будет уменьшаться с увеличением угла φ и надо будет взять знак -, т.е.:

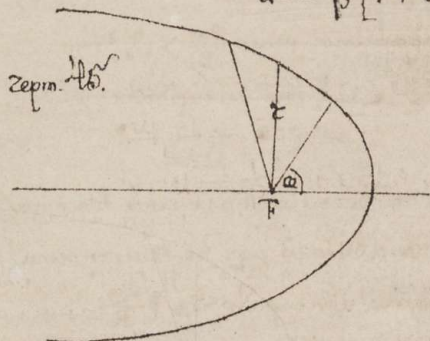
$$d\varphi = - \frac{p \cdot du}{\sqrt{1 - \left(\frac{u p}{e} - 1\right)^2}}$$

интегрируя получим:

$$\alpha + \beta = \arccos \frac{ur-1}{e}, \text{ откуда}$$

$$\frac{ur-1}{e} = \cos(\alpha + \beta). \text{ Следовательно:}$$

$$u = \frac{1}{r} [1 + e \cos(\alpha + \beta)]$$



Это и есть полярное уравнение

конического сечения. Если в этой

канонической формуле положить

$$\beta = 0, \text{ то } u = \frac{1}{r} (1 + e \cos \alpha)$$

т.е. в этой точке ось будет направлена

ось конического сечения, проходящая через фокусы и при этом она будет направлена в сторону меньшего радиуса вектора. Для того, чтобы определить какое именно коническое сечение мы будем иметь, надо обратиться к величине эксцентриситета e . Если $e < 1$, то мы будем иметь эллипс, если $e > 1$, то гиперболу и если $e = 1$ - параболу. Это различие вполне характеризуется по начальным данным, т.е. по началу положения и начальной скорости точки. Действительно, при помощи формул:

$$\frac{u}{c^2} = \frac{1}{p} \text{ и } \frac{u^2}{c^4} = -\frac{\alpha}{c^2} + \frac{e^2}{p^2};$$

вторую формулу можно преобразовать с помощью 1^{ой}, получим:

$$\frac{1}{p^2} + \frac{\alpha}{c^2} = \frac{e^2}{p^2}, \text{ откуда } \frac{e^2 - 1}{p^2} = \frac{\alpha}{c^2}$$

Мы видим, что при $\alpha < 0$ и $e < 1$, т.е. траектория будет эллипс при $\alpha > 0 \dots e > 1$, т.е. траектория будет гиперболой при $\alpha = 0$, т.е. $e = 1$, мы получим параболу.

Такие образы все сводится к определению знака постоянного α . Это же касается и самой α , то было выведено, что

$$\alpha = V_0^2 - 2\mu_0 = V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}$$

Отсюда получаем следующую правду: если $\frac{2\mu}{r_0} > V_0^2$, то траектория будет эллипс, если $\frac{2\mu}{r_0} < V_0^2$, то гипербола и если $\frac{2\mu}{r_0} = V_0^2$, то парабола

При определении падения тела с весьма большой высоты, мы показали, что скорость тела, упавшего из безконечности на расстоянии R_0 от притягивающего центра есть $\sqrt{\frac{2\mu}{R_0}}$. Если бы тело, упавшее из безконечности дошло на расстояние R_0 от притягивающего центра, то его скорость была бы:

$$w = \sqrt{\frac{2\mu}{R_0}}$$

Наше приращение состоит в том, что траектория эллипс, если начальная скорость, которую имеет планета во данном месте, меньше этой скорости w , траектория будет гипербола, если начальная скорость будет больше w и парабола, если обе скорости равны. Это же касается и направления начальной скорости, то она никакого влияния на тип кривой не имеет.

Перейдем теперь к определению связи между временем и положением планеты. Эта задача решается так просто как кажется. Для этого уравнение траектории будет:

$$r = \frac{p}{1 + \cos \varphi}$$

Для определения связи между φ и t , надо воспользоваться теоремой площадей. Имеем:

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = c.$$

Отсюда $c dt = r^2 d\varphi = \frac{p^2}{(1 + \cos \varphi)^2} d\varphi$

Чтобы упростить интегрирование вспомогательное уравнение, преобразуем ее, помня, что

$$1 + \cos \varphi = 2 \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)$$

тогда

$$c dt = \frac{p^2 d\varphi}{4 \cos^4 \left(\frac{\varphi}{2} \right)} = \frac{p^2}{4 \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)} d\varphi \sec^2 \frac{\varphi}{2}$$

или

$$c dt = \frac{p^2}{4 \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)} d\varphi (1 + \tan^2 \frac{\varphi}{2})$$

и

$$c dt = \frac{p^2}{2} \left\{ \frac{1}{\cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)} \frac{d\varphi}{2} + \tan^2 \frac{\varphi}{2} \frac{\frac{d\varphi}{2}}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} \right\}$$

интегрируя, $\frac{2c}{p^2} t$ и интегрируя, получим:

$$\frac{2c}{p^2} t + \tau = \tan \left(\frac{\varphi}{2} \right) + \frac{1}{3} \tan^3 \left(\frac{\varphi}{2} \right)$$

Для определения произвольного постоянного τ полагаем, что при $t=0$ и $\varphi=0$, т.е. это время, считается от момента, когда комета находится всего ближе к солнцу, тогда найдем

$$0 + \tau = 0 \text{ или } \tau = 0$$

Таким образом окончательно получим:

$$t = \frac{p^2}{2c} \left\{ \tan \left(\frac{\varphi}{2} \right) + \frac{1}{3} \tan^3 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right\}$$

В этой формуле обыкновенно c замещают его величиной, именно:—

$$c = \sqrt{\mu}$$

на основании априори $\frac{a}{c^2} = \frac{1}{p}$. Тогда

$$t = \frac{p^{3/2}}{2\sqrt{\mu}} \left\{ \tan \left(\frac{\varphi}{2} \right) + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{\varphi}{2} \right\} \dots (K)$$

Задача об определении места кометы для данного времени решается помощью уравнения (K); при этом приходится определять φ по данному t по формуле уравнения 3^{eq} степени (Кордана), или же решать задачу по-

точка N проектируется в точку M и площадь ANF проектируется в AFM , если так, то

$$\text{пл.}(AFM) = \text{пл.} \sigma = \text{пл.}(ANF) \cos \varphi$$

$$\text{или } \text{пл.}(AFM) = \text{пл.}(AN') \frac{b}{a}$$

Но $\text{пл.}(AN')$ можно взять полусумму соответствующих: если из площади сектора $ON'A$ вычесть площадь треугольника OFN' , т.е.

$$\text{пл.}(AN') = \text{пл.}(ON'A) - \text{пл.}(OFN')$$

$$\text{или } \text{пл.}(AN') = \frac{a^2 \varepsilon}{2} - \frac{ab \sin \varepsilon}{2} = \frac{a^2}{2} (\varepsilon - e \sin \varepsilon)$$

$$\text{так что } \sigma = \frac{a^2}{2} (\varepsilon - e \sin \varepsilon) \frac{b}{a} = \frac{ab}{2} (\varepsilon - e \sin \varepsilon) \dots (2)$$

Подставляя в формулу (1) и получим:

$$t = \frac{ab}{c} (\varepsilon - e \sin \varepsilon)$$

Исклонение c мы найдем $\frac{c^2}{p} = \mu$ отсюда

$$c = \sqrt{p\mu} = \sqrt{\frac{b^2}{a}} a = \frac{b\sqrt{\mu}}{\sqrt{a}}$$

Подставив и найдем:

$$t = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} (\varepsilon - e \sin \varepsilon)$$

Из этой формулы будем иметь:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} t + e \sin \varepsilon.$$

если $\varepsilon = 2\pi$, то $t = T$ (время полного оборота) и

$$T = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} (2\pi) = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}$$

откуда

$$\frac{T}{a^{3/2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \text{ или } \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu}$$

Если планеты возмущаются из какой нибудь точки пространства с равными скоростями, но в различных направлениях, то все их орбиты будут иметь одну и ту же

Значитъ планеты действительно все они должны совершать свои полные обороты въ одно и то же время.

Для доказательства воспользуемся формулами, которые мы вывели при интегрировании дифференциального уравнения планеты. Эти формулы были следующие:—

$$\frac{u}{c^2} = \frac{1}{p} \dots (3), \quad \frac{u^2}{c^2} + \frac{\alpha^2}{c^2} = \frac{e^2}{p^2} \dots (4) \text{ и}$$

$$\alpha = V_0^2 - 2u u_0 \dots (5)$$

Возведем формулу (3) въ квадратъ и вычитая изъ формулы (4), получимъ

$$-\frac{\alpha^2}{c^2} = \frac{1-e^2}{p^2}$$

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

Представимъ сюда вместо α его величину изъ формулы (5), будемъ имѣть:—

$$\frac{2u u_0 - V_0^2}{c^2} = \frac{a^2 - a^2 \frac{b^2}{a^2}}{a^2} : p^2 = \frac{b^2}{a^2 p^2}$$

или

$$\frac{(2u u_0 - V_0^2)p}{c^2} = \frac{b^2}{a^2 p}$$

Вместо p представимъ $p = \frac{b^2}{a}$, следовательно:—

$$\frac{2u u_0 - V_0^2}{a} = \frac{b^2}{a^2 \frac{b^2}{a}} = \frac{1}{a}$$

такъ какъ $\frac{p}{c^2} = \frac{1}{u}$.

откуда

$$\frac{2}{c_0} - \frac{V_0^2}{u} = \frac{1}{a}$$

Но такъ какъ въ нашей задаче все планеты вращаются съ одинаковыми скоростями, то действительно а у нихъ одно и то же, а потому они имѣютъ одинаковыя T (полное время обращения)



① равновесии несвободной точки, не могу-
щей покинуть данную поверхность.

Пусть уравнение поверхности, которую материальная точка
не может покинуть, будет: -

$$f(x, y, z) = 0 \dots \dots (1)$$

Тогда координаты x, y, z при всяком их извлечении функции
удовлетворяют этому уравнению, следовательно zero калого, отсюда
приращения координат $\delta x, \delta y, \delta z$ за произвольный, безконечно
малый величины. Между ними будет существовать связь,
которая находится таким образом: Положим, что точка
получила возможное перемещение по поверхности в безконеч-
но малое положение. Тогда ее координаты x, y, z изменятся
на $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$. Так как координаты точки да-
же удовлетворяют уравнению (1), то:

$$f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) = 0$$

Разлагая 1^ю часть по формуле Тейлора, по степеням
приращений перемещений $\delta x, \delta y, \delta z$, получим:

$$f(x, y, z) + \frac{df}{dx} \delta x + \frac{df}{dy} \delta y + \frac{df}{dz} \delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \delta x^2 + 2 \frac{d^2 f}{dxdy} \delta x \delta y + 2 \frac{d^2 f}{dadz} \delta x \delta z + \right. \\ \left. + \frac{d^2 f}{dy^2} \delta y^2 + \frac{d^2 f}{dz^2} \delta z^2 + 2 \frac{d^2 f}{dydz} \delta y \delta z \right) + \dots = 0.$$

Первый член равен нулю по основанию 1^ю. Далее отбрасываю
члены, содержащие безконечно-малые перемещения во второй сте-
пени и во высших степенях, как безконечно малые вы-
сших порядков, получим: -

$$\frac{df}{dx} \delta x + \frac{df}{dy} \delta y + \frac{df}{dz} \delta z = 0 \dots \dots (2)$$

Это и есть условие, связывающее $\delta x, \delta y, \delta z$. Если дан из

проекций возможных перемещений, например δx и δy даны, то третью проекцию можно определить из формулы (2). Обращаясь теперь к рассмотрению задачи о равновесии точки на поверхности. Полагая, что x, y, z будут составляющими действующей силы, которые даны каково, как и функции координат положения материальной точки.

Для отыскания положения равновесия точки пользуются теоремой, по которой в положении равновесия:

$$x\delta x + y\delta y + z\delta z = 0 \dots\dots (3)$$

для всех возможных перемещений

Здесь, проекции возможных перемещений $\delta x, \delta y$ и δz , как было уже сказано не совсем произвольны, а отнесены уравнению (2). Будем считать $\delta x, \delta y$ за совершенно произвольные величины. Тогда можно из формулы (3) исключить зависящую проекцию δz с помощью формулы (2). Исключение сделаем по способу неопределенных множителей. Умножим уравнение (2) на неопределенный множитель λ и прибавим к формуле (3), получим:-

$$(x + \lambda \frac{dt}{dx})\delta x + (y + \lambda \frac{dt}{dy})\delta y + (z + \lambda \frac{dt}{dz})\delta z = 0$$

Выберем неопределенный множитель λ так, чтобы коэффициенты при δz обращались в 0, т.е. чтобы

$$z + \lambda \frac{dt}{dz} = 0$$

Тогда у нас останется условие

$$(x + \lambda \frac{dt}{dx})\delta x + (y + \lambda \frac{dt}{dy})\delta y = 0$$

которое должно быть удовлетворено при совершенно про-

извлечены δx и δy . Возмущение произвольности δx и δy можно положить:-

$$\delta x \neq 0 \quad \delta y = 0$$

тогда получим:-

$$\delta x \left(X + \lambda \frac{dt}{dx} \right) = 0$$

а так как $\delta x \neq 0$, то

$$X + \lambda \frac{dt}{dx} = 0$$

и остается условие равновесия

$$\left(Y + \lambda \frac{dt}{dy} \right) \delta y = 0$$

которое очевидно будет удовлетворено при всяком безконечно малом δy и следовательно

$$Y + \lambda \frac{dt}{dy} = 0$$

Выбрав все, поставленные нами условия, а также и то, которое служит для определения λ , получим три условия равновесия.

$$\left. \begin{aligned} X + \lambda \frac{dt}{dx} &= 0 \\ Y + \lambda \frac{dt}{dy} &= 0 \\ Z + \lambda \frac{dt}{dz} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (4)$$

Это суть уравнения равновесия рассматриваемой материальной точки. Придавшие же к ним 1^е, вышеизложенное, это можно назвать как поверхностью; получив 4 уравнения, из которых определится как неизвестный множитель λ , так и три координаты x, y, z , которых соответствуют три условия равновесия.

Возьмем пример:-

(б) x, y и z переся λ и вставляя в ур-е (5), изъ которыхъ можно будетъ опредѣлить λ . Имеемъ:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{mga^2 \cos \alpha}{2\lambda} \\ y &= \frac{mg b^2 \cos \beta}{2\lambda} \\ z &= \frac{mg c^2 \cos \gamma}{2\lambda} \end{aligned} \right\} \dots\dots (7)$$

Подставляя эти величины въ формулу (5), имеемъ:

$$\frac{m^2 g^2}{4\lambda^2} (a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma) - 1 = 0$$

опредѣлимъ отсюда λ , имеемъ: —

$$\lambda = \pm \frac{mg}{2} \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma}$$

Эту величину λ нужно подставить въ формулу (7) и тогда найдемъ неслыханъ формулы равенствъ:

$$\left. \begin{aligned} x &= \pm \frac{a^2 \cos \alpha}{\sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma}} \\ y &= \pm \frac{b^2 \cos \beta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma}} \\ z &= \pm \frac{c^2 \cos \gamma}{\sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma}} \end{aligned} \right\} \dots\dots (8)$$

Что касается до знака $+$ или $-$, то они показываютъ еще существованіе двухъ положеній, именно, приписывая λ знакъ $+$ формулы въ формулахъ (8) брать также $+$ и тогда получимъ две равенствъ къ некоторую точку M . Наоборотъ, взявши λ со знакомъ $-$ формулы будемъ въ формулахъ (8) брать знакъ $-$ и тогда получимъ две равенствъ прямо противоположную точку M' . Такъ какъ наша точка не можетъ оставить поверхности, то оба положенія, очевидно, равновозможны. Или же тогда идемъ на поверхность

твердого тела, и можно покинуть его только в одной стороне, то было бы возможно одно верхнее положение. Оттого сейчас будет разделение, когда разсмотрим сейчас одностороннего перемещения

Уравновесии материальной точки, лежащей на пересечении двух поверхностей

Положив, что материальная точка лежит на пересечении двух поверхностей и не может покинуть ни той ни другой. Пусть уравнения поверхностей будут:—

$$f(x, y, z) = 0 \text{ и } g(x, y, z) = 0$$

Так как точка лежит на первой поверхности, то проекция ее возможно перемещения $\delta x, \delta y, \delta z$ отысканы условием:—

$$\frac{df}{dx} \delta x + \frac{df}{dy} \delta y + \frac{df}{dz} \delta z = 0 \dots (1)$$

Выводя то же, что она лежит на 2^{ой} поверхности, проекция ее перемещения отысканы вторым условием:

$$\frac{dg}{dx} \delta x + \frac{dg}{dy} \delta y + \frac{dg}{dz} \delta z = 0 \dots (1')$$

Таким образом в условии равновесия

$$X \delta x + Y \delta y + Z \delta z = 0 \dots (2)$$

можно считать произвольного только одну проекцию, например δx . По формулу δy и δz определяется по формулам (1) и (1)'. Исклоним зависимость переменных δy и δz

Для этого умножим формулы (1) и (1)' на λ и λ_1 и прибавим ко (2), получим

$$(X + \lambda \frac{df}{dx} + \lambda_1 \frac{dg}{dx}) \delta x + (Y + \lambda \frac{df}{dy} + \lambda_1 \frac{dg}{dy}) \delta y + (Z + \lambda \frac{df}{dz} + \lambda_1 \frac{dg}{dz}) \delta z = 0$$

Выберем λ и λ_1 так, чтобы:

$$y + \lambda \frac{dt}{dy} + \lambda_1 \frac{dt_1}{dy} = 0 \text{ и}$$

$$z + \lambda \frac{dt}{dz} + \lambda_1 \frac{dt_1}{dz} = 0$$

Потом y какъ остается: -

$$\partial x (x + \lambda \frac{dt}{dx} + \lambda_1 \frac{dt_1}{dx}) = 0$$

И такъ какъ ∂x здѣсь совершенно произвольно, то необходимо, чтобы:-

$$x + \lambda \frac{dt}{dx} + \lambda_1 \frac{dt_1}{dx} = 0$$

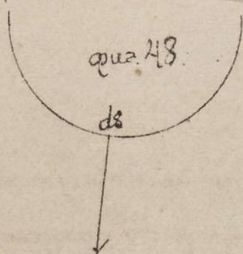
Получивъ образцы или каковы три ур-ия:-

$$\left\{ \begin{array}{l} x + \lambda \frac{dt}{dx} + \lambda_1 \frac{dt_1}{dx} = 0 \\ y + \lambda \frac{dt}{dy} + \lambda_1 \frac{dt_1}{dy} = 0 \\ z + \lambda \frac{dt}{dz} + \lambda_1 \frac{dt_1}{dz} = 0 \end{array} \right\} \dots \dots (3)$$

Прибавивъ къ этимъ тремъ уравнениямъ ур-ие поверхности:-

$$f(x, y, z) = 0 \text{ и } f_1(x, y, z) = 0$$

каждое изъ пяти ур-ий, изъ которыхъ опредѣлились при данныхъ силахъ два неизвѣстныхъ множителя λ и λ_1 , и три координаты x, y, z , соответствующимъ равенствамъ. Не трудно



показать, что при равенствамъ можно, не выходя изъ представления каковыя поверхности, сила, действующая на точку, должна быть перпендикулярна къ этой силе. Пусть ds будетъ элементъ линии, а dx, dy и dz проекции этого элемента по осямъ координатъ.

Умноживъ ур-ия (3) на dx, dy и dz и складывая ихъ, по-

суммируя:

$$Xdx + Ydy + Zdz + \lambda \left(\frac{dt}{dx} dx + \frac{dt}{dy} dy + \frac{dt}{dz} dz \right) + \lambda_1 \left(\frac{dt}{dx} dx + \frac{dt}{dy} dy + \frac{dt}{dz} dz \right) = 0.$$

Так как ds есть возможное перемещение, то dx , dy и dz суть произвольные возможные перемещения и потому удовлетворяют уравнениям (1a). Взаимодействие этого агента при λ и λ_1 равно нулю и мы получаем:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0.$$

Или, называя равнодействующую силу через P , получим:

$$Pds \left[\frac{X}{P} \frac{dx}{ds} + \frac{Y}{P} \frac{dy}{ds} + \frac{Z}{P} \frac{dz}{ds} \right] = Pds \cos \theta = 0$$

где θ — угол между направлением силы и направлением перемещения ds . Так как $\cos \theta = 0$ то $\theta = 90^\circ$, т.е. сила перпендикулярна к линии возможного перемещения.

Если материальная точка движется по поверхности,

уравнение которой есть:—

$$f(x, y, z) = 0 \dots (2)$$

и которую она не может покинуть, то уравнение движения, полученные из функции (1) будут:

$$\left. \begin{aligned} x - m \frac{dx}{dt^2} + \lambda \frac{dt}{dx} &= 0 \\ y - m \frac{dy}{dt^2} + \lambda \frac{dt}{dy} &= 0 \\ z - m \frac{dz}{dt^2} + \lambda \frac{dt}{dz} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3).$$

Прибавляя к этим трем уравнениям уравнение поверхности (2) мы можем поступить так: исключить из 4 полученных уравнений λ и Z , тогда получим 2 дифференциальных уравнения 2^{го} порядка относительно x и y и независимого переменного t . Устранив из этих уравнений x и y , как

После года
всего 8 дней
исследования
мысли

Дальше
идет

как некоторая функция времени t . Пусть было из-
формулы (2), найдем и Z , как функцию времени. При-
 этом, если бы мы умели определить λ , то представ-
ила бы найденное значение для x, y, z в одно из дифферен-
циальных ур-ий (3), могли бы найти λ тоже как функ-
цию времени. Если бы точка могла покинуть поверхность.

$$f(x, y, z) = C \dots (4)$$

Сходясь к ней, в определенную сторону, то против уравне-
ний (3) мы имели бы еще условие $\lambda \dot{f} > 0$, которое тре-
бует, чтобы λ во все время движения имело знак, одина-
ковый со $\dot{f}$. В тот момент, когда это условие пере-
стает выполняться, точка сойдет с поверхности.

Для рассмотрения движения материальной точки по
линии, ур-ие которой имеет:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y, z) &= 0 \\ f_2(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

то на основании сказанного о равновесии точки, учтя-
шей на пересечении двух поверхностей будем иметь
следующие дифференциальные ур-ия движения:

$$\left. \begin{aligned} X - m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{df_1}{dx} + \lambda' \frac{df_2}{dx} &= 0 \\ Y - m \frac{d^2y}{dt^2} + \lambda \frac{df_1}{dy} + \lambda' \frac{df_2}{dy} &= 0 \\ Z - m \frac{d^2z}{dt^2} + \lambda \frac{df_1}{dz} + \lambda' \frac{df_2}{dz} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

Прибавив к ур-иям (6) уравнения линии (5) будем иметь
5 ур-ий, из которых можно будет определить x, y, z ,
 λ и λ' , тогда найдем одно ур-ие 2^{го} порядка относительно

и независимая переменная t , интегрируя которое, найдем x , как функцию времени t . После этого для определения y и z следует обратиться к уравн. (5). Если бы удалось определить λ и λ' , то нужно было бы найденное значение x, y, z в функции времени вставить во второе из уравн. (6); тогда бы нашли λ и λ' тоже в функции времени. Если бы материальная точка двигалась по пересечению двух поверхностей, уравнения которых:

$$f(x, y, z) = 0 \text{ и } f_1(x, y, z) = 0,$$

то кроме уравн. (6) имелись бы еще условия

$$\lambda \delta c > 0 \text{ и } \lambda' \delta c_1 > 0$$

т.е. что λ и λ' во все время движения должны иметь одинаковые знаки с δc и δc_1 . Если бы в какой-нибудь момент времени, например, λ' обратилось бы в нуль,

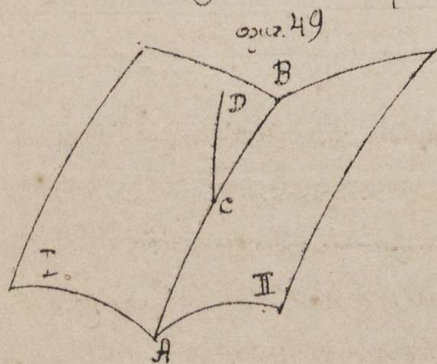


рис. 49
II — поверхность

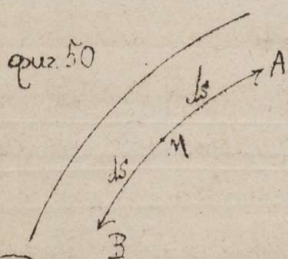
а после этого получили бы знак обратный с δc_1 , то после этого момента невозможно движение по линии пересечения поверхностей и в этот момент материальная точка стала бы двигаться, отпадая от



Теорема живых сил для материальной точки.

Если материальная точка несвободна и движется, по поверхности или по линии, то для всех ее возможных перемещений во всякий момент времени (возможных перемещения получаются, останавливая точку и подвигав ее, куда ее можно передвинуть) удовлетворяется формула

(1) Пусть dx, dy, dz будут проекции на оси координат действительного перемещения, которое точка получила



во время dt . Очевидно, это есть действительное перемещение, возникающее, если сразу остановить точку, независимо от времени, с тем одно из возможных.

При этом действительное перемещение ds всегда зависит от одного из пары двусторонних перемещений, так как точка в предыдущий момент прошла путь ds , направленный в противоположную сторону, поэтому формулу (1) можно написать со знаком равенства и положить в него:

$$\delta x = dx; \delta y = dy \text{ и } \delta z = dz$$

Тогда получим:

$$\left(X - m \frac{d^2x}{dt^2} \right) dx + \left(Y - m \frac{d^2y}{dt^2} \right) dy + \left(Z - m \frac{d^2z}{dt^2} \right) dz = 0$$

или:

$$Xdx + Ydy + Zdz = m \frac{dx d^2x + dy d^2y + dz d^2z}{dt^2}$$

Вещ существует силовая функция U , то

$$Xdx + Ydy + Zdz = dU$$

С другой стороны было показано, что

$$m \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = d \frac{mv^2}{2}$$

Таким образом

$$d \frac{mv^2}{2} = dU \text{ или } \frac{mv^2}{2} + C = U$$

Покажем, что во всяком движении $\mathcal{E} = U_0$ и $U = U_0$, как-
решающее соотношение —

$$\frac{mv_0^2}{2} + C = U_0$$

Откуда, вычитая, получим:—

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = U - U_0 \dots \dots (1)$$

Это и есть интеграл уравнений, выражающий, что
приращение кинетической энергии равно приращению силовой функ-
ции

Данное нами доказательство относится ко всякому
движению свободной точки, и, следовательно, ее состояние
никогда не зависит от времени

Сила нормального давления при дви-
жении точки по поверхности

При движении точки по поверхности, уравнение кото-
рой есть:—

$$f(x, y, z) = 0$$

будет:—

$$X - m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{df}{dx} = 0$$

$$Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} + \lambda \frac{dt}{dy} = 0$$

$$Z - m \frac{d^2 z}{dt^2} + \lambda \frac{dt}{dz} = 0$$

Было показано, что при равновесии точки, сопротивление, оказываемое ей поверхностью выражается формулой:

$$N = \lambda \Delta$$

где

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dt}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dt}{dz}\right)^2}$$

Пакъ какъ при движении точки силы гравитационныя и силы инерцiи во всякій моментъ времени уравновѣшиваются сопротивлениемъ поверхности, то и для силъ свѣта движения эго сопротивление будетъ выражаться формулой: -

$$N = \lambda \Delta$$

При этомъ какъ λ , такъ и Δ измѣняются со временемъ.

По закону гравитационнаго притягиванiя сила тяжести точки на поверхности равна противоположна силѣ N . Пакъ это эго равненiе Q выражается формулой: -

$$Q = -\lambda \Delta$$

Представимъ въ нашей ур-и движения величину Q какъ-нибудь: -

$$X - m \frac{d^2 x}{dt^2} = Q \frac{dt}{dx}$$

Силы казавшiяся α, β и γ . чины, образующиыя нормалью къ осамъ координатъ, то: -

$$\cos \alpha = \frac{\frac{dt}{dx}}{\Delta}, \cos \beta = \frac{\frac{dt}{dy}}{\Delta}, \cos \gamma = \frac{\frac{dt}{dz}}{\Delta}$$

Пакъ эго получимъ: -

$$\left. \begin{aligned} X - m \frac{d^2 x}{dt^2} &= Q \cos \alpha \\ Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} &= Q \cos \beta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 1)$$

$$Z - m \frac{d^2 z}{dt^2} = Q \cos \gamma \dots (1)$$

Здесь Q будет со знаком $+$, если сила давления на поверхность направлена в ту сторону нормали, которая характеризуется углами α, β, γ . Если же давление направлено в противоположную сторону, то Q будет отрицательно.

Припоминая из кинематики, что:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{v^2}{\rho} \cos \alpha + \frac{dv}{dt} \cos \alpha \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{v^2}{\rho} \cos \beta + \frac{dv}{dt} \cos \beta \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{v^2}{\rho} \cos \gamma + \frac{dv}{dt} \cos \gamma \end{aligned} \right\} 18$$

где ρ есть радиус кривизны в осевом, а α, β, γ суть углы касательной с осями.

Подставляя в формулы (1) и умножая соответственно

эти формулы на $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ и складывая, получим:

$$X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma - \frac{mv^2}{\rho} \{ \cos \alpha \cos \alpha + \cos \beta \cos \beta + \cos \gamma \cos \gamma \} - \frac{m dv}{dt} \{ \cos \alpha \cos \alpha + \cos \beta \cos \beta + \cos \gamma \cos \gamma \} = Q (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = Q$$

Не трудно заметить, что:

$$X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma = P \left\{ \frac{x}{\rho} \cos \alpha + \frac{y}{\rho} \cos \beta + \frac{z}{\rho} \cos \gamma \right\} = P \cos \vartheta$$

где ϑ — угол между силой P и нормалью к поверхности

$$\cos \alpha \cos \alpha + \cos \beta \cos \beta + \cos \gamma \cos \gamma = \cos \theta$$

где θ — угол между нормалью к поверхности и радиусом кривизны. Наконец:

$$\cos \alpha \cos \alpha + \cos \beta \cos \beta + \cos \gamma \cos \gamma = 0$$

А так как это выражение $\cos \theta$ — угол между нормалью к поверхности и между касательной, который равен

прямолиней.

Массы образцов найдем: —

$$Q = P \cos \varphi - \frac{mv^2}{R} \cos \theta. \dots (2)$$

— $\frac{mv^2}{R}$ представляет силу, направленную в сторону, противоположную радиусу кривизны и равно произведению массы на центростремительное ускорение — это есть так называемая центробежная сила. Формула (2) показывает, что давление движущейся точки на поверхность равно проекции на нормаль к поверхности силы движущей и силы центробежной.

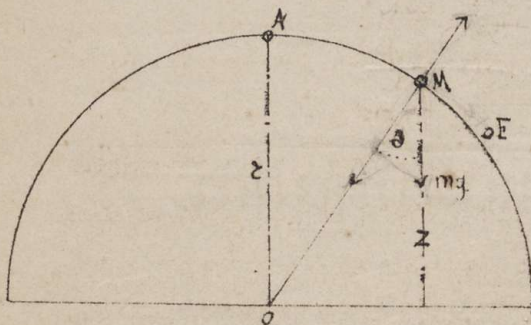


рис. 51.

Задача. Металлический шарик движется по внутренней поверхности сферы и из верхней точки выскочит по поверхности сферы. Определить в какой точке он сойдет с шара?

Возьмем какое нибудь произвольное положение М и определим в ней давление на поверхности сферы. Здесь сила движущая будет врос mg , центробежная сила будет направлена по радиусу меридиана (принимая направление нормаль от М к О)

Сила давления: —

$$Q = \mu p_u(mg) + \mu p_u\left(\frac{mv^2}{g}\right) = mg \cos \theta - \frac{mv^2}{g}$$

и

$$\cos \theta = \frac{z}{r}$$

Скорость может быть определена из теоремы сохранения энергии:

$$-\frac{mv^2}{2} - 0 = U - U_0 = -mgz + mgz_0$$

откуда:-

$$mv^2 = 2mg(z - z_0) \dots \text{при } z = 0$$

подставляя во выражение Q имеем:-

$$Q = mg\left(\frac{z}{r} - 2\frac{z - z_0}{r}\right)$$

в точке выхода $Q = 0$ и $\frac{z}{r} - 2\frac{z - z_0}{r} = 0$

откуда

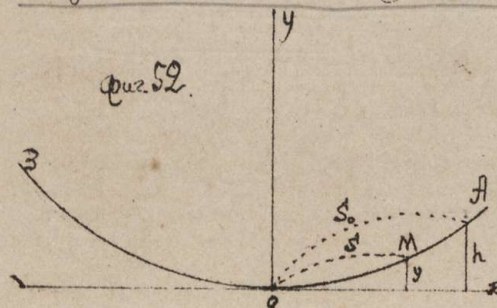
$$z - 2z + 2z_0 = 0$$

имеем:-

$$3z = 2z_0 \text{ и } z = \frac{2}{3}z_0$$

Теория маятника

Математический маятник называется материальной точкой, которая движется под действием тяжести по плоской кривой, лежащей в вертикальной



плоскости.

Обыкновенно принимают, что эта кривая имеет ось симметрии, которая вертикальна. Приняв горизонтальную касательную за ось

$x^{\text{обз}}$, а ось симметрии за ось $y^{\text{обз}}$, отнесем кривую к этим осям и выразим ее уравнение, установив связь между длиной дуги S , отсчитываемой от начала координат и ординатой y , так что:

$$S = f(y)$$

Положим, что материальная точка начала свое падение без начальной скорости из точки A , имеющей ординату h и потому, падая вниз, достигает точки M при чем скорость ее в точке M может быть определена по теореме живых сил:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = U - U_0$$

В нашем случае $v_0 = 0$ и

$$U = -mgy; \quad U_0 = mgh$$

Подставляя находим:

$$\frac{mv^2}{2} = mg(h-y)$$

отсюда —

$$v = \pm \sqrt{2g(h-y)} \dots \dots (1)$$

Эта формула показывает, что с уменьшением y абсолютная величина скорости возрастает и достигает своей наибольшей величины при $y=0$ — т.е. это же скорость уменьшается и обращается в нуль, когда точка M достигает положения B , ордината которой h . В положении B точка останавливается и начинает новое движение в обратную сторону; таким образом будет колебаться. Для определения связи

между временем и положением точки воспользуемся выведенной формулой (1), в которой возьмем знак —, определяем точку М дугой S, отсчитываемой от О. Так как со временем дуга S убывает, то корень нужно взять со знаком —.

$$V = -\sqrt{2g(h-y)}$$

Положим, $V = \frac{ds}{dt}$, получим: —

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{2g(h-y)}$$

Рассматривая y как функцию x разделим переменные

$$dt = -\frac{ds}{\sqrt{2g(h-y)}}$$

Интегрируем:

$$t = -\int \frac{ds}{\sqrt{2g(h-y)}} + C$$

Определим C по условиям, что при $t=0$ и $S=S_0$, получим: —

$$0 = -\int_{S_0}^S \frac{ds}{\sqrt{2g(h-y)}} + C$$

Вычитаем: —

$$t = -\int_{S_0}^S \frac{ds}{\sqrt{2g(h-y)}} = \int_S^{S_0} \frac{ds}{\sqrt{2g(h-y)}}$$

Это и есть формула, определяющая время по функции пути

Обыкновенно приходится ваяно двигаться от определенного времени полного размаха маятника или полуразмаха его. Поэтому, зная время полного размаха через T, а полуразмаха через $\frac{T}{2}$, полагаем $S=0$, будем иметь:

$$\frac{T}{2} = \int_0^{S_0} \frac{ds}{\sqrt{2g(h-y)}}$$

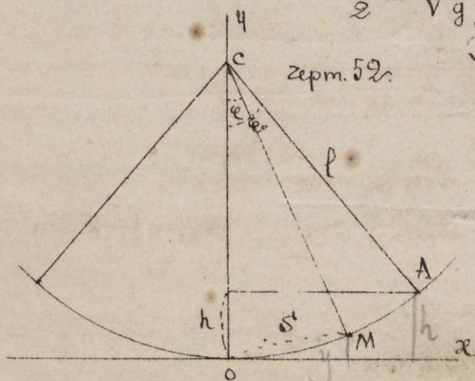
Эта формула дает нам время колебания маят.

ника для какой угодно кривой AB .

Примыслим ее сначала к обыкновенному круговому маятнику. Возьмем за перемещение виснута S угол φ , который образует длина маятника со средней вертикальной линией, тогда надо положить: $S = l\varphi$, $ds = l d\varphi$, при $S = S_0 \dots \varphi = \varphi_0$, при $S = 0$ и $\varphi = 0$. Получим:

$$\frac{T}{2} = \int_0^{\varphi_0} \frac{l d\varphi}{\sqrt{2gl(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}} \quad (h = l - l\cos\varphi_0; \quad y = l - l\cos\varphi \quad \text{и} \quad h - y = l(\cos\varphi - \cos\varphi_0))$$

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}}$$



Этот интеграл представляется как эллиптический интеграл 1^{го} рода и потому мы сначала возьмем его приближенно. Для этого, предположим, что угол φ_0 , а следовательно и φ , весьма мала

значительны, разложим $\cos^{\text{ву}}$ в степенный:

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{1.2.3.4} - \dots$$

$$\cos\varphi_0 = 1 - \frac{\varphi_0^2}{2} + \frac{\varphi_0^4}{1.2.3.4} - \dots \quad \left| \begin{array}{l} B \end{array} \right.$$

Пренебрегая четвертыми степенями φ и φ_0 , получим

$$\cos\varphi - \cos\varphi_0 = \frac{\varphi_0^2 - \varphi^2}{2}$$

Подставив в наш интеграл эту приближенную величину, получим:

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{l}{g}} \left(\arcsin \frac{\varphi}{\varphi_0} \right)_0^{\varphi_0} = \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{\pi}{2}$$

Это дает обыкновенную формулу маятника

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Эта формула может быть употреблена при весьма незначительных разностях. Если разность велика, то вычислая время по этой формуле, получим меньшее время, значит ошибется.

Выведем точнее формулу и для этого представим T в виде некоторой строки, которая разложится по степеням $\sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$. Эта строка позволит нам определить точно T

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}} \dots (a)$$

начавши, что

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \psi \dots (1)$$

$$\cos \varphi = 1 - 2\sin^2 \frac{\varphi}{2} = 1 - 2\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \psi; \cos \varphi_0 = 1 - 2\sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$$

откуда

$$\begin{aligned} \cos \varphi - \cos \varphi_0 &= 2\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - 2\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \psi = 2\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} (1 - \sin^2 \psi) = \\ &= 2\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \cos^2 \psi \end{aligned}$$

$$\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)} = \sqrt{4\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \cos^2 \psi} = 2\sin \frac{\varphi_0}{2} \cos \psi$$

Далее находим:-

$$\cos \frac{\varphi}{2} \cdot d\frac{\varphi}{2} = \sin \frac{\varphi_0}{2} \cos \psi d\psi;$$

$$d\frac{\varphi}{2} = \frac{\sin \frac{\varphi_0}{2} \cos \psi}{\cos \frac{\varphi}{2}} d\psi; \quad d\varphi = \frac{2\sin \frac{\varphi_0}{2} \cos \psi d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \psi}};$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}} = \int \left(\frac{2\sin \frac{\varphi_0}{2} \cos \psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \psi}} : 2\sin \frac{\varphi_0}{2} \cos \psi \right) d\psi =$$

$$= \int \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \psi}} = \int (1 - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \psi)^{-\frac{1}{2}} d\psi$$

при $\varphi = 0$ или $\psi = 0$, при $\varphi = \varphi_0$ или $\psi = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \psi)^{-\frac{1}{2}} d\psi = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \psi + \frac{1}{2} \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} \sin^4 \psi \right) d\psi$$

$$= \frac{\sqrt{1}}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right\}$$

т.е. что $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi d\varphi = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \cdot \frac{\pi}{2}$

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right\}$$

Это и есть искомая формула.

Циклоидальный маятник.

Циклоидальный маятник обладает полным изохронизмом, т.е. во время полного оборота не зависит от величины радиуса. Предположим, что кривая АВ (ср. 54) будет циклоидой, приложившей формулу Даламбера, выражающую силу $\hat{S}$ циклоиды по формуле 4

$$\hat{S} = \sqrt{8ay}$$

где a есть радиус образующей кривой; отсюда, —

фиг. 55.

$$y = \frac{s^2}{8a}, \text{ а } h = \frac{s_0^2}{8a}$$

Подставив это в общую

формулу маятника

$$\frac{T}{2} = \int_0^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{2g(h-y)}}$$

найдем:

$$\frac{T}{2} = \int_0^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{\frac{g}{4a}(s_0^2 - s^2)}} = \sqrt{\frac{4a}{g}} \int_0^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{s_0^2 - s^2}}$$

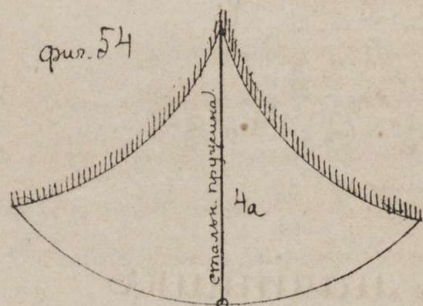
Итак, интеграл берется непосредственно и мы получим: —

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{4a}{g}} \left(\arcsin \frac{s}{s_0} \right)_0^{s_0} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{4a}{g}}$$

$$T = \pi \sqrt{\frac{4a}{g}}$$

Наконец образуем время колебаний маятника в вер-

рис. 54



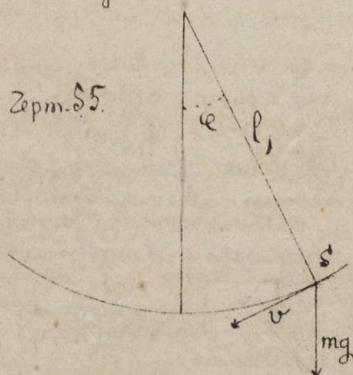
ушается совершенно точно при
всяком размахе приближен-
ной формулы, данной для
кривою маятника, придет
здесь $l = 4a$. Пользуясь этим
обстоятельством, это раз-

верта циклоиды есть также циклоиды, Гюйзенс
устроил маятник, который давал время колебаний
независимо от размаха (герм. 55)

О маятнике в сопротивляющейся среде.

Положим шнуром круглой маятник в сопротив-

герм. 55.



ляющей среде. Сопротивляю-
щаяся среда имеет влияние
на амплитуду, а на время ко-
лебаний не имеет и амплитуды
идут убывая по геометри-
ческой прогрессии. Положим,
маятник имеет скорости

v . Сила сопротивления среды F для небольших ампли-
туд пропорциональна скорости, т. е.

$$F = k^2 mg v$$

Напишем дифференциальное уравнение

$$\frac{dv^2 m}{2} = mg \sin \varphi ds - \kappa^2 mg v ds$$

или:

$$v dv = g \sin \varphi ds - \kappa^2 g v ds \quad \left| \begin{array}{l} ds = -l d\varphi \\ v = -l \frac{d\varphi}{dt} \end{array} \right.$$

тогда

$$l^2 \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -g \sin \varphi l d\varphi - \kappa^2 g l^2 \frac{d\varphi}{dt} d\varphi$$

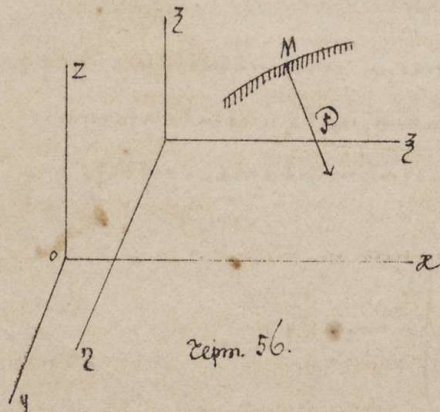
Разделив на $d\varphi$ получим:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \varphi + \kappa^2 g \frac{d\varphi}{dt} = 0$$

Вместо $\sin \varphi$ поставим φ при небольших амплитудах, получим:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \kappa^2 g \frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{l} \varphi = 0.$$

Об относительном движении.



В кинематике знаем из опыта формулы, выражающие проекции по движущимся осям координат полного ускорения материальной точки, которая имеет некоторое движение относительно осей; было

доказано, что эти проекции выражаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} j &= g + l + \kappa \\ j_z &= g_z + l_z + \kappa_z \\ j_x &= g_x + l_x + \kappa_x \end{aligned}$$

$$j_z = g_z + l_z + K_z$$

т.е. j_z, g_z, l_z суть проекции ускорения относительно движения; l_z, l_z, l_z суть проекции ускорения вращения, а K_z, K_z, K_z суть проекции поворота ускорения.

Положим теперь, что некоторая точка, по действию сил $\vec{F}$, проекции которой на подвижные оси суть ξ, η, ζ движется, при этом движении ее разлагают относительно подвижных осей ξ, η, ζ , движущихся независимо образом. Положим для удобства, что материальная точка должна оставаться на поверхности, которая непрерывно соединена с осями ξ, η, ζ и имеет уравн.:

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 0.$$

Тогда мы должны написать обыкновенные дифференциальные уравнения движения, в которых вместо:

$$-m \frac{d^2 x}{dt^2}; -m \frac{d^2 y}{dt^2}; -m \frac{d^2 z}{dt^2} \text{ подставим: } -m j_\xi, \\ -m j_\eta, -m j_\zeta \text{ и получим:}$$

$$\left. \begin{aligned} \xi - m j_\xi + \lambda \frac{df}{d\xi} &= 0 \\ \eta - m j_\eta + \lambda \frac{df}{d\eta} &= 0 \\ \zeta - m j_\zeta + \lambda \frac{df}{d\zeta} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

Нам соотношение основано на том, что к движущимся силам надо прибавить еще силы инерции, которые равны:

$$-m j_\xi, -m j_\eta, -m j_\zeta, \text{ а не } -m \frac{d^2 \xi}{dt^2}, -m \frac{d^2 \eta}{dt^2}, -m \frac{d^2 \zeta}{dt^2}$$

так как последние можно бы иметь только при

неподвижных осей. Если подставим в формулы (1)

вышесказанные проекции на каналоу чкорени, то получим

$$\left. \begin{aligned} \left\{ (\xi - m\xi_z - m\kappa_z) - m \frac{d^2 \xi}{dt^2} \right\} + \lambda \frac{dt}{d\xi} &= 0 \\ \left\{ (\eta - m\eta_z - m\kappa_z) - m \frac{d^2 \eta}{dt^2} \right\} + \lambda \frac{dt}{d\eta} &= 0 \\ \left\{ (\xi - m\xi_z - m\kappa_z) - m \frac{d^2 \xi}{dt^2} \right\} + \lambda \frac{dt}{d\xi} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

Если бы точка двигалась не по поверхности, а по линии,

данной уравнением:

$$f(\xi, \eta, \xi) = 0 \text{ и } f_1(\xi, \eta, \xi) = 0$$

то на f заставим уравнений 2^е кучей бы вывод еще прибавим

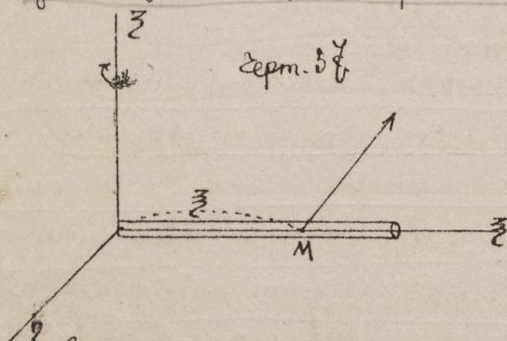
$$\lambda' \frac{dt}{d\xi}, \lambda' \frac{dt}{d\eta}, \lambda' \frac{dt}{d\xi}$$

Рассматривая формулы 2^е, мы видим, что они имеют тот же вид, как формулы движения свободной точки при неподвижных осях, вся разница состоит только в том, что составившие движущей силы ξ, η, ξ прибавлены еще силы инерции от чкорени влечения $-m\xi_z, -m\eta_z, -m\xi_z$ и еще составившие силы инерции от поворотного чкорени $-m\kappa_z, -m\kappa_z$ и $-m\kappa_z$.

Отсюда получим динамическую теорему Кориолиса: относительное движение точки может быть определено, как бы точка оси были неподвижны, если прибавить к силе, движущей материальную точку, силу инерции, происходящую от чкорени

жения, влечения, и силы инерции, происходящую от поворота и ускорения. В случае отклонения от равновесия точки поворотное ускорение есть ноль и нулю приписать только нулевой силы.

Закон Ампера. Материальная точка движется по горизонтальной трубки, которая вращается равномерно около вертикальной оси, через которую проходит, определить движение точки по трубке, а также и давление, которое она производит на стенки



трубки.

Положим, что точка массы M . Ось координат ξ направлена по оси трубки. Эти оси

по условию вращаются

равномерно с угловой скоростью ω около оси ξ .

Все ускорение влечения в нашем случае приводится

к центростремительному ускорению точки

M . Это ускорение направлено к началу и равно

$$\frac{\omega^2 \xi^2}{\xi} = \omega^2 \xi, \text{ так что проекции по движущимся}$$

оси ускорения влечения будут l_ξ, l_η и l_ζ . и

$$l_\xi = -\omega^2 \xi; l_\eta = 0; l_\zeta = 0. \text{ (Вспомогательные проекции}$$

поворотного ускорения на основании формулы кинематики суть: -

$$K_z = 2(u_z q - u_r z); \quad K_r = 2(u_z z - u_z p)$$

где u_z, u_r, u_z суть проекции скорости относительно движения на ось, это же касается p, q, z , то это суть проекции угловой скорости. Мы имеем:

$$u_z = u = \frac{dz}{dt}; \quad u_r = 0; \quad u_z = 0; \quad p = 0; \quad q = 0; \quad z = \omega$$

Подставим:-

$$K_z = 0; \quad K_r = 2(\omega \frac{dz}{dt} - 0); \quad K_z = 0$$

По теореме Корiolиса нам задачу можно разложить, как задачу о движении относительно неподвижных осей, если прибавим к составившим движущим силам составившие силы инерции от ускорения влечения и от поворотно ускорения. (Составившие инерции от влечения фигурируют:-

$$-ml_z = \omega^2 m z; \quad -ml_r = 0; \quad -ml_z = 0$$

Что показывает, что составившая инерция по оси z есть центробежная сила от вращения координат и равна $\omega^2 m z$. Далее сила составивших инерции поворотно ускорения

$$-mK_z = 0; \quad -mK_r = -2\omega m \frac{dz}{dt}; \quad -mK_z = 0$$

Отсюда видно, что вся сила от поворотно ускорения перпендикулярна к направлению движения и равна произведению массы на двойную угловую скорость и на скорость и на скорость относительно движения и идет в сторону отрицательную

оси η , т.е. в сторону противоположную вращательному движению. Она производит силу инерции производит давление на стержень пружи/и/ке вблизи на движение. Если назовем это давление силой T , то

$$T = -2\omega m \frac{dz}{dt}$$

Если $\frac{dz}{dt}$ отрицательно, то давление направлено в ту же сторону, как и ось η .

Для установления силы давления предположим правило: - Используя количество поступательного движения функцией на двойную угловую скорость и повернуть на прямой угол в плоскости вращения в сторону, противоположную вращению.

Это же касается центробежной силы инерции, то она направлена по оси пружины и будет производить движение шарика. Но так как пружина горизонтальна, то сила тяжести не учитывается.

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = \omega^2 m z ; \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = \omega^2 z = 0$$

Это есть линейное дифференциальное уравнение второго порядка без постоянного члена, интегрируя его будем:

$$z = C e^{\lambda t} + C' e^{\lambda' t}$$

где C и C' произвольные постоянные, а λ и λ' - корни уравнения Лагранжа.

$\lambda^2 - \omega^2 = 0$, так что $\lambda = \pm \omega$
два решения $\lambda = -\omega$ и $\lambda = +\omega$.

$$\xi = C e^{\omega t} - C' e^{-\omega t}.$$

Постоянные C и C' определяются по начальным положению и касательной скорости шарика.

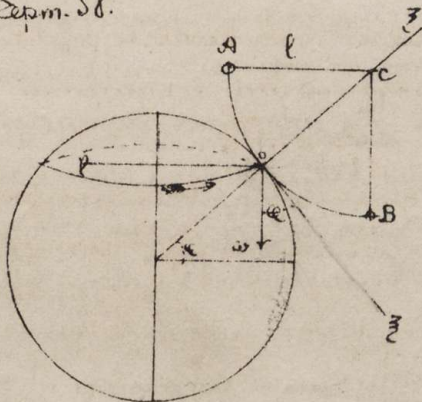
2. Маятник Фуко.

Сей координаты возьмем так, чтобы плоскость $\xi\eta$ была плоскостью касания маятника (Ас-Вс), а ось η перпендикулярна к этой плоскости. Мы найдем, что проекция угловой скорости вращения земли на ось ξ, η и ζ

$$\rho = \omega \cos \varphi; \quad q = 0; \quad r = -\omega \sin \varphi$$

$$\xi - m\ddot{\xi} = 0; \quad \eta - m\ddot{\eta} = 0; \quad \zeta - m\ddot{\zeta} = -mg,$$

См. рис. 58.



$$K_{\xi} = 2\omega \sin \varphi \frac{d\eta}{dt}$$

$$K_{\eta} = -2\omega \left(\sin \varphi \frac{d\xi}{dt} + \cos \varphi \frac{d\zeta}{dt} \right)$$

$$K_{\zeta} = 2\omega \cos \varphi \frac{d\eta}{dt}$$

$$\xi - m\ddot{\xi} - mK_{\xi} - m\left(\frac{d^2\xi}{dt^2} + \lambda \frac{d\zeta}{dt}\right) = 0$$

$$\eta - m\ddot{\eta} - mK_{\eta} - m\left(\frac{d^2\eta}{dt^2} + \lambda \frac{d\zeta}{dt}\right) = 0$$

$$\zeta - m\ddot{\zeta} - mK_{\zeta} - m\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \lambda \frac{d\zeta}{dt}\right) = 0$$

Составим теперь $\frac{d\xi}{dt}$;

$$\frac{d\xi}{dt} \text{ и } \frac{d\eta}{dt} \text{ Мы имеем}$$

уравнение шара, описанна-

го около точки О радиусом l , и поверхности которого

имеется найденная точка А математического маятника

$$f = \dot{z}^2 + \dot{\eta}^2 + (z-l)^2 = 0$$

Поэтому $\frac{dt}{dz} = 2\dot{z}$; $\frac{dt}{d\eta} = 2\dot{\eta}$; $\frac{dt}{dz} = 2(z-l)$

Представив все найденные величины в дифференциальном уравнении, получим:

$$-2m\omega \sin \varphi \frac{d\eta}{dt} - m \frac{dz}{dt} + 2\lambda z = 0$$

$$2m\omega (3m \frac{dz}{dt} + \cos \varphi \frac{dz}{dt}) - m \frac{d^2 z}{dt^2} + 2\lambda \eta = 0$$

$$-mg - 2m\omega \cos \varphi \frac{d\eta}{dt} - m \frac{d^2 z}{dt^2} + 2\lambda(z-l) = 0$$

Интерпретирование этих уравнений принимаем задачу о движении маятника. Мы совершили это интерпретирование с некоторыми приближениями, так как точная функция очень трудна. Условно заметим, что

$$\omega = \frac{2\pi}{24.60.60.}$$

Это есть величина очень незначительная; можно так же z , вследствие того, что маятник подвешивается на очень длинной нити, есть величина весьма малая. Также и $\frac{dz}{dt}$ - скорость по направлению оси z весьма мала. Вследствие этого можно пренебречь произведением $\omega \frac{dz}{dt}$, как произведение весьма малых величин. Ввиду этого во втором уравнении второй член можно считать равным нулю. Мы получим таким образом по сокращению на m :

$$\eta \left(-2\omega \sin \varphi \frac{d\eta}{dt} - \frac{d^2 \xi}{dt^2} + 2\lambda \frac{\xi}{m} = 0 \right)$$

$$\xi \left(2\omega \sin \varphi \frac{d\xi}{dt} - \frac{d^2 \eta}{dt^2} + 2\lambda \frac{\eta}{m} = 0 \right)$$

Умножив первое уравнение на η , а второе на ξ , и сложив $1^{\text{е}}$ и $2^{\text{е}}$, получим:

$$2\omega \sin \varphi \left(\xi \frac{d\xi}{dt} + \eta \frac{d\eta}{dt} \right) - \left(\xi \frac{d^2 \eta}{dt^2} - \eta \frac{d^2 \xi}{dt^2} \right) = 0$$

или:

$$\omega \sin \varphi \frac{d}{dt} (\xi^2 + \eta^2) = \frac{d}{dt} \left(\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt} \right)$$

интегрируем:

$$\omega \sin \varphi (\xi^2 + \eta^2) = \xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt} + C$$

Введём полярные координаты, полагая $\xi = \rho \cos \theta$, а $\eta = \rho \sin \theta$, где ρ — есть расстояние проекции конуса на плоскость ξ, η — это полярные координаты, а θ угол между ρ и ξ

Можно заметить

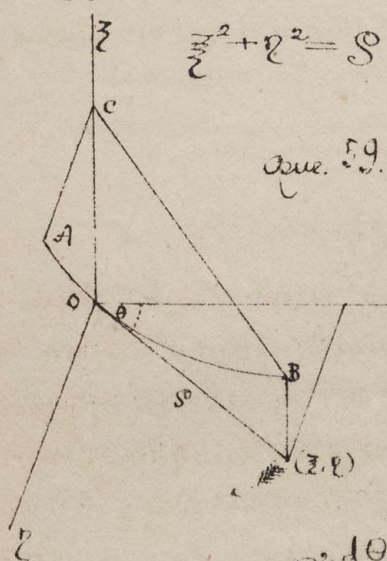
$$\xi^2 + \eta^2 = \rho^2 \text{ и } \theta = \arctg \frac{\eta}{\xi}$$

Взяв производную по времени, как это делаем в теории проулы:

Получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt}}{\xi^2 + \eta^2} = \\ &= \frac{\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt}}{\rho^2} \end{aligned}$$

$$\rho^2 \frac{d\theta}{dt} = \xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt}$$



Подставляя эти координаты в наши интегралы, найдем:

$$\omega \sin \varphi \dot{\varphi}^2 = \dot{\varphi}^2 \frac{d\theta}{dt} + C$$

Для определения C предположим, что маятник в этот момент в положении равновесия и вращается вертикально, а потому только приведен в качательное движение. Тогда при каком времени $\varphi = 0$; вследствие этого, подставляя в уравнение, найдем $C = 0$ тогда:

$$\omega \sin \varphi \dot{\varphi}^2 = \dot{\varphi}^2 \frac{d\theta}{dt}$$

$$\text{или} \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega \sin \varphi$$

Умножив на dt и интегрируем, получим:

$$\theta = \omega \sin \varphi t + C'$$

Получим, что в каком времени маятник в этот момент по направлению радиуса φ , образующего с осью ξ угол θ_0 , тогда

$$\theta_0 = 0 + C'$$

Возмем, находим: —

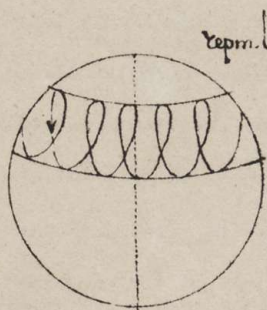
$$\theta - \theta_0 = \omega \sin \varphi t$$

Это есть основная формула маятника Фуко; она показывает, что плоскость качания маятника вращается около оси ξ с угловой скоростью $\omega \sin \varphi$, по направлению от оси ξ к оси η , т.е. в направлении поспиральной по спирали от любой ручки вправо. Это вращение маятника всего замедлится на $\sin \varphi$

Здесь маятник вращается со угловой скоростью земли, т.е. отклоняется, в сасе на 15° . В средних широтах отклонение будет меньше, а на экваторе, где $\sin \varphi = 0$ будет $\sin \varphi = 0$.

$$a \sin \varphi = 0,$$

т.е. маятник совсем не отклоняется. Отсюда



верт. в

мы и оканчиваем задачу маятника Фуко. Запишем, что пользуясь нашими уравнениями движения, можно доказать, что колебание маятника в его вращающейся плоскости совершается по

тому же закону, по какому колеблется обыкновенный маятник, так что время колебания от вращательного движения земли несколько не изменяется.

Механика системы

Системой называется собрание материальных точек, связанных между собой как силами, так и геометрическими условиями.

Если точки связаны только силами, то система называется динамической, как например

Атомистическая механика

Лист 22^и

механической системы.

Если все крайние силы точки твёрдого тела связаны друг с другом геометрическими связями, то система называется геометрической, например твёрдое тело.

Силы, так же и геометрические связи могут быть внутренними и внешними. Внутренние силы разбиваются между точками системы, и внешние, происходящие от тел не входящих в систему. Можно также связи могут быть внутренними и внешними. Внутренними связываются точки системы между собой, а внешние связывают их с посторонними телами. Если система имеет только внутренние связи, то ее называют свободной. Геометрические связи системы выражаются уравнениями ее координат точек. Если система имеет n точек, то положение ее определяется $3n$ координатами:

$$(x, y, z); (x_1, y_1, z_1); (x_2, y_2, z_2); \dots (x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$$

Уравнения, о которых идет речь будут иметь вид:

$$f(x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots) = 0$$

Если система ограничена $3n-1$ такими уравнениями, то она называется системой с полными условиями. Такая система имеет опре-

дизайна по одному параметру, т.е. одна величина
всегда определяет положение системы.

Покажем, что в системе с полным числом
свободы, каждая точка может перемещаться, толь-
ко по определенной кривой.

Для этого рассмотрим уже $3n-1$ данных уравне-
ний $3n-2$ координаты, оставив координаты x, y ,
последние уравнение:

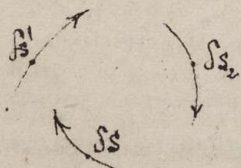
$$Q(x, y) = 0$$

Рассмотрим другой раз $3n-2$ координаты про-
сто x, z , последние уравнение

$$Q(x, z) = 0$$

Эти два уравнения представляют кривую линии,
по которой может перемещаться первая точка си-
стемы. Може будет иметь место относительно
но других точек.

Если одну из точек системы перемещать по из-
вестной на некоторое пространство



Зеркал.

δS , то все остальные точки си-
стемы переместятся по своим пу-
тям на вполне определенное про-
странство $\delta S_1, \delta S_2, \dots$ Это следу-
ет из того, что зная координату x , мы можем

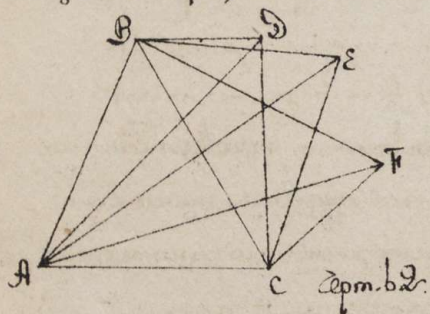
из $3n-1$ данных уравнений определить все другие
координаты и следовательно будем знать положе-

ние всех других точек. Принцип системы ее пол-
ные линейные уравнения представляют нашу машину.

Неизменяемая система представляет нашу
систему с $3n-6$ уравнениями. Это можно доказать
таким образом: положим, что три точки A, B, C
системы N точек соединены в треугольнике неиз-
меняемыми линиями. Из этого можно написать
три уравнения вида:

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 = l^2$$

где вторые части постоянны, потому что каждо



такой точки системы
соединены с этими тремя
точками неизменяемыми
прямыми. Это выражает
эту неизменяемость приве-
дём для каждой точки напи-

сать 3 уравнения и так как у нас останется $n-3$,
то придется написать $3n-9$ уравнений; к ним сле-
дует еще прибавить три уравнения, получающих:

$$3n-9+3=3n-6.$$

Так как неизменяемая система определяет
 $3n-6$ уравнений, то давши в ней 6 координат,
мы можем определить все остальные. Так это
вообще говоря неизменяемая система вполне опре-
деляется по 6 параметрам.

Дано: 6 точек системы сир. 172

Методъ возможныхъ перемещеній

Точка называется свободной, если для нея возможны всякія перемещенія. Перемещение берется обыкновенно безконечно малымъ для того, чтобы не считать точку невозвратною тогда, когда она находится весьма близко къ препятствію, какъ напримеръ, когда точка находится вблизи неподвижной стѣны. Для такой точки возможно всякое безконечно малое перемещение, но невозможны некоторые конечныя перемещенія. Матеріальная точка, для которой не все безконечно малыя перемещенія возможны, называется несвободной. Такова точка, лежащая на поверхности и не могущая ее покинуть. Для нея возможны только перемещенія, касательныя къ поверхности и невозможны въ другихъ. Если матеріальная точка лежитъ на поверхности тѣла и не можетъ входить внутрь и не можетъ выходить стѣною, то для нея возможны все безконечно малыя перемещенія, направленныя съ той стороны касательной плоскости, где нѣтъ тѣла и невозможны все перемещенія, направленныя съ другой стороны касательной плоскости.

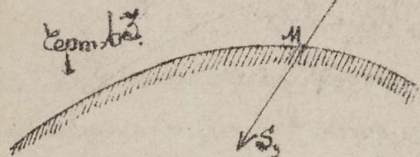
Возможныя перемещенія раздѣляются на два рода: одни перемещенія таковы, что при нихъ матері-

ликая точка остается, подъ стъсениемъ тѣхъ же
цѣловій, неужъ которыми она была до перемѣщенія,
другія же безконечно малыя, вѣщныя перемѣще-
нія, освобождаютъ матерьяльную точку отъ цѣловій,
ее стѣснѣющихъ. Такъ напримѣръ, если матери-
альная точка лежитъ на поверхности тѣла, то
всякое безконечно малое перемѣщеніе, направленное
по поверхности тѣла, совпадетъ матерьяльную то-
чку на тѣло. Всякое же безконечно малое перемѣ-
щеніе, направленное отъ тѣла, снимаетъ матери-
альную точку съ тѣла и дѣлаетъ ее свободной.

Перемѣщенія первой рода называютъ несвобод-
ными; перемѣщенія второго рода называютъ
освобождающими.

Несвободоудаленныя перемѣщенія всегда обладаютъ
такимъ свойствомъ, что всякому одному возмо-
жному несвободоудаленному перемѣщенію соответству-
етъ другое прямопротивоположное возможное перемѣ-
щеніе. Если напримѣръ точка находится на ми-
нимальной линіи, которой она не можетъ покинуть, то безконечно
малому перемѣщенію въ одну сторону минималь-
ности соответствуетъ противоположное возможное перемѣще-
ніе въ другую сторону этой минимальности. Что же касается
до освобождающихъ перемѣщеній, то для каждаго противополо-
жное безконечно малое перемѣщеніе дѣлаетъ всегда

невозможности. Если например, материальная точка находится на поверхности твёрдой и подвижной по отношению к другой стороне, то всякому перемещению, сближающему точку с поверхностью, соответствует встречное противоположное перемещение, которое



приводит точку внутрь твёрдой, т.е. невозможно.

В виду этого свободное перемещение называется односторонним, так как оно направлено в одну сторону, а несвободное перемещение называется двусторонним.

Элементы работы силы при совершении точки перемещения называются элементами моментальной силы. Мы будем называть их элементарной работой. Если назовём через P силу и предположим, что материальная точка получила перемещение ds , то работа силы будет равна $P ds \cos \theta$, где θ — угол между направлением силы и направлением движения.

Работа силы может быть выражена помощью скалярных x, y, z функций силы по осям координат, ~~или~~ помощью проекции dx, dy, dz перемещения ds на оси координат. Именно мы можем написать, что: —

$$P\delta s \cos \theta = P\delta \left(\frac{x}{P} \frac{\delta x}{\delta s} + \frac{y}{P} \frac{\delta y}{\delta s} + \frac{z}{P} \frac{\delta z}{\delta s} \right) = P\delta x + Y\delta y + Z\delta z$$

Максимум образом див работы силы найдем формулу:-

$$P\delta s \cos \theta = P\delta x + Y\delta y + Z\delta z$$

Если сила P складывается из нескольких сил $P_1, P_2, P_3, \dots$ то ее составляющие X, Y, Z будут выражаться так:-

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + \dots$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots$$

$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots$$

Подставим эти величины во вышеуказанную формулу, получим:-

$$P\delta s \cos \theta = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z + X_1\delta x + Y_1\delta y + Z_1\delta z + \dots$$

или

$$P\delta s \cos \theta = P_1 \cos \theta_1 \delta s + P_2 \cos \theta_2 \delta s + P_3 \cos \theta_3 \delta s + \dots$$

где $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ суть углы, которые силы $P_1, P_2, P_3, \dots$ образуют с направлением δs

Равенство:-

$$P\delta s \cos \theta = P_1 \cos \theta_1 \delta s + P_2 \cos \theta_2 \delta s + \dots$$

показывает, что работа равнодействующей силы равна работам составляющих сил.

Перейдем теперь к доказательству основной теоремы, выражающей условие равновесия материальной точки. Эта теорема состоит в следующем:

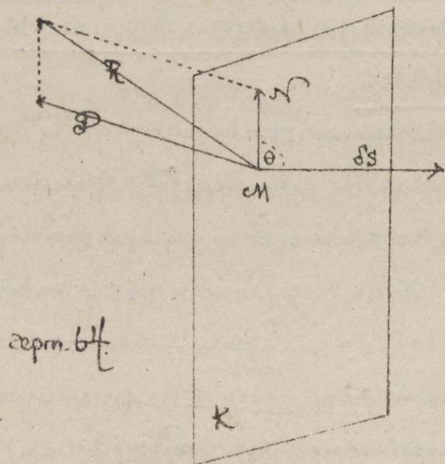
Теорема Лагранжа. Условие, необходимое и достаточное для равновесия материальной точки состоит

въ томъ, чтобы для всякаго возможнаго перемещенія элементарная работа была бы меньше или равна нулю.

Доказательство этой теоремы основано на 4^{мъ} замѣткѣ, изложенной нами при вступленіи въ динамику точки, которое состоитъ въ томъ, что присутствіе разбивающихъ силъ сопротивленія, нормальныхъ ко всевозможнымъ перемещеніямъ точки. Здѣсь говорится о всевозможныхъ перемещеніяхъ. Если на точку точка действуетъ на поверхности и подѣ действиемъ на которой силы передвигается по ней, то это передвиженіе произошло во первыхъ отъ дѣйствія силы, во вторыхъ отъ силы сопротивленія поверхности, которая непременно нормальна къ возможному перемещенію. Если же сила снимаетъ точку съ поверхности, т.е. точка получаетъ всевозможное перемещеніе, то тогда сила сопротивленія поверхности равна нулю и все перемещеніе происходитъ только отъ дѣйствія движущей силы. Но какъ въ этомъ случаѣ сила сопротивленія не имѣетъ направленія, будучи равна нулю, то вообще можно говорить, что сила сопротивленія (когда она есть) направлена нормально къ возможному перемещенію.

Прикажъ это замѣтно, докажемъ, что сила не можетъ произвести такого перемещенія, отъ котораго она обра-

зреть прямой или тупой угол.



срм. 64

Положим, что SS' будет
одно из перемещений, воз-
можных для точки M ,
на которую действует
сила P , образуя с осью SS'
тупой угол. На основании
признания начала/свободо-
дною точку M или движение
разматривать как свобо-

дно, прибавив силу сопротивления N , происходящую
от препятствия. При этом эта сила N перпендику-
лярна к SS' . Если она перпендикулярна к SS' , то
она также перпендикулярна к плоскости K ,
проходящей через точку M перпендикулярно к SS' .
Возьмем теперь, что какова бы ни была сила N ,
находящаяся в плоскости K , эта сила, сложившись с P дает
равнодействующую R , исходящую с любой стороны от плос-
кости; так как точка, передвигаемая по этой равно-
действующей ни в каком смысле не может по-
ти по перемещению SS' , которое направлено в ^{лю-}бую
сторону от плоскости K . Можно также, если бы
сила P была перпендикулярна к SS' , то сложившись с силой
 N , давала равнодействующую R которая бы на-
чалась в плоскости K и следовательно не была бы на-

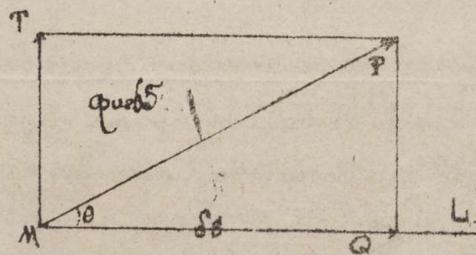
правлена по δS .

Максимум образует мы доказали, что в силу, если сила образует со возможными перемещениями прямой или тупой угол, то этого перемещения не произойдет. Если сила образует со всевозможными перемещениями прямой или тупой угол, то ни одного из возможных перемещений не будет, а потому будет равновесие.

Максимум образует достаточным условием равновесия является то, что сила образует со всевозможными перемещениями прямой или тупой угол.

Докажем, что этот принцип не только достаточен, но и необходим для равновесия, т.е. что при отсутствии равновесия не будет.

Пусть сила образует с одним из возможных перемещений острый угол. Покажем, что тогда равновесия не будет. Покажем это от противного. Положим, что равновесие будет. Тогда равновесие не нарушится, если при-



равновесия не будет. Покажем это от противного. Положим, что равновесие будет. Тогда равновесие не нарушится, если при-

дадим точку, представляющую, так сказать, материальную точку M остальной возможным только одно перемещение δS . Мы утверждаем, что, если поместим материальную точку на некоторую из-

силу M , которую она не может покинуть. Разлагая силу P на две, из которых одна нормальна к M , а другая направлена по M , пусть это будут силы Q и T . Сила T уничтожается сопротивлением линии M , так как нормальная сила не может произвести перемещения и уничтожается сопротивлением прямой M , с которой данная точка движется вместе. Не у нас остается сила Q которая направлена по перемещению δs и производит это перемещение. Пассивная образная материальная точка придет в движение, а мы предположили, что она находится в равновесии, следовательно наше предположение не верно. Значит тело допустить, что сила образует с одним из возможных перемещений острый угол и изложенный признак является достаточным и необходимым для равновесия.

Выразим этот признак аналитически, называя через θ угол, образуемый силой с возможным перемещением, найдем, что для всякого возможного перемещения надо будет иметь: -

$$\cos \theta \geq 0,$$

так как во всяком тупом угле $\cos \theta < 0$, а во всяком прямом $\cos \theta = 0$. Умножив это равенство на

$P\delta$, считая силу и перемещение всегда положительными (по абсолютной величине), напишем: —

$$P\delta \cos \theta \leq 0 \dots (1)$$

Это условие должно удовлетворяться для всех возможных перемещений. Это и предстоит доказать.

Величину момента силы $P\delta \cos \theta$ мы можем выразить помощью элементарной работы составившей сил по осям координат и тогда условие равновесия будет: —

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z \leq 0 \dots (2)$$

Перейдем теперь к применению условия (2) к введению уравнения равновесия при различных случаях равновесия материальной точки. При этом мы разделим все задачи на 2 рода. В 1-м роде первая задача будет рассматривать точки, для которых возможны только неограниченные или двусторонние перемещения. В 2-м роде формулу (2) нужно писать в виде: —

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0$$

для всех возможных перемещений. Это доказывается таким образом. Положим наперед, что для одного из перемещений δx угол θ нулевой и потому: —

$$P\delta \cos \theta < 0.$$

Это предположение показывает, что сила P не мо-

уменьше произвести перемещение δz , но так как в нашем случае все перемещение двустороннее, то вместе с перемещением δz является также возможное и перемещение $\delta z'$, которое направлено в сторону, прямо противоположную δz , это перемещение обрывается с силой P углом $\theta' = 180^\circ - \theta$, который будет непременно острым, так как угол θ тупой. Поэтому $P\delta z' \cos \theta' > 0$ и сила может произвести перемещение $\delta z'$, т.е. равновесие не будет. Таким образом можно допустить, что сила с одним из перемещений образует тупой угол и для равновесия нужно, чтобы сила со всеми перемещениями образовывала тупой угол, это предвещает, чтобы для всех возможных перемещений: —

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0.$$

В задаче вторая rovnomo будем рассматривать то случае, когда точка может идти как двусторонне, так и односторонне перемещением и тогда условие равновесия (2) будем писать в виде

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z \leq 0$$

Так как сила со всеми двусторонними перемещениями

ситуацией может иметь только прямые углы при равновесии, со всеми же односторонними перемещениями может образовывать прямые или тупые углы.

Задачи на случай двустороннего перемещения.

Задача 1. Равновесие свободной материальной точки.

Если материальная точка свободна, то для нее возможны всевозможные бесконечно малые перемещения, следовательно проекции перемещения δx на все координаты, т.е. δx , δy , δz могут быть совершенно произвольными бесконечно малыми величинами. Для равновесия нужно, чтобы для совершенно произвольных δx , δy , δz удовлетворялось условию:—

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0$$

Положим, что мы возьмем такое перемещение, при котором:

$$\delta x \neq 0, \text{ а } \delta y = \delta z = 0$$

тогда $X\delta x = 0$, а так как $\delta x \neq 0$, то $X = 0$. Аналогично, что $Y = 0$ и $Z = 0$ и получим условия равновесия:

$$\left. \begin{array}{l} X = 0 \\ Y = 0 \\ Z = 0 \end{array} \right\} \dots\dots (a)$$

Наконец образовать при равновесии свободной точки криво, чтобы при составлении действующих сил были равны нулю.

лист 18.

Задача 2^я. О равновесии несвободной точки, не могущей покинуть данную поверхность.

Задача 3^я. О равновесии материальной точки, лежащей на пересечении двух поверхностей, помещенной в 18^м листе.

Случаи, когда несвободная материальная точка имеет одностороннее и двустороннее перемещение

Если материальная точка кроме двустороннего имеет еще и одностороннее перемещение, то условие равновесия надо писать так:—

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z \leq 0$$

Будем для большого удобства писать это условие еще иначе, а именно

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = \delta T$$

и будем подразумевать под δT некоторую безразмерную малую величину, которая может быть или меньше или равна нулю, но не больше нуля.

Задача 1^я. О равновесии точки на поверхности, которую она может покинуть в определенном направлении.

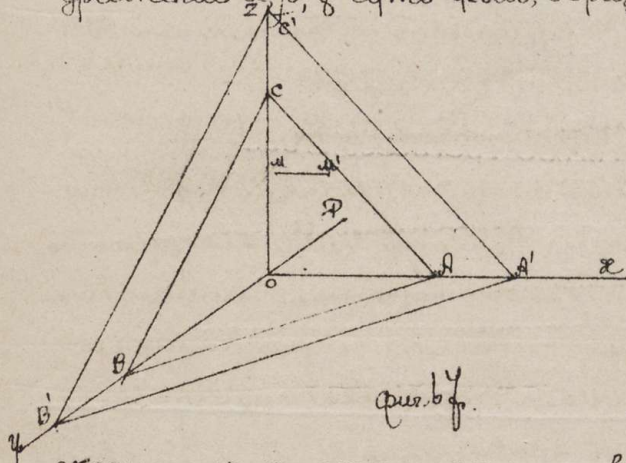
Чтобы удобнее разъяснить каковы условия, считая...

иногда возможны, перемещения в этом случае разном-
тримь частные примеры

Рассуждая, материальная точка движется в плоско-
сти ABC , данной уравнением:—

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p \dots (1)$$

Как известно из Аналитической Геометрии из этих
уравнений α, β, γ суть углы, образованные перпендику-



ляром p в осевых
координатах, опущен-
ных из начала O
на плоскость ABC ,
а p есть функция этого
перпендикуляра. По-
скольку, это матери-
альная точка, может

рис. 64.

сходить в плоскости только в ту сторону; это не
следует из начала координат и не может переи-
таться в ту сторону плоскости, в которой движется
начало координат. Тогда всевозможные перемеще-
ния будут направлены только в сторону, из которой
начало координат. Тогда M например может
закрывать положение M' . При этом если мы через M'
проведем плоскость $A'B'C'$ параллельную ABC , то пер-
пендикуляр p' , опущенный из O на эту плоскость,
будет длиннее p . Пусть координаты точки M' будут:

$$x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z.$$

Так как эта точка лежит на плоскости $A'B'C'$, то можно написать:—

$$(x+\delta x)\cos\alpha + (y+\delta y)\cos\beta + (z+\delta z)\cos\gamma = p' = p + \delta p \dots (2)$$

По условию δp есть величина положительная, и во крайнем случае может быть равна нулю, когда точка перемещается по самой плоскости $A'B'C'$ когда плоскость $A'B'C'$ совпадает с плоскостью ABC . Возвращаясь из (2) уравнения (1), найдем:—

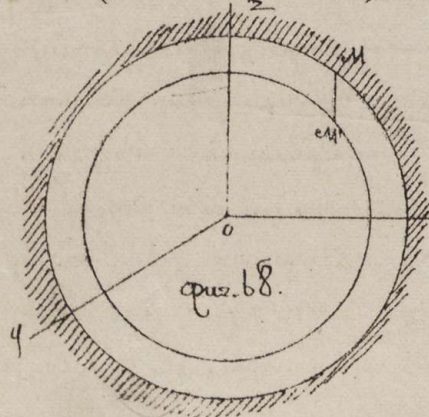
$$\delta x \cos\alpha + \delta y \cos\beta + \delta z \cos\gamma = \delta p.$$

Это будет условие, относящееся к проекции перемещения в наши примитивы. Примем за δp некоторую величину, как уже было сказано безразлично можно положительную величину, так и отрицательную.

Пример 2. Положим, что точка лежит на поверхности сферы, данной уравнением:—

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \dots (3)$$

и может перемещаться только внутри ее.



Пусть она перемещается из положительной M в положительную M' , тогда сфера M' всегда можно провести концентрическую сферу меньшего радиуса R' . Так что:—

$$(x+\delta x)^2 + (y+\delta y)^2 + (z+\delta z)^2 = (R+\delta R)^2$$

или, отбрасывая безконечно малые второго порядка, получим:

$$x^2 + 2x\delta x + y^2 + 2y\delta y + z^2 + 2z\delta z = R^2 + 2R\delta R \dots (4)$$

Возьмем из (4) уравнение уравнение (3) получим

$$2x\delta x + 2y\delta y + 2z\delta z = 2R\delta R$$

Здесь δR следует считать безконечно малой отрицательной величиной или же нулем.

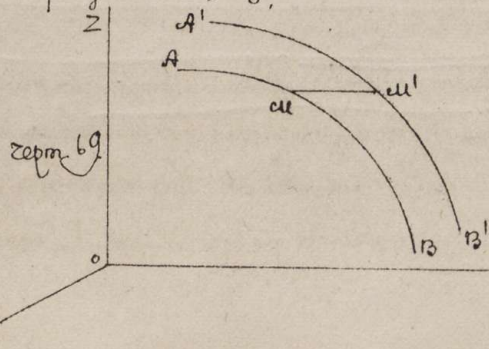
Найденное условие будет соответствовать возможным перемещениям в наших пределах.

Обращаемся теперь к обобщенной ситуации. Пусть точка движется по поверхности, данной уравнением:

$$f(x, y, z) = c \dots (5)$$

где c есть некоторый параметр. Если это если давать c разные значения, то получим различные поверхности. Положим, что материальная точка может покидать эту поверхность только в одну сторону.

Предположим, что на нашей терпящей поверхности, выражаемая уравнением (5) есть AB и точка M



может сходить только в правую сторону поверхности. Пусть она переместится в точку M' . Тогда через точку M'

всегда можно провести границу поверхности, удовлетворяющую уравнению

$$f(x, y, z) = C,$$

где $C' = C + \delta C$. При этом же все поверхности $A'B'$, которые лежат выше от AB — будут иметь один знак, а же, поверхности, лежащие ниже от AB — будут иметь другой знак. Называя координаты точки M' слага $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$, найдем:

$$f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) = C + \delta C \dots (6)$$

Разлагая формулу (6) по степеням $\delta x, \delta y, \delta z$ и отбрасывая члены 2^{го} и высших порядков, получим: —

$$f(x, y, z) + \frac{df}{dx} \delta x + \frac{df}{dy} \delta y + \frac{df}{dz} \delta z = C + \delta C \dots (7)$$

Взяв из уравнения (7) член (7), получим

$$\frac{df}{dx} \delta x + \frac{df}{dy} \delta y + \frac{df}{dz} \delta z = \delta C \dots (8)$$

Здесь δC имеет вполне определенный знак и значение, в случае когда точка перемещается по какой-либо поверхности $A'B'$, равняется нулю.

Уравнение (8) и есть условие, соответствующее возможному перемещению в рассматриваемой задаче. Обращаясь к условию равновесия

$$X \delta x + Y \delta y + Z \delta z = \delta U \dots (9)$$

и замечая, что в членах $\delta x, \delta y, \delta z$ можно рассматривать как совершенно произвольные безотносительно малые величины. Если задать δx и δy какими-либо значениями, то из формулы (8) определим δz с

наименьшие величины δc , которых хотя и произвольна по величине, по степени знаков, такъ это и δz будетъ до некоторой степени определено. Исклѣщая изъ формулы (9) величины δz и вводя въ нее вместо δz наименьшую величину δc . Для этого принимаемъ $gr-\omega(\delta)$ на λ и прибавимъ къ (9), получимъ:

$$(x+\lambda \frac{dt}{dx})\delta x + (y+\lambda \frac{dt}{dy})\delta y + (z+\lambda \frac{dt}{dz})\delta z = \delta u + \lambda \delta c$$

Выбираемъ λ такъ, чтобы

$$z + \lambda \frac{dt}{dz} = 0 \dots\dots (10)$$

У насъ остается:

$$(x+\lambda \frac{dt}{dx})\delta x + (y+\lambda \frac{dt}{dy})\delta y = \delta u + \lambda \delta c \dots\dots (11)$$

Въ этомъ уравненіи δx и δy совершенно произвольны. Это касается до δc , то эта величина малая величина степени знаков, но не степени абсолютной величины. Беремъ такое перемѣненіе δc такъ, чтобы $\delta x \neq 0$, а $\delta y = 0$ и $\delta c = 0$, тогда $gr-\omega(11)$ будетъ:—

$$(x+\lambda \frac{dt}{dx})\delta x = \delta u \dots\dots (12)$$

Если $(x+\lambda \frac{dt}{dx}) \neq 0$, то тогда получимъ изъ него въ определенномъ знаке, положимъ это съ знакомъ $+$, тогда какъ δx совершенно произвольно, то выберемъ δx съ $+$ получимъ въ 1^ю часть равенства (12) положительную величину, а во второй отрицательную. Если бы получено было знакъ $-$, то можно было бы и δx выбрать съ знакомъ $-$ и тогда первая часть равенства (12) была бы опять положительна, это же

возмущено, такъ это остается допустить, что: -

$$x + \lambda \frac{dt}{dx} = 0$$

Погда $\delta u = 0$, это возмущено. Также докажемъ, что

$$y + \lambda \frac{dt}{dy} = 0$$

Укавъ помремъ при уравненіи равновѣсія

$$\left. \begin{aligned} x + \lambda \frac{dt}{dx} &= 0 \\ y + \lambda \frac{dt}{dy} &= 0 \\ z + \lambda \frac{dt}{dz} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (13)$$

А отъ уравненій (11) еще остается:

$$\delta u + \lambda \delta c = 0 \text{ или } \lambda \delta c = -\delta u.$$

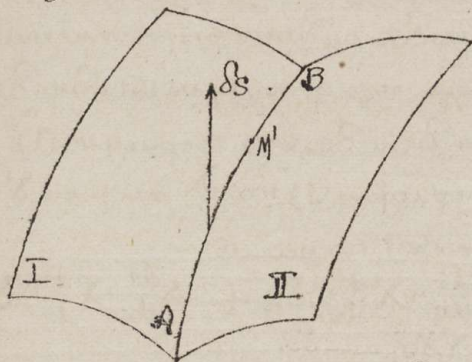
Но такъ какъ δu по уравненію отрицательнаго, то $\lambda \delta c > 0$. Это показываетъ, что при равновѣсіи λ отрицательно и имѣетъ тотъ же знакъ, какъ и δc . Также это ясно изъ имѣетъ тотъ же знакъ, какъ и δc , то это положеніе соответствуетъ равновѣсію, въ противномъ случаѣ, т.е. при разнородныхъ знакахъ λ и δc равновѣсія не будетъ.

Такимъ образомъ въ задаче рѣшена. Предваривъ къ ур-нію (13) ур-ію (5) будемъ имѣть систему ур-нъ, изъ которыхъ опредѣляются λ и x, y, z , соответствующиye равновѣсію. Изъ всѣхъ найденныхъ такимъ образомъ рѣшеній можно выбрать только то, въ которомъ λ имѣетъ знакъ одинаковъй со знакамъ δc .

Задача 2^a. О равновѣсіи точки, лежащей на пересѣченіи двухъ поверхностей, съ которыхъ одна можетъ сдвинуться

ко во одну сторону.

фиг. VII.



Представимъ себѣ ур-е
поверхностей сдвинувшихъ
образамъ. —

$$f(x, y, z) = 0 \text{ и } f_1(x, y, z) = 0,$$

Положимъ, что точка ко-
уется перемещаться, хо-
дъ съ I-поверхности на
верхъ и со II-поверхности

тоже только наверхъ. Первое условіе, какъ было пока-
зано въ предыдущей задаче, состоитъ изъ прожиги $\delta x, \delta y,$
 δz , сдвинувшихъ неравенствомъ: —

$$\frac{dt}{dx} \delta x + \frac{dt}{dy} \delta y + \frac{dt}{dz} \delta z = \delta c \dots \dots (1)$$

Поло также относительно II-поверхности получимъ
условіе)

$$\frac{dt_1}{dx} \delta x + \frac{dt_1}{dy} \delta y + \frac{dt_1}{dz} \delta z = \delta c_1 \dots \dots (2)$$

згдѣ δc и δc_1 произвольны по величинѣ, но имѣютъ впол-
нѣ опредѣленные знаки. Мы напомнимъ выраженіе 1-го не-
равенствомъ потому, что можно было бы написать въ
 $2^{\text{я}}$ части ≥ 0 или ≤ 0

Крайнее условіе равенства будетъ: —

$$2\delta x + 3\delta y + 4\delta z = \delta \pi \dots (2)$$

Въ немъ можно только одно перемещеніе, напр.

δx , считать произвольнымъ по величинѣ и по знаку.

При данныхъ $\delta x, \delta y$ и δz можно было бы опредѣлить

из формулы 1) с помощью δc и δc_1 ; так как δx и δc , хотя и произвольны по величине, но относятся знаком, перемножив δy и δz будем отвлечь их знак относительно. Исключив из формулы (2) δy и δz , заменив их с помощью δc и δc_1 , из формулы (1).

Подставим в формулу (1) на λ и (2) на λ' и прибавим к формуле (2), получим: -

$$\left(x + \lambda \frac{dt}{dx} + \lambda' \frac{dt_1}{dx}\right) \delta x + \left(y + \lambda \frac{dt}{dy} + \lambda' \frac{dt_1}{dy}\right) \delta y + \left(z + \lambda \frac{dt}{dz} + \lambda' \frac{dt_1}{dz}\right) \delta z = \\ = \delta \bar{u} + \lambda \delta c + \lambda' \delta c_1$$

Выбираем λ и λ' так, чтобы

$$y + \lambda \frac{dt}{dy} + \lambda' \frac{dt_1}{dy} = 0 \text{ и } \\ z + \lambda \frac{dt}{dz} + \lambda' \frac{dt_1}{dz} = 0$$

Тогда у нас останутся условия равенств: -

$$\delta x \left(x + \lambda \frac{dt}{dx} + \lambda' \frac{dt_1}{dx}\right) = \delta \bar{u} + \lambda \delta c + \lambda' \delta c_1, \dots (3)$$

Здесь δx совершенно произвольна, безразлично малая величина, а δc и δc_1 произвольны по величине, относятся знаком.

Получим, что мы дали точку такое перемещение, что $\delta x \neq 0$ а $\delta c = 0$ и $\delta c_1 = 0$. Это значит, что мы перемещаем точку M в безконечно близкое положение M' , лежащее на пересечении поверхностей.

В следующем предположении получим: -

$$\left(x + \lambda \frac{dt}{dx} + \lambda' \frac{dt_1}{dx}\right) \delta x = \delta \bar{u}.$$

Так как δx совершенно произвольна, а $\delta \bar{u}$ непременно или отрицательно или равно нулю, то

εξόφθα γραμμένα εἶναι πάντα κυρτοῦ; εἰς δὲ

$$x + \lambda \frac{dt}{dx} + \lambda' \frac{dt}{dx} \neq 0,$$

τοῦτο τότε πρὸς τὸν κεντρικὸν ὅτιν ἀπὸ τοῦ ὁριζήσαντος σημείου
 ὡς καὶ βεβαίως μποροῦν εἶναι δὲ τότε γὰρ σημεῖον, τότε
 εἰς τοῦτο σημειώσας δὲ ἐκ τῆς ἑξῆς ὁριζήσαντος σημείου ὁριζήσαντος
 σημείου καὶ ὁριζήσαντος σημείου καὶ ὁριζήσαντος σημείου
 εἰς τοῦτο σημειώσας γὰρ ὅτιν. Ὁριζήσαντος, ἀποδοτικῶς,
 ποιοῦντος, εἰς

$$x + \lambda \frac{dt}{dx} + \lambda' \frac{dt}{dx} = 0 \text{ ὡς}$$

ὅτι γὰρ (3) ὁριζήσαντος

$$0 = \delta u + \lambda \delta c + \lambda' \delta c,$$

ὅτι γὰρ ὁριζήσαντος σημείου λ καὶ λ' ὁριζήσαντος
 ὁριζήσαντος, εἰς τοῦτο σημειώσας πρὸς τὸν κεντρικὸν ὅτιν
 δc ≠ 0, α δc = 0 τότε 0 = δu + λδc καὶ λδc = -δu, καὶ
 τότε καὶ αὐτὸ δu ≤ 0, εἰς τοῦτο λδc > 0 καὶ ἀποδοτικῶς
 λ καὶ αὐτὸ τότε γὰρ σημεῖον, καὶ α δc. Ὁριζήσαντος
 εἰς δὲ ὁριζήσαντος, εἰς τοῦτο σημειώσας πρὸς τὸν κεντρικὸν ὅτιν
 α δc ≠ 0, τότε καὶ αὐτὸ

$$0 = \delta u + \lambda' \delta c, \text{ ὅθεν } \lambda' \delta c = -\delta u \text{ καὶ } \lambda' \delta c > 0$$

Ὁριζήσαντος ὁριζήσαντος λ καὶ αὐτὸ σημεῖον α δc.
 Ὁριζήσαντος ὁριζήσαντος σημείου ὁριζήσαντος: ὁριζήσαντος
 ὁριζήσαντος ὁριζήσαντος 3 ὁριζήσαντος ὁριζήσαντος:

$$x + \lambda \frac{dt}{dx} + \lambda' \frac{dt}{dx} = 0$$

$$y + \lambda \frac{dt}{dy} + \lambda' \frac{dt}{dy} = 0$$

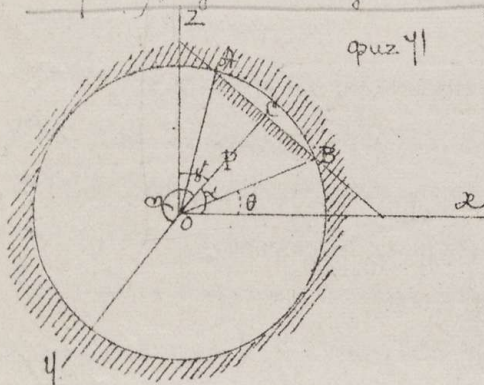
$$z + \lambda \frac{dt}{dz} + \lambda' \frac{dt}{dz} = 0$$

Добавляя к ним уравнения поверхностей

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= 0 \text{ и} \\ f'(x, y, z) &= 0, \end{aligned}$$

получим пять уравнений, из которых определим $\lambda, \lambda', x, y, z$. Далее остается удовлетворить неравенствам $\lambda \delta c > 0$ и $\lambda' \delta c' > 0$. Для этого, как уже было замечено, следует приписать λ и λ' знаки, одинаковые со знаками δc и $\delta c'$. Выводом этого из выше найденных решений, дающих x, y, z и λ, λ' нужно выбрать только те, в которых λ и λ' имеют указанные знаки. Эти решения и будут давать положения равновесия.

Пример 6. Определим положение равновесия материальной точки, лежащей на пересечении сферической полости с плоскостью и лежащей перпендикулярно плоскости внутри сферы и удаляясь от плоскости в ту сторону, где находится центр сферы.



физ. ч.

Возьмем начало координат в центре сферы. Ось Z направим по вертикальной линии вверх, а ось X по горизонтальной. При этом плоскость XZ повернем так, чтобы

она была перпендикулярна к заданной плоскости.

Пусть данная плоскость перескается плоскостью XZ по прямой AB , а сферу по некоторому кругу ABC ; ур-н плоскости и сферы будут: —

$$X \cos \alpha + Z \cos \gamma = p \text{ или } X \cos \alpha + Z \sin \alpha = p,$$

а поверхности шара: —

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

По нашему условию: —

$$\delta p \geq 0, \text{ а } 2R \delta R = \delta R^2 \leq 0$$

составим: —

$$\frac{dt}{dx} = \cos \alpha; \frac{dt}{dy} = 0; \frac{dt}{dz} = \sin \alpha; \frac{dt_1}{dx} = 2x; \frac{dt_1}{dy} = 2y; \frac{dt_1}{dz} = 2z$$

Вспомогательные силы $X=0$, $Y=0$ и $Z=-mg$, — проекции силы тяжести на оси координат. Пишем уравнения равновесия:

$$\lambda \cos \alpha + 2\lambda' x = 0 \dots (1)$$

$$2\lambda' y = 0 \dots (2)$$

$$-mg + 2\lambda \sin \alpha + 2\lambda' z = 0 \dots (3)$$

Обращаясь сначала к ур-но (2), оно удовлетворяется при двух предположениях или $\lambda' = 0$ или $y = 0$, если остановимся на первом предположении, то из ур-на (1) находим $\lambda \cos \alpha = 0$ и так как по условию $\alpha \neq 0$, то $\lambda = 0$. Далее, обращаясь к ур-но (3) найдем $-mg = 0$, это невозможно. Поэтому $\lambda' \neq 0$, значит $y = 0$. Если это так, то материальная точка в положении равновесия лежит на плоскости XZ , а так как она должна лежать на пересечении

плоскости со сферой, то она может иметь два положения А или В. Поищем какое из этих двух положений является равновесием. Для этого определим из уравнения (1) λ , имеем: —

$$\lambda = - \frac{2\lambda'x}{\cos\alpha} \dots\dots (4)$$

и подставим это в уравнение (3), находим: —

$$-mg - 2\lambda'x \operatorname{tg}\alpha + 2\lambda'z = 0$$

откуда:

$$\lambda' = \frac{mg}{2x \left[\frac{z}{x} - \operatorname{tg}\alpha \right]} \dots\dots (5)$$

подставляя в (4) находим: —

$$\lambda = - \frac{mg}{\cos\alpha \left(\frac{z}{x} - \operatorname{tg}\alpha \right)}$$

Если терпеще имеет тот вид, который представлен на рис. 11, то координаты точки А и В положительны, следовательно x и z функции считать величинами положительными. Угол $\alpha < 90^\circ$, следовательно $\cos\alpha > 0$. Также как по условию равновесия λ функции иметь знак, одинаковый с δS , то мы функции имеем:

$$- \frac{mg}{\cos\alpha \left[\frac{z}{x} - \operatorname{tg}\alpha \right]} > 0 \dots\dots (7)$$

а так как λ функции иметь знак одинаковый с δR^2 , то: —

$$\frac{mg}{2x \left[\frac{z}{x} - \operatorname{tg}\alpha \right]} < 0 \dots\dots (8)$$

Мы удовлетворим неравенствам (7) и (8), если возьмем: —

$$\frac{z}{x} - \operatorname{tg}\alpha < 0$$

Назовем угол θ угол, который радиус вектор на-

ней материальной точки образуетъ съ осью z угол θ , какъ известно изъ Аналитической Геометрии:

$$\frac{z}{r} = \cos \theta$$

Наше условие сводится къ тому, что:

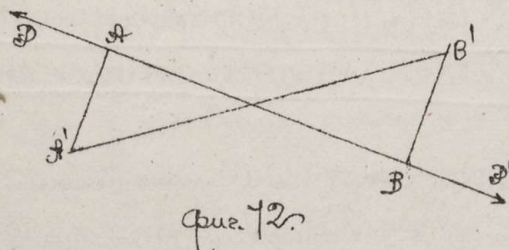
$$\cos \theta < \cos \alpha, \text{ т. е. } \theta < \alpha$$

Это условие удовлетворяется для точки B и не удовлетворяется для точки A . Следовательно точка B будетъ положениемъ равновѣсія, а точка A не будетъ.

Теперь перейдемъ къ теоремѣ Лагранжа.)

Для доказательства теоремы Лагранжа воспользуемся двумя леммами: *Добавимъ обѣимъ послед. жем.*

Лемма 1. Если на концахъ неизменяемой лини действуютъ двѣ равныя силы, направленныя въ противоположныя стороны, то сумма элементарныхъ работъ этихъ силъ при всякомъ перемещеніи лини равна нулю.



Положимъ, что на линіи

AB действуютъ силы

P и P' . Назовемъ коорди-

наты точки A черезъ

x, y, z , а координаты точки B черезъ x_1, y_1, z_1 .

Тогда длина лини l будетъ:

$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = l^2$$

Возмем дифференциалы и заменим δ через δ (так как y, δ изменяется со временем, а δ произвольно изменяется).
 а) Пусть δ постоянно, то $\delta^2 = 0$, следовательно:

$$0 = (x_1 - x)(\delta x_1 - \delta x) + (y_1 - y)(\delta y_1 - \delta y) + (z_1 - z)(\delta z_1 - \delta z).$$

$$(x_1 - x)\delta x_1 + (y_1 - y)\delta y_1 + (z_1 - z)\delta z_1 + (x - x_1)\delta x + (y - y_1)\delta y + (z - z_1)\delta z = 0$$

Умножим это уравнение на $\frac{\partial}{\partial s}$, потом первые три члена умножим и разделим на δs , а вторые на δs , будем иметь: —

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{(x_1 - x)}{\delta} \frac{\delta x_1}{\delta s} + \frac{(y_1 - y)}{\delta} \frac{\delta y_1}{\delta s} + \frac{(z_1 - z)}{\delta} \frac{\delta z_1}{\delta s} \right\} + \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{(x - x_1)}{\delta} \frac{\delta x}{\delta s} + \frac{(y - y_1)}{\delta} \frac{\delta y}{\delta s} + \frac{(z - z_1)}{\delta} \frac{\delta z}{\delta s} \right\}$$

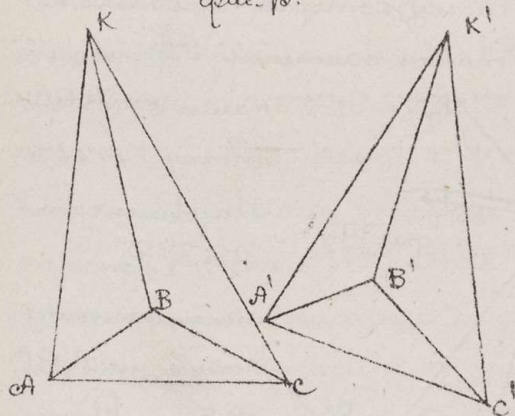
Здесь $\delta s = AA'$, а $\delta s_1 = BB'$. Не трудно заметить, что первая скобка представляет $\cos \alpha$, а вторая $\cos \beta$, где α и β суть углы, образующие направления сил P_1 и P_2 с соответствующими перемещениями, так что: —

$$P_1 \cos \beta \delta s_1 + P_2 \cos \alpha \delta s = 0$$

Лемма 2. Если три точки системы соединены неизменно со свободной точкой, то эти же несколько к крестовнику системы

Умножим это точки A, B и C мы соединим со свободной точкой K . Поверим, что при этом какие бы ни были перемещения так и останутся. Действительно пусть сказано можно было переместить A в A', B в B' и C в C' .

рис. 13.



Построим на плоскости $A'B'C'$ пирамиду $K'A'B'C'$ так, чтобы:

$$A'K' = AK, B'K' = BK \text{ и } C'K' = CK$$

Будем считать в точке K' новое положение точки K . Таким

образом эта точка перестанет лежать на AA' , BB' и CC' .

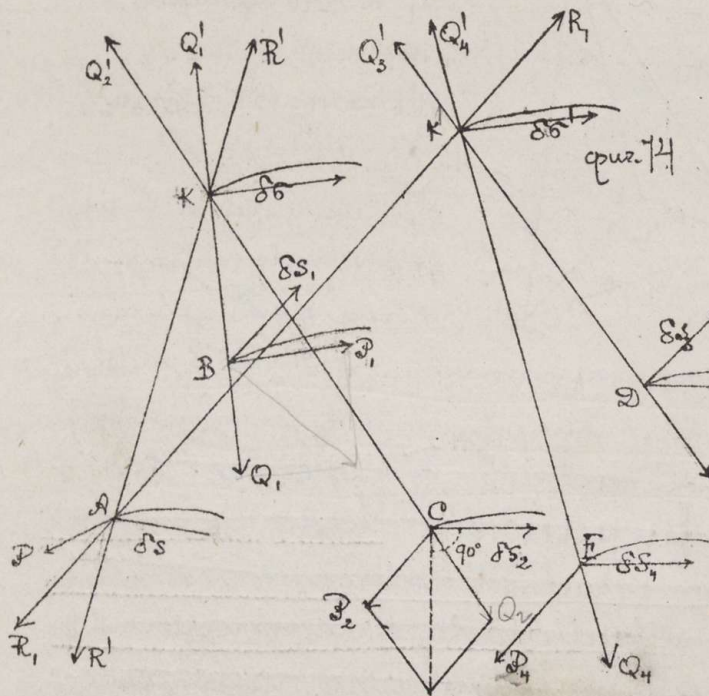
Надо заметить, что линия, эта не имеет той точки, если точка K' находится в плоскости $A'B'C'$.

Теорема Лагранжа. Условия, необходимые и достаточные для равновесия всякой системы состоять в том, что сумма элементарных работ действующих сил при всяком возможном перемещении системы равна или меньше нуля.

Доказательство Липера. Докажем, что это состоит в том, что доказанная теорема справедлива для любого числа условий и применимо, что система состоит из некоторого числа точек.

Возьмем одну из таких точек A , а все остальные соединим в одну точку, на основании второй леммы с точками A , B и C присоединим

свободно материальную точку, которая несколько не
отклоняется перемещений точек системы. Присоеди-



няем к $A, B, C, \dots$
точку K и гр. δ .

Назовем через
 $P, P_1, P_2, P_3, \dots$

силы, действующие
на $A, B, C, D, E, \dots$. Также

как наша си-
стема есть си-
стема с пол-
ными силами
указов, то каж-
дая из точек

ее может перемещаться, только по вполне опреде-
ленным кривым. Тогда самое можно сказать о то-
чках $K, K_1, K'', \dots$. При этом если дадим точку
 A безконечно малое перемещение δS по ее кривой, то
точки $B, C, D, \dots$ получат вполне определенные пере-
мещения $\delta S_1, \delta S_2, \delta S_3, \dots$ по своим кривым.

Также и точки $K, K_1, \dots$ получат перемещения
 $\delta S, \delta S', \dots$. Применим теперь к каждой из
независимых линий по две силы равных и на-
правленных в противоположные стороны. Придав-

существо таких же сил ниско не измѣняющъ въ сис-
темѣ. Пусть по линіи KC будетъ существовать си-
лы Q_2 и Q_2' по KB — Q_1 и Q_1' , по линіи KA — P и P' ; по-
ско такое по линіи $K'D$ силы Q_3 и Q_3' и т.д. При-
дана такимъ образомъ будетъ сила для каждой
тройки точекъ ABC , ADE и т.д. по B , по между эти-
ми иметь силами только тремъ можно дать
какую-нибудь величину, такъ какъ силы, приложен-
ныя по одной и той же линіи, имѣютъ равныя вели-
чины, но противоположны по направленію. Приложен-
ныя такихъ сил ниско не измѣняется въ системѣ,
ни въ ея равновѣсн, ни въ ея движеніи, такъ какъ
все эти силы взаимно уничтожаются. Мы можемъ
теперь вообразить эти силы такъ, чтобы равнодей-
ствующая силъ P_1 и Q_1 была перпендикулярна къ нулю
 δS_1 , равнодействующая силъ P_2 и Q_2 была перпендику-
лярна къ δS_2 , а равнодействующая силъ Q_1', Q_2' и P'
была перпендикулярна къ δS . Такъ какъ известно,
это равнодействующая будетъ тогда перпендику-
лярна къ возможному перемѣщенію, когда ея элеме-
тарная работа равна нулю, а работа равнодейст-
вующей равна суммѣ работъ силъ составляющихъ, то
наши условия выразятся тремя уравненіями: —

$$P_1 \cos(P_1, \delta S_1) \delta S_1 + Q_1 \cos(Q_1, \delta S_1) \delta S_1 = 0; \text{ для точки } B.$$

$$P_2 \cos(P_2, \delta S_2) \delta S_2 + Q_2 \cos(Q_2, \delta S_2) \delta S_2 = 0; \text{ для точки } C$$

$$Q_1' \cos(Q_1' \delta \delta) \delta \delta + Q_2' \cos(Q_2' \delta \delta) \delta \delta + R_1 \cos(R_1 \delta \delta) \delta \delta = 0 \text{ для точки } R.$$

Из этих трех уравнений, в которых $Q_1' = Q_1$; $Q_2' = Q_2$ и $R' = R$, определим Q_1 , Q_2 и R .

Можно также написать уравнения для остальных точек.

$$P_3 \cos(P_3 \delta \delta_3) \delta \delta_3 + Q_3 \cos(Q_3 \delta \delta_3) \delta \delta_3 = 0$$

$$P_4 \cos(P_4 \delta \delta_4) \delta \delta_4 + Q_4 \cos(Q_4 \delta \delta_4) \delta \delta_4 = 0$$

$$Q_3' \cos(Q_3' \delta \delta_3) \delta \delta_3 + Q_4' \cos(Q_4' \delta \delta_4) \delta \delta_4 + R_1 \cos(R_1 \delta \delta_1) \delta \delta_1 = 0$$

Отсюда определим Q_3 , Q_4 и R_1 и т.д.

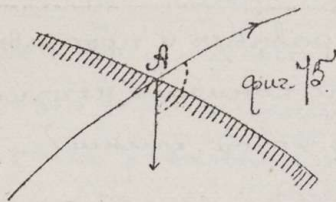
Таким образом, прибавляемых к ним сил вполне определены и при том их выбор так, что вся система нашей системы B, C, D, E, K и K' ... находится в равновесии

Так как все точки системы кроме точки A уравновешены, то все условия уравнений будут выполняться в силах, действующих на точку A . Если эти силы не могут сообщить перемещение точке A , то вся система в равновесии, если же они сообщают ей перемещение, то придет в движение и вся система.

Предполагая для дальнейшей полноты изложения, что наша система с полными силами условий имеет одно степенное перемещение, т.е. что все в точке могут быть передвинуты по их путям только в одну сторону. Это можно было бы доказать,

Возможности перемещения

если бы преобразить эту первую точку кривизны
эту точку А в одну из сторон. Для равновесия точки



А полагая таким образом
условие, чтобы равновесивающая
сила образовалась с единствен-
ными возможными перемеще-
ниями или прямой или ту-

пой прямой, а это, было сказано, выражается тем же услови-
ем, что элементарная работа равновесивающей
силы для точки была бы равна нулю или вместо эле-
ментарной работы равновесивающей силы можно
взять сумму работ составляющих сил. Из ска-
занного следует, что условие необходимое и доста-
точное для равновесия системы состоит в том, что
это: —

$$P \cos(P, \delta s) \delta s + R \cos(R, \delta s) \delta s + R_1 \cos(R_1, \delta s) \delta s + \dots \approx 0$$

В это условие входят неизвестные, каковы силы R ,
но все они могут быть легко исключены. Для
этого придем к каноническому условию равно-
весия все уравнения, содержащие каковы для опре-
деления всех сил Q и всех сил R . Это та-
кого уравнения получим: —

$$\begin{aligned} &\approx [P \cos(P, \delta s) \delta s + Q_1 \cos(Q_1, \delta s) \delta s + Q_1' \cos(Q_1', \delta s) \delta s + \\ &+ Q_2 \cos(Q_2, \delta s) \delta s + Q_2' \cos(Q_2', \delta s) \delta s + \dots \\ &+ R \cos(R, \delta s) \delta s + R \cos(R, \delta s) \delta s + \dots] \approx 0. \end{aligned}$$

Мы видимъ здѣсь, что все силы Q и все силы R входить попарно. На основаніи леммы 1 все эти пары можно приравнять нулю, ибо они представляютъ сумму работы двухъ равныхъ и противоположныхъ силъ, приложенныхъ по касательной кривой линіи, по направленію этой линіи.

Итакъ имѣемъ:—

$$Q_1 \cos(Q_1 \delta s_1) \delta s_1 + Q'_1 \cos(Q'_1 \delta s'_1) \delta s'_1 = 0 \text{ и}$$

$$R_1 \cos(R_1 \delta s_1) \delta s_1 + R'_1 \cos(R'_1 \delta s'_1) \delta s'_1 = 0$$

Выводя изъ этого сокращеніе и у насъ остается:—

$$\sum P \cos(P \delta s) \delta s \geq 0, \dots (1)$$

Это и требовалось доказать.

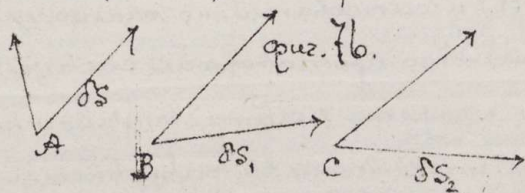
Такимъ образомъ теорема Лагранжа доказана нами для системы съ подвижною системою условий и удовлетворяющей некоторой силе точки.

Если бы система имѣла данную силу точки, то къ ней мы всегда бы могли прибавить еще точку, имѣющую массу, присоединивъ эту точку кривизнѣею прямины къ тремъ точкамъ системы и предположивъ, что на эту точку действуетъ сила P , равная нулю. Мы найдемъ бы такимъ образомъ систему съ некоторою силою точки, для которой теорема уже доказана.

Обращаемся к распространению теоремы на случай системы с неполным числом у
словий. Положим сначала, что формула (1), кото-
рая должна быть удовлетворена для всех возмо-
жных перемещений системы есть необходимым при-
знаком равновесия, т.е., что при равновесии формула
(1) непременно удовлетворяется. Мы не нарушим
равновесия, если будем прибавлять новые связи.
Прибавим же так, чтобы дополнить систему с
полным числом условий и чтобы она имела только
только определенных перемещений:

$$\delta s, \delta s_1, \delta s_2, \dots (a)$$

Мы будем иметь при этом систему с полным
числом условий, которая находится в равновесии
потому на основании предыдущего заключаем, что
для перемещений, представленных рядом (a) непе-



ненно формула (1)
удовлетворяется.

Новые условия не
будут прибавлять новых

связей. Знаем так, что другой ряд возможных
перемещений дополнит единственными возможными
тогда приведем к случаю, что и для него удовлетво-
ряется формула (1). Таким образом докажем, что
формула (1) удовлетворяется для всех возможных

перемещений. Покажем теперь, что эта формула есть достаточный признак равновесия, т. е. что при ее существовании для всех возможных перемещений системы будетъ равновесие.

Допустимъ, что система не будетъ въ равновесии, а придетъ въ движеніе. Беръ точки ея перемещаются, получивъ какое нибудь возможное перемещение. Пусть это получатъ возможные перемещения, представляемые радиусом (Q). Мы не нарушимъ образовавшихся движеній, если прибавимъ новый связи такъ, что система сдвигается въ полныхъ силъ условіи и изъ точекъ ея единственныя возможные перемещения будутъ даны радиусомъ. Такимъ образомъ при прибавленіи такой связи движеніе все таки будетъ происходить. Но мы получили систему съ полными силами условій, для которой, какъ было сказано, удовлетворяется формула (1) и следовательно она должна быть въ равновесии. Это противорѣчіе показываетъ, что система не можетъ прийти въ движеніе и следовательно будетъ находиться въ равновесии. Такимъ образомъ теорема Лагранжа доказана для всехъ случаевъ.

Мы докажемъ, что условіе, необходимое и достаточное для равновесія системы, выражается такъ: —

$$\sum \delta \cos(\mathbf{P}, \mathbf{S}) \delta \mathbf{S} \geq 0 \dots (1)$$

Это условие должно быть удовлетворено для всех возможных перемещений. Если система имеет только двусторонние перемещения, то следует писать: —

$$\sum P \cos(P, \delta S) \delta S = 0 \dots (2)$$

Потому что если для какой нибудь группы перемещений $\delta S, \delta S_1, \delta S_2, \dots$ сообщенные точки системы исполняют

$$P \cos(P, \delta S) \delta S + P_1 \cos(P, \delta S_1) \delta S_1 + \dots < 0$$

то взявши эти перемещения в обратном направлении мы получим бы следующую сумму элементарных работ:

$$P \cos(180 - (P, \delta S)) \delta S + P_1 \cos(180 - (P, \delta S_1)) \delta S_1 + \dots = \\ = -P \cos(P, \delta S) \delta S - P_1 \cos(P, \delta S_1) \delta S_1 - \dots > 0$$

Так что для противоположной группы перемещений, которая также возможна, условие равновесия не удовлетворяется.

Таким образом ^{образом} нельзя писать ни для одной из групп возможных перемещений меньше нуля, а надо писать равно нулю.

Вместо того, чтобы писать условие равновесия в форме (1) или (2) можно писать так: —

$$\sum (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) = \delta \Pi \dots (3)$$

для случая, когда перемещение двустороннее или одностороннее; при этом $\delta \Pi$ есть нуль или отрицательная величина; а для двустороннего перемещения.

$$\delta \Pi = 0$$

$$\Sigma (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) = 0 \dots (4)$$

Когда условия равновесия системы выражены уравнениями между координатами, при этом:

$$f(x, y, z, x_1, y_1, z_1, \dots) = 0; f_1 = 0 \dots f_{p-1} = 0 \dots (5)$$

а другая группа функций:

$$Q(x, y, z, x_1, y_1, z_1, \dots) = C; Q_1 = C_1 \dots Q_{q-1} = C_{q-1} \dots (6)$$

таковы, что эти функции $Q, Q_1, \dots$ равны $C, C_1, \dots$ в положении равновесия, а при перемещении системы функции Q или прирастают или убывают, когда либо одно из этих двух, так же $\delta C, \delta C_1, \dots$

имеют определенные знаки. На основании сказанного в теории равновесия можно projections возможные перемещений $\delta x, \delta y, \delta z, \delta x_1, \delta y_1, \dots, \delta y_{p-1}$ отнесенные к равновесию:

$$\frac{df}{dx} \delta x + \frac{df}{dy} \delta y + \frac{df}{dz} \delta z + \frac{df}{dy_1} \delta y_1 + \frac{df}{dx_1} \delta x_1 + \frac{df}{dz_1} \delta z_1 + \dots = \delta f = 0$$

$$\delta f_1 = 0 \dots \delta f_{p-1} = 0 \dots (7) \quad (p \text{ ур-ий})$$

и рядить равенств вида:

$$\delta Q = \delta C, \delta Q_1 = \delta C_1, \delta Q_2 = \delta C_2 \dots \delta Q_{q-1} = \delta C_{q-1} \dots (8) \quad (q \text{ ур-ий})$$

где $\delta C, \delta C_1, \dots, \delta C_{q-1}$ произвольны по величине и имеют определенные знаки. В ур-ии (7) в сбалансированном предположении можно рассматривать все вариации $\delta x, \delta y, \delta z, \delta x_1, \delta y_1, \dots$ произвольными, так как они относятся к ур-иям (7) и q ур-иям (8). Поэтому только $3n - p - q$ вариаций совершенно произвольны, где n — число точек. Остальные $p + q$ вариаций опре-

длинах, помощью ур-ий (7) и (8) по заданным произвольным вариациям и величинам δc . Умножение заданных вариаций производных, умножая ур-ию (7) на $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}$, а ур-ию (8) на $\mu, \mu_1, \dots, \mu_{q-1}$ и прибавляя полученные результаты к ур-ию (5), напр. при δx будем иметь коэффициенты: —

$$x + \lambda \frac{dt}{dx} + \lambda_1 \frac{dt_1}{dx} + \dots + \lambda_{p-1} \frac{dt_{p-1}}{dx} + \mu \frac{dc}{dx} + \mu_1 \frac{dc_1}{dx} + \dots + \mu_{q-1} \frac{dc_{q-1}}{dx}$$

Возьмем $p+q$ величин λ и μ такими образом, чтобы коэффициенты при $p+q$ заданных вариациях обратились в нуль, тогда у нас останется только независящая вариация и мы покажем, как это было доказано в механике точки, что все эти коэффициенты равны нулю. Таким образом получим Σ ур-ий равновесия такого вида —

$$x + \lambda \frac{dt}{dx} + \lambda_1 \frac{dt_1}{dx} + \dots + \lambda_{p-1} \frac{dt_{p-1}}{dx} + \mu \frac{dc}{dx} + \mu_1 \frac{dc_1}{dx} + \dots + \mu_{q-1} \frac{dc_{q-1}}{dx} = 0 \quad (9)$$

и таких уравнений Σ . Отъ условий (3) у нас остаются еще: —

$$0 = \delta u + \mu \delta c + \mu_1 \delta c_1 + \mu_2 \delta c_2 + \dots + \mu_{q-1} \delta c_{q-1}$$

Изъ этого условия подробно тому, какъ было в механике точки вытекает, что все μ произвольны и одинаковые знаки с δc .

Для решения задачи присоединимъ къ Σ уравнений (9) — p ур-ий (5) и q ур-ий (6), получимъ $\Sigma p+q$ ур-ий, изъ которыхъ определимъ $p+q$ независимыхъ множителей λ и μ и Σ координаты, соответствующую

и их положению равновесия.

Вз найденных решений следует выбрать только те, которые дают для δ и надирующие знаки.

Кроме этого способа решения несколько продолжительного, существует еще другой, более удобный в приложении.

Этот другой способ состоит в том, что мы выражаем сумму элементарных работ действующих сил не с помощью приращений координат $\delta x, \delta y, \delta z, \dots$ а с помощью измѣненія каких нибудь другихъ параметровъ, опредѣляющихъ положеніе системы, при чемъ эти параметры выбираются такъ, чтобы они были совершенно независимы другъ отъ друга. Тогда уже сколько будетъ столько, сколько свободныхъ перемещеній имѣетъ система.

Пусть эти параметры суть $q, q_1, q_2, \dots, q_{i-1}$; с помощью ихъ можно представить сумму элементарныхъ работъ такъ: —

$$\sum P \cos(P\delta s) \delta s = \sum Q \delta q$$

Возьмемъ для простоты случая двусторонняго перемещенія. Для равновѣсія кажда, чтобы:

$$\sum Q \delta q = 0$$

И такъ какъ все варіаціи δq совершенно произ-

важны, то все коэффициенты при них равны нулю. Такие образцы получим в ур-и: —

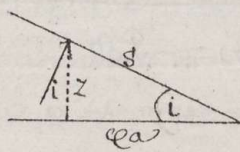
$$Q=0; Q_1=0; Q_2=0 \dots Q_{i-1}=0$$

В которых $Q, Q_1, Q_2, \dots, Q_{i-1}$ суть некоторые функции $q, q_1, q_2, \dots$. Из этих уравнений определим i -неизвестных параметров (q), которые вполне характеризуют положение системы.

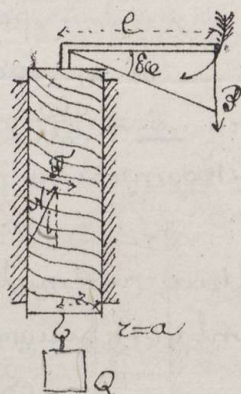
Рассмотрим сказанное приращение.

Задача 1. Имеем винт с квадратной резьбой, на конус которого накручена пружина Q , употребляемая некоторую силу P , мы её поджимаем. Определяется тем, равна эта сила P .

Введем силу трения; она зависит от нормального давления. Пусть нормальное давление будет N . Все силы уравновешиваются с си-



(a)



верт. $\frac{1}{2}l$

ло Q и $N \cos i = Q + \frac{fN \sin i}{\cos i}$ откуда $N = \frac{Q}{\cos i - f \sin i}$

Сила же трения, действующая в обратную сторону движения, будет f и она равна, как мы

(21.)

знаем $\mathcal{A}f$, т.е.

$$\tilde{F} = \frac{Q}{\cos i} f \dots (1)$$

Применим метод Лагранжа. Положим, что мы повернули вектор на угол $\delta\varphi$. Составим сумму работ всех сил и приравняем ее нулю, получим:

$$\text{раб.}(\mathcal{P}) + \text{раб.}(F) + \text{раб.}(Q) = 0 \dots (2)$$

Определим отдельно каждую из величин этой суммы.

$$\text{раб.}(\mathcal{P}) = \int \vec{\mathcal{P}} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\text{раб.}(Q) = -Q\delta z,$$

но $z = a \operatorname{tg} i$ (как видно из триг. a) и $\delta z = a \delta \operatorname{tg} i$; подставим получим: -

$$\text{раб.}(Q) = -Qa \operatorname{tg} i \cdot \delta\varphi$$

$$\text{раб.}(F) = -F\delta s,$$

но $\frac{\delta s}{\cos i} = \frac{a\delta\varphi}{\cos i}$ (из триг. a), а следовательно $\delta s = \frac{a\delta\varphi}{\cos i}$.

Подставим получим: -

$$\text{раб.}(F) = -F \frac{a\delta\varphi}{\cos i}$$

Или, подставив вместо F ее величину из равенства (1), получим

$$\text{раб.}(F) = -\frac{Qa\delta\varphi}{\cos^2 i} f$$

Подставим найденные величины во формулу (2) и вынесем $\delta\varphi$ за скобку, получим:

$$\delta\varphi \left(\mathcal{P} - Qa \operatorname{tg} i - Qf \frac{a}{\cos^2 i} \right) = 0$$

Но $\delta\varphi$ не равно нулю, следовательно:

$$P - Q \cdot a \cdot \operatorname{tg} i - Q \cdot f \frac{a}{\cos^2 i} = 0$$

откуда

$$P = \frac{Q \cdot a}{f} \left(\operatorname{tg} i + \frac{f}{\cos^2 i} \right) \cdot \dots (A)$$

$$P = \frac{Qa}{f} \left(\operatorname{tg} i + \frac{f}{\cos^2 i - f \sin^2 i} \right)$$

Если предположим, что движение происходит вниз, т.е. груз будет опускаться, то тогда трение перейдет в обратное направление, т.е. знак и мы получим ту же формулу (A), что

$$Q = \frac{a}{f} \left(\operatorname{tg} i - \frac{f}{\cos^2 i} \right) \dots (B)$$

и если бы наоборот, что

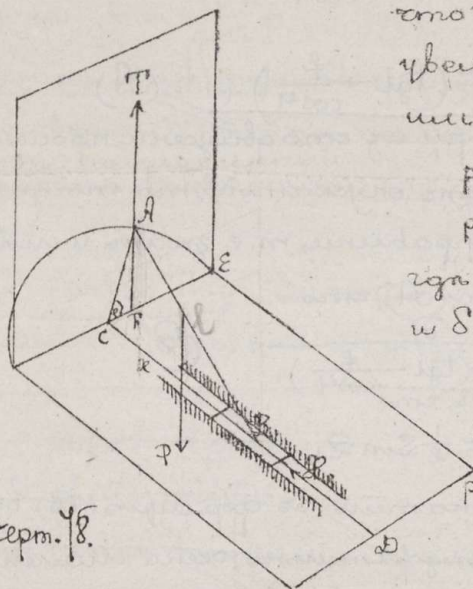
$$f = \cos^2 i \cdot \operatorname{tg} i = \frac{1}{2} \sin 2i,$$

то тогда знаменатель в формуле (B) был бы равен нулю и следовательно ось маленькой скобки P будет опускаться большой груз Q.

Задача 2. Брусок AB опирается концом A на вертикальную ось, а концом B на ползунок, который может перемещаться по горизонтальной плоскости по направлению линии CD, перпендикулярной оси. Определить вертикальную силу T и горизонтальную силу X, удерживающие брусок в равновесии.

Введем здесь независимые переменные, определяющие положение бруска, длину $CB = x$ и угол $ACE = \varphi$. Составляем сумму работ элементарных действующих сил T, X, P, где P есть вес

бруска, приложенный в его середине, предположим, что α увеличивается, и φ увеличивается, будем иметь: —



$$\text{рад } \alpha = -\alpha \delta \alpha$$

$$\text{рад } T = TS(AF),$$

$$\text{где } AF = A \sin \varphi = \sqrt{l^2 - x^2} \sin \varphi$$

$$\text{и } \delta AF = \sqrt{l^2 - x^2} \cos \varphi \delta \varphi -$$

$$- \frac{x \delta x \sin \varphi}{\sqrt{l^2 - x^2}}$$

также имеем:

$$\text{рад } T = T(\sqrt{l^2 - x^2} \cos \varphi \delta \varphi -$$

$$- \frac{x \delta x \sin \varphi}{\sqrt{l^2 - x^2}})$$

$$\text{рад } P = -\delta \frac{AF}{2} =$$

$$= -\frac{P}{2}(\sqrt{l^2 - x^2} \cos \varphi \delta \varphi - \frac{x \delta x \sin \varphi}{\sqrt{l^2 - x^2}})$$

На основании теоремы Лагранжа

$$\text{рад } \alpha + \text{рад } T + \text{рад } P = 0$$

Продифференцируем соответственные величины и отделим коэффициенты при $\delta \alpha$ и $\delta \varphi$, получим:

$$\delta \alpha \left\{ -x - \frac{T x \sin \varphi}{\sqrt{l^2 - x^2}} + \frac{P x \sin \varphi}{2 \sqrt{l^2 - x^2}} \right\} + \delta \varphi \left\{ T \sqrt{l^2 - x^2} \cos \varphi - \frac{P}{2} \sqrt{l^2 - x^2} \cos \varphi \right\} = 0$$

Так как $\delta \alpha$ и $\delta \varphi$ произвольны, независимы друг от друга переменны, то коэффициенты при них должны быть нули, получим: —

$$-x - \frac{T x \sin \varphi}{\sqrt{l^2 - x^2}} + \frac{P x \sin \varphi}{2 \sqrt{l^2 - x^2}} = 0$$

$$T \sqrt{l^2 - x^2} \cos \varphi - \frac{P}{2} \sqrt{l^2 - x^2} \cos \varphi = 0$$

Из последнего уравнения получим: —

$$T = \frac{P}{2} \text{ и из 1-го уравн.: — } x = 0.$$

О равновесии свободной неизменной системы

Если имеем свободно неизменяемую систему, то все точки ее могут полагать двусторонние возможности перемещений. Поэтому условия равновесия можно написать в виде: —

$$\Sigma (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0 \dots\dots (1)$$

Здесь мы поступаем следующим образом. Так как положение твердого тела вполне определяется шестью параметрами и перемещение его зависит от шести произвольных величин, то введение в формулу (1) вместо $\delta x, \delta y, \delta z, \delta z, \dots$ соответствующих выражений через 6 независимых вариаций, за эти вариации примем величины $\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma, \delta\delta, \delta\epsilon, \delta\theta$, из которых 3 первые выражают бесконечно малые поступательные перемещения, которыми мы можем сдвинуть тело по направлению неподвижных осей координат x, y, z , а $\delta\delta, \delta\epsilon, \delta\theta$ выражают бесконечно малые угловые перемещения, на которые мы можем повернуть тело около осей координат. В кинематике неизменяемой системы было доказано, что скорости точек этой системы выражаются формулами

$$B. \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} + qz - ry \\ \frac{dy}{dt} = \frac{d\beta}{dt} + rz - px \\ \frac{dz}{dt} = \frac{d\gamma}{dt} + py - qx \end{array} \right.$$

где $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ суть скорости точки тела, находящейся в данный момент в начале неподвижных координат, а p, q, z — суть угловые скорости вращения тела около неподвижных координат. Умножая наши формулы на dt получим:

$$dx = d\alpha + d\varphi \cdot z - d\theta \cdot y$$

$$dy = d\beta + d\theta \cdot x - d\varphi \cdot z$$

$$dz = d\gamma + d\varphi \cdot y - d\theta \cdot x$$

Здесь dx, dy, dz суть действительные перемещения определенной точки тела, $d\alpha, d\beta, d\gamma$ — суть перемещения начала координат.

$$d\alpha = p dt; d\beta = q dt; d\theta = z dt.$$

суть ²бесконечно малые углы, на которые тело повернулось в бесконечно малое время dt около осей координат. Оверменно такими же образом представим себе всякое воображаемое перемещение тела. При этом для отличия воображаемого перемещения от действительного заменим знаки d знаком δ , получим

$$\delta x = \delta\alpha + \delta\varphi \cdot z - \delta\theta \cdot y$$

$$\delta y = \delta\beta + \delta\theta \cdot x - \delta\varphi \cdot z$$

$$\delta z = \delta\gamma + \delta\varphi \cdot y - \delta\theta \cdot x$$

Подставив это в формулу (1) и отбрасывая все коэффициенты при вариациях $\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma, \delta\varphi, \delta\theta$, которые выносим за знаки суммы. Получим

иметь: -

$$\Sigma X(\delta x + z \delta y - y \delta z) + Y(\delta y + x \delta z - z \delta x) + Z(\delta z + y \delta x - x \delta y) = 0$$

или

$$\delta x \Sigma X + \delta y \Sigma Y + \delta z \Sigma Z + \delta x \Sigma (yZ - zY) + \delta y \Sigma (zX - xZ) + \delta z \Sigma (xY - yX) = 0 \quad (2)$$

Поскольку все в вариации вполне произвольны, то для равенства необходимо, чтобы коэффициенты при этих равенствах были нули. Это дает в известном условии равенства свободной кинематической системы:

$$\Sigma X = 0; \quad \Sigma Y = 0; \quad \Sigma Z = 0;$$

$$\Sigma (yZ - zY) = 0; \quad \Sigma (zX - xZ) = 0; \quad \Sigma (xY - yX) = 0$$

показывающих, что сумма проекций всех сил относительно каждой из осей координат равна нулю. и сумма моментов сил = 0

В заключение сказать, когда мы имеем не свободную систему, то вопросы о ее равновесии могут быть так же решаемы из основной формулы (2)

1) Если тело, например, имеет неподвижную точку, то принять ее за начало координат каиндее:

$$\delta x = \delta y = \delta z = 0$$

такое начало координат не может перемещаться. В формуле (2) у нас останутся только три произвольных вариации; отсюда и получим только три условия равновесия: -

$$\Sigma (yZ - zY) = 0 \quad \Sigma (zX - xZ) = 0 \quad \Sigma (xY - yX) = 0$$

2). Если тело имеет ось, около которой оно может вращаться и скользя по ней; тогда направление осей X по этой оси мы будем иметь в формуле (2) только $\delta\alpha \neq 0$, так как тело может скользя по оси и $\delta\beta \neq 0$, ибо оно может вращаться около этой оси; все остальные вариации равны нулю. И мы получим из формулы (2) только 2 условия равновесия:—

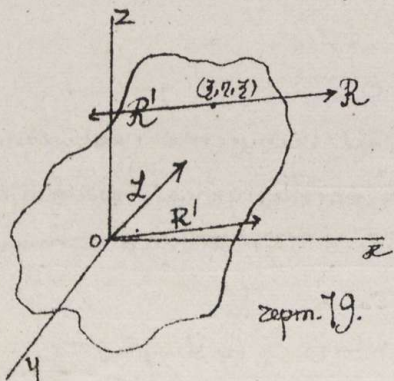
$$\sum X = 0 \text{ и } \sum (yZ - zY) = 0$$

3). Если, наконец тело имеет ось, около которой оно ^(только) может вращаться, тогда только $\delta\beta \neq 0$ и мы получим из формулы (2):—

$$\sum (yZ - zY) = 0$$

т.е. будет только одно условие равновесия.

Прибавим к статье о равновесии твердого тела замечание об отыскании равнодействующей сил и точки ее приложения.



Пусть на твердое тело (зерт. 79) действуют система сил и требуется найти равнодействующую из сил R и точку ее приложения. Пусть утверждается, что сила R есть рав-

координатуясь, а (ξ, η, ζ) точка ее приложения. Полагая силу R^1 противоположною и равную силе R . Тогда, отбросивши равнодействующую R , будем иметь равновесие под действием сил, действующих на тело, и силы R^1 . Если проекции силы R^1 на оси координат соответственно обозначим через P_1, P_2, P_3 , то условия равновесия напишутся в таком виде:

$$\begin{aligned} \Sigma X - P_1 &= 0, \quad \Sigma Y - P_2 = 0, \quad \Sigma Z - P_3 = 0; \\ \Sigma (yZ - zY) - (yP_3 - zP_2) &= 0; \quad \Sigma (zX - xZ) - (zP_1 - xP_3) = 0; \\ \Sigma (xY - yX) - (xP_2 - yP_1) &= 0 \end{aligned}$$

Первые три из этих уравнений определяют P_1, P_2, P_3 , т.е. определяют величину равнодействующей

$$P_1 = \Sigma X; \quad P_2 = \Sigma Y; \quad P_3 = \Sigma Z.$$

Оставшиеся три уравнения

$$\left. \begin{aligned} \Sigma (yZ - zY) &= yP_3 - zP_2 \\ \Sigma (zX - xZ) &= zP_1 - xP_3 \\ \Sigma (xY - yX) &= xP_2 - yP_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots (II)$$

содержат при определенных координатах ξ, η и ζ могут приложения равнодействующей силы. На первый взгляд кажется, что всегда существует эта точка ξ, η, ζ , так как из трех ур-ий (II) при координатах всегда можно найти определения. Но если бы было, что эти три уравнения (II) могут

существовать совместно только при существовании некоторого условия. Условие это получится так: циклически каждое из уравнений (II) соответственно на каждое из уравнений $\Sigma X=P_1, \Sigma Y=P_2, \Sigma Z=P_3$ и сложим; тогда получим:

$$\Sigma X(\Sigma(YZ - ZY)) + \Sigma Y(\Sigma(ZX - XZ)) + \Sigma Z(\Sigma(XY - YX)) = 0. \text{ (III)}$$

Этот трехчлен должен равняться нулю при существовании равнодействующей. Таким образом мы аналитическим путем вывели условие существования равнодействующей. Если через L обозначим линейный момент пары, равнодействующей всех пар, которая получится, переноса точки приложения всех сил в начало координат и прибавив соответственные пары, то равенство (III) можно переписать так: —

$$np_x R_1 \cdot np_x L + np_y R_1 \cdot np_y L + np_z R_1 \cdot np_z L = 0$$

$$\text{или } R_1 L (\cos \alpha \cos \lambda + \cos \beta \cos \mu + \cos \gamma \cos \nu) = 0$$

где α, β, γ суть углы, которые равнодействующая R_1 составляет с осями координат, а λ, μ, ν — суть углы, образуемые линейными моментами L с осями координат. Последнее равенство можно написать еще и так: —

$$R_1 L \cos(R_1, L) = 0$$

Из того, что R_1 равнодействующая, следует, необходимо, чтобы, по перенесении всех сил в начало координат, равнодействующая этих сил была

перпендикулярна кю линейному моменту пары, по-
существующей при этом, т. е. чтобы эта равнодействующая
шла параллельно плоскости пары. Но уравнение: —

$R_1 L \cos(R, L) = 0$ удовлетворяется также и тогда,
когда либо $R_1 = 0$, либо $L = 0$. Если $L = 0$, то это зна-
чит, что равнодействующая всех сил, пересекен-
ных в центре и есть равнодействующая всей си-
стемы сил, ибо никакой пары при этом не полука-
ется ($L = 0$). В этом случае и ур-ия (II) удовлет-
воряются при $x = y = z = 0$. Но если $R_1 = 0$, то ур-ие
(III) все-таки удовлетворяется, ибо

$$\sum x = 0, \sum y = 0, \sum z = 0$$

мы же можем говорить, что равнодействующая
существует, хотя $= 0$ и имеет точку приложения
в безконечности (пара сил)

Итак условие (III) есть аналитический признак
существования равнодействующей. Но когда формула
(III) существует, то не трудно показать, что из трех
ур-ий (II) только два самостоятельны, третье же есть
следствие двух первых. Действительно, написать
выражение

$$[xP_3 - zP_2 - \sum(yZ - zY)]P_1 + [yP_3 - zP_2 - \sum(xZ - zX)]P_2 + \\ + [zP_2 - xP_1 - \sum(xY - yX)]P_3$$

видим, что оно в силу условия (III) существование
равнодействующей есть нуль. Предположиво дающе,

это первое, два ур-ия (II) и потому имеем из полученных выражений имеем: —

$$(\sum P_2 - \eta P_1 - \sum (\alpha Y - \gamma Z)) P_3 = 0$$

а так как $P_3 \neq 0$, то получим $\sum (\alpha Y - \gamma Z)$

$$\sum (\alpha Y - \gamma Z) = \sum P_2 - \eta P_1$$

Максимум образом при определении трех координат точки при условии равнодействующей силы в силе из существования имеем два ур-ия (II). Эти два ур-ия 1^й степени относительно ξ , η и ζ представляют в пространстве прямую линию. И действительно, если равнодействующая существует, то точку ее приложения можно брать из точки на прямой линии по направлению равнодействующей.

Покажем, что условие (III) удовлетворяется для заданных случаев, когда силы заданы и имеют равнодействующую.

Пусть силы все центральны. Они навстречу или идут равнодействующую. Пусть центр сил будет в начале координат, тогда

$$\frac{x}{x} = \frac{y}{y} = \frac{z}{z}$$

выполнение же каждого из условий вида $(\gamma Z - \alpha Y)$ равносильно и условию (III) удовлетворяется.

Пусть все силы параллельны какой-либо прямой, составляющей с осями координат углы α , β и γ .

Обозначим эти силы через $P, P_1, \dots$ причем будем

приписывать или знаки $+$ тогда, когда они направлены в сторону, куда направлена по условию прямая, и $(-)$ — в обратную сторону. Тогда: —

$$\begin{array}{l|l} x = r \cos \alpha & x_1 = r_1 \cos \alpha \\ y = r \cos \beta & y_1 = r_1 \cos \beta \\ z = r \cos \gamma & z_1 = r_1 \cos \gamma \text{ и т. д.} \end{array}$$

Внося все это в условие (III), получим: —

$$\begin{aligned} \sum r \cos \alpha \sum r (y \cos \gamma - z \cos \beta) + \sum r \cos \beta \sum r (z \cos \alpha - x \cos \gamma) + \\ + \sum r \cos \gamma \sum r (x \cos \beta - y \cos \alpha) \end{aligned}$$

или

$$\sum r \left\{ \sum r [\cos \alpha (y \cos \gamma - z \cos \beta) + \cos \beta (z \cos \alpha - x \cos \gamma) + \cos \gamma (x \cos \beta - y \cos \alpha)] \right\}$$

Выражение это очевидно равно нулю, т. е. условие (III) и во этом случае удовлетворяется.

Определим координаты центра параллельных сил, т. е. той точки данной тела, представляющего действие системы параллельных сил, через которую всегда проходит направление равнодействующей этих параллельных сил, при всевозможных направлениях составляющих. Пусть на тело действует система параллельных сил; равнодействующая каково есть. Обратимся к ур-нию, определяющим координаты $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ точки приложения равнодействующей. Мы видим, что таких ур-ий имеется 3, но это только 2 из них независимы, а третьи есть следствие этих двух.

Поэтому напишем две уравнения: —

$$\left. \begin{aligned} \Sigma(yZ - zY) &= \eta \Sigma Z - \xi \Sigma Y, \\ \Sigma(zX - xZ) &= \zeta \Sigma X - \xi \Sigma Z \end{aligned} \right\} \dots (IV)$$

Запишем все составляющие X, Y, Z через $\rho \cos \alpha$, $\rho \cos \beta$, $\rho \cos \gamma$ и т.д. Величины ρ обозначают различные силы системы; они могут иметь различные знаки и разные знаки; величины η, ξ, ζ как дан- кой системы постоянны и суть углы, образуемые с осью координат того прямого, параллельно ко- торой действуют силы. Если указанной записать ур-ие (IV) примут вид: —

$$\begin{aligned} \cos \gamma \Sigma p y - \cos \beta \Sigma p z &= \eta \cos \gamma \Sigma p - \xi \cos \beta \Sigma p \\ \cos \gamma \Sigma p z - \cos \gamma \Sigma p x &= \zeta \cos \alpha \Sigma p - \xi \cos \gamma \Sigma p \end{aligned}$$

или: —

$$\begin{aligned} \cos \gamma (\Sigma p y - \eta \Sigma p) &= \cos \beta (\Sigma p z - \xi \Sigma p) \\ \cos \alpha (\Sigma p z - \xi \Sigma p) &= \cos \gamma (\Sigma p x - \zeta \Sigma p) \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\Sigma p z - \xi \Sigma p}{\cos \alpha} = \frac{\Sigma p y - \eta \Sigma p}{\cos \beta} = \frac{\Sigma p x - \zeta \Sigma p}{\cos \gamma}$$

или

$$\frac{\frac{\Sigma p x}{\cos \alpha} - \zeta}{\Sigma p} = \frac{\frac{\Sigma p y}{\cos \beta} - \eta}{\Sigma p} = \frac{\frac{\Sigma p z}{\cos \gamma} - \xi}{\Sigma p}$$

Это есть ур-ие к которому прямой линии, соответ- ствующей с осью координат углы α, β, γ согласо- вательно параллельно действующим силам.

Можно было бы изменить направление действующих сил, т.е. можно было бы предположить, что углы α, β, γ

мываются, но очевидно что ур-ия эти всегда удовлетворяются координатами —

$$\xi = \frac{\sum p_x}{\sum p}; \quad \eta = \frac{\sum p_y}{\sum p}; \quad \zeta = \frac{\sum p_z}{\sum p} \dots\dots (VI)$$

т.е. это при всяком направлении действующих сил (паралельных) направление равнодействующей всегда проходит через одну и ту же точку, координаты которой определяются соотношениями (VI).

Эта то точка и есть центр параллельных сил.

Если действующие силы пропорциональны массам частиц тела, т.е. если $p = mg$, то подставив это в формулы (VI) получим: —

$$\xi = \frac{\sum mx}{M}, \quad \eta = \frac{\sum my}{M}, \quad \zeta = \frac{\sum mz}{M},$$

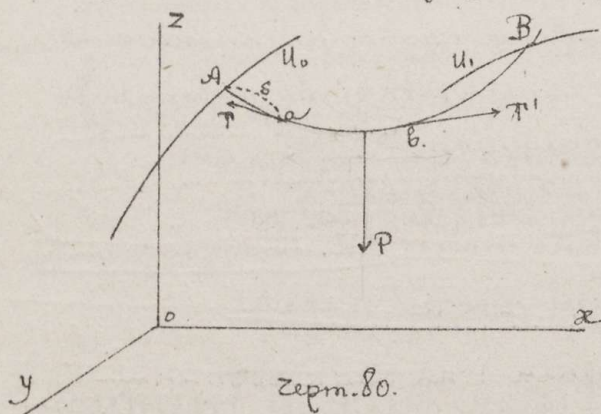
где M есть масса всего тела. Это суть координаты центра тяжести или центра инерции.

Теория равновесия гибкой нити

Гибкою нитью называется безконечно тонкая всесома нить. Плотность гибкой нити называется количеством массы, приходящейся на единицу длины. Если это если назовем через ρ плотность нити, а через ds элемент ее длины, то количество массы, приходящее на этот элемент, будет ρds . Если ρ величина постоянная, то нить

кажется однородной. Если же каждый элемент ds имеет массу ρds и ρ величина переменная, т.е. есть функция ρ , то нить называется неоднородной. Мы будем рассматривать случай, когда гибкая нить однородна

Пусть AB (зрм. 80) будет некоторая часть нити, укрепленная в точках A и B и находящаяся под действием системы сил. Возьмем оси координат x, y, z и рассмотрим безконечно малый элемент нити ab . Для сохранения равнове-



ствия элемента ab . Для сохранения равновесия элемента ab приложим в точках a и b приложенные к нему касательные

силы T и T' , которые направлены по касательным к нити в точках a и b . Под действием этих двух сил, действующих на массу элемента ab , он находится в равновесии. Поэтому проекции на оси координат x, y, z сил T и T' и внешних сил, действующих на ab должны равняться нулю.

Пусть x, y, z будут составившими по осямь вно-

кеи силы, отнесенной ко единице массы, т.е. что
получения силы, действующей на определенную
массу равно сумме соответствующих полей на
массу. Если как масса нашего шмента аб
есть Qds , то как же будем действовать вна-
имеи силы: —

$$XQds, YQds \text{ и } ZQds.$$

Проекция на оси координат силы написана T'
будет: —

$$-T \frac{dx}{ds}; -T \frac{dy}{ds}; -T \frac{dz}{ds}$$

иго $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}$ и $\frac{dz}{ds}$, как же убожно выражаем со'бу
проект касательной к кривой аб. Мы берем эту
часть что можем а, что можем же в будущем можем
со'бу обозначать так: —

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)', \left(\frac{dy}{ds}\right)', \left(\frac{dz}{ds}\right)'$$

Поэтому проекция силы T' на оси координат бу-
дет:

$$T' \left(\frac{dx}{ds}\right)'; T' \left(\frac{dy}{ds}\right)'; T' \left(\frac{dz}{ds}\right)'$$

Напишем теперь, что сумма проекций всех сил,
действующих на аб по оси X есть нуль:

$$XQds + T' \left(\frac{dx}{ds}\right)' - T \frac{dx}{ds} = 0$$

Разность $T' \left(\frac{dx}{ds}\right)' - T \frac{dx}{ds}$ есть ли это иже как
преобразование произведения $T \frac{dx}{ds}$ при переходе от то-
чки а к точке в. Если это употребить раз-
ность, может быть представлена, как: —

$$d\left(T \frac{dx}{ds}\right),$$

это выражение является первым, но не полным, не-
сложным S . Второму нам равенство нулю
будет:

$$Xg ds + d\left(T \frac{dx}{ds}\right) = 0$$

Или, по делению на ds , найдем:

$$Xg + \frac{d}{ds}\left(T \frac{dx}{ds}\right) = 0$$

Оно есть одно из условий равенства нулю
максимально малые найдем глобально. Так
это все g -из равенства нулю будет

$$\left. \begin{aligned} Xg + \frac{d}{ds}\left(T \frac{dx}{ds}\right) &= 0 \\ Yg + \frac{d}{ds}\left(T \frac{dy}{ds}\right) &= 0 \\ Zg + \frac{d}{ds}\left(T \frac{dz}{ds}\right) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

Второе уравнение системы, вытекающее
из найденных g -из

1. Система. Второе уравнение

$$\left. \begin{aligned} Xg + \frac{dT}{ds} \frac{dx}{ds} + T \frac{d^2x}{ds^2} &= 0 \\ Yg + \frac{dT}{ds} \frac{dy}{ds} + T \frac{d^2y}{ds^2} &= 0 \\ Zg + \frac{dT}{ds} \frac{dz}{ds} + T \frac{d^2z}{ds^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

Умножим эти g -из на $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ и сложим, получим:

$$\left(X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds}\right)g + \frac{dT}{ds} \left\{ \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 \right\} +$$

$$+ T \left(\frac{dx}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds} \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds} \frac{d^2z}{ds^2} \right) = 0$$

Убавим из анализа, что:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1 \dots (3)$$

Эквивалентность при втором случае $= 1$.
 Эквивалентность же при третьем случае будет нуль.
 Это доказываемое взяв производную от равенства (3) по ds , получим:

$$2\left(\frac{dx}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds} \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds} \frac{d^2z}{ds^2}\right) = 0.$$

$$(Xdx + Ydy + Zdz)\rho + dT = 0$$

Убедимся, что эта величина имеет природу, зависящую от разности, суммируемых силовых функций, так что

$$Xdx + Ydy + Zdz = dU.$$

это и силовые функции; постанавив, найдем:

$$dU\rho + dT = 0,$$

откуда

$$U\rho + T = \text{const.} \dots (4)$$

Потому интеграл поболеет определенным значением T в данном месте кинетической энергии, это можно бы формулировать не иначе, разное значение U в концы определяется по тем же поверхностям уровня, на которых лежат эти концы. Если наименьшая точка A лежит на поверхности уровня, для которой U есть U_0 , а точка B на поверхности уровня, для которой U есть U_1 , то имеем: -

$$U_0\rho + T_0 = \text{const.}$$

$$U_1\rho + T_1 = \text{const.}$$

вспомог., каждем:—

$$(u_0 - u_1) \rho = T_1 - T_0$$

Если каннипор кити кафорити погр гойетвиет
тотуеити, то $u = -gz$ (масса прикипата равной 1,
сила отнесена к единице массы). Тогда

$$T_1 - T_0 = (-gz_0 + gz_1) \rho = + \rho g (z_1 - z_0)$$

Если каннипорз точка В лежит выше точки
а на высоте h , то $z_1 - z_0 = h$ и тогда

$$T_1 - T_0 = \rho g h$$

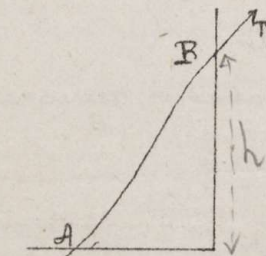


рис. 81.

тогда $\rho g h$ есть вертикальный кити.

2) Сложение. Для вывога этого
сложения канниетте ур-ие (2)
во виду

$$-X_g = \frac{dT}{ds} \frac{dx}{ds} + T \frac{d^2x}{ds^2}$$

$$-Y_g = \frac{dT}{ds} \frac{dy}{ds} + T \frac{d^2y}{ds^2}$$

$$-Z_g = \frac{dT}{ds} \frac{dz}{ds} + T \frac{d^2z}{ds^2}$$

Разведем эти ур-ия во квадрат и сложим,
называя равногноститующую вконтиную. силу через:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

получим:—

$$R^2 g^2 = \left(\frac{dT}{ds} \right)^2 \left[\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 \right] + T^2 \left[\left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} \right)^2 \right] +$$

$$+ 2T \frac{dT}{ds} \left(\frac{dx}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds} \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds} \frac{d^2z}{ds^2} \right)$$

Скобка при первом и втором загну равенства
есть 1, при подстановке = 0. Это же касается др
скобки во 2-м элеке, то на основании формулы при-

получения аксиомы из геометрии и т.д. —

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 = \frac{1}{\varepsilon^2}$$

здесь ε — есть радиус кривизны, поэтому получим:

$$R^2 g^2 = \left(\frac{dT}{ds}\right)^2 + \frac{T^2}{\varepsilon^2}$$

$$Rg = \sqrt{\left(\frac{dT}{ds}\right)^2 + \frac{T^2}{\varepsilon^2}}$$

Получим, что кривая кривизны имеет вид, при-
свой линии и как же не геометрически никаких
сил; тогда $R=0$ и $\frac{1}{\varepsilon}=0$. получим $0 = \frac{dT}{ds}$, от-
куда $dT=0$ или $T=\text{const}$. Знаем, если кривая
прямойлинейна и как же не геометрически ника-
ких сил, то кривизна постоянна. Можно при-
бавить к этому, что наоборот, если известно,
что на кривой не геометрически никаких сил, то
она непременно прямойлинейна. Это следует
из формул (4) и (5) по формулам (4):

$$Ug + T = \text{const}$$

Так как не геометрически никаких сил, то
 $U=0$, отсюда $T=\text{const}$. В формулах (5) надо по-
ложить $R=0$, т. к. не геометрически никаких сил и
 $\frac{dT}{ds}=0$, т. к. доказано, что T — постоянно. Получим
 $\frac{T}{\varepsilon}=0$, откуда следует, что

$$\frac{1}{\varepsilon}=0 \text{ или } \varepsilon=\infty$$

Это и требовалось доказать. Мы видим, что

$$Rg = \sqrt{\left(\frac{dT}{ds}\right)^2 + \left(\frac{T}{\varepsilon}\right)^2}$$

отсюда

$$\left(\frac{T}{z}\right)^2 = R^2 g^2 - \left(\frac{dT}{ds}\right)^2$$

Мы имеем это:

$$T = U_0 + C$$

$$\frac{dT}{ds} = g \frac{du}{ds} = g \frac{ds}{ds}$$

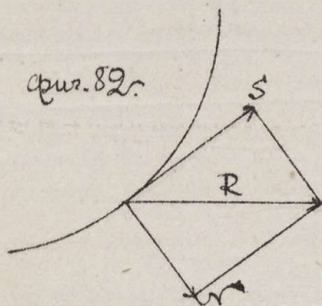
$$\left(\frac{T}{z}\right)^2 = g^2 (R^2 - s^2) = g^2 N^2; \quad \frac{T}{z} = gN$$

$$\text{Кривизна нити } \frac{1}{z} = \frac{gN}{T}$$

Если натяжение нити T очень велико, то $\frac{1}{z} = 0$, а $z = \infty$, т. е.

какая бы сила не действовала на нить, но если мы ее разогнем с ограниченной силой, то нить приблизительно примет на-

правление прямой линии



Фиг. 82.

Задача о упругой линии

Напишем уравнения равновесия упругой нити:

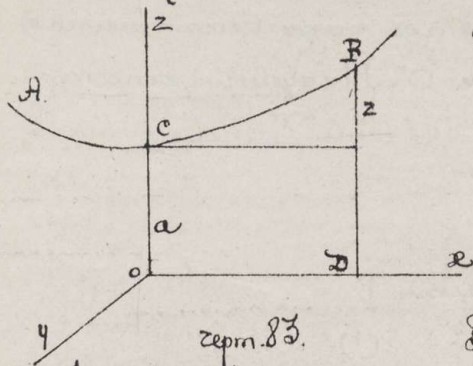
$$Xg + \frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) = 0$$

$$Yg + \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) = 0$$

$$Zg + \frac{d}{ds} \left(T \frac{dz}{ds} \right) = 0$$

и применяем их к случаю, когда нить находится под действием силы тяжести. Мы выберем будем положить, направить ось Z по вертикальной линии вверх, это $X=0$, $Y=0$ и $Z=-g$ (ибо $m=1$) Располагим ось Z так, чтобы она

проходящая через самую нижнюю точку кривой C , а ось Ox повернется таким образом, чтобы она была параллельна касательной в точке C . По-



ставим величины $\sin$ в уравнении равновесия кривой кривой, будем иметь

$$0 + \frac{d}{ds} \left(T \frac{dz}{ds} \right) = 0 \dots (1)$$

$$0 + \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) = 0 \dots (2)$$

$$-g\rho + \frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) = 0 \dots (3)$$

Разделим уравнение (2)

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) = 0.$$

Интерпретируем: -

$$T \frac{dy}{ds} = C.$$

Из определения C заключаем, что в точке C кривая перпендикулярна к оси y и следовательно $\frac{dy}{ds} = 0$; поэтому $C = 0$. Отсюда видно по всей кривой: -

$$T \frac{dy}{ds} = 0$$

И так как $T \neq 0$, то $\frac{dy}{ds} = 0$. Интерпретируем

$$y = 0'$$

Так как для точки C $y = 0$, то $0' = 0$, следовательно видно

$$y = 0$$

Таким образом доказано, что кривая будет лежать в плоскости Ox . Переходим к ур-ю 1.

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) = 0, \text{ интегрируем: —}$$

$$T \frac{dx}{ds} = C''$$

Из определения этого постоянного значения, это же можно $C' - \frac{dx}{ds} = 1$, так как касательная образует с осью X угол 0° . Получим, что константу C' в точке C есть T_0 , получим: —

$$T_0 = C', \text{ следовательно: —}$$

$$T \frac{dx}{ds} = T_0$$

Отсюда можно определить T

$$T = \frac{T_0}{\left(\frac{dx}{ds} \right)} \dots \dots \dots (1)$$

Подставляя эту формулу в $\mathcal{B}^e$ уравнение —

$$\frac{d}{ds} \left(T_0 + \frac{dz}{\frac{dx}{ds}} \right) = g \sin \alpha$$

$$\frac{d}{ds} \left(T_0 + \frac{dz}{dx} \right) = g \sin \alpha$$

Получим $\frac{g \sin \alpha}{T_0} = \frac{1}{a} \dots \dots \dots (2)$, где a — некоторая постоянная величина, получим: —

$$d \left\{ \frac{dz}{dx} \right\} = \frac{ds}{a}$$

Получим $\frac{dz}{dx} = p$, тогда элемент дуги гиперболы

$$ds = \sqrt{dz^2 + dx^2} = dx \sqrt{1 + p^2}$$

Подставляя $dp = \frac{dx \sqrt{1 + p^2}}{a}$, разделив переменные

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{dx}{a} \dots \dots \dots (3)$$

Интегрируя получим: —

$$\lg(p + \sqrt{1 + p^2}) = \frac{x}{a} + C_0$$

Из определения C_3 заключаем, что при $x=0$, т. е. в точке C , $p=0$, так как p есть $\frac{1}{2}$ угла, образуемого касательной с осью x^0 ; получим: —

$$l(1) = C_3, \text{ т. е. } C_3 = 0$$

таким образом: —

$$l(p + \sqrt{1+p^2}) = \frac{x}{a}$$

откуда

$$p + \sqrt{1+p^2} = e^{\frac{x}{a}} \dots (4)$$

Предположим отсюда p . Из этого вытекающее тождество: —

$$(\sqrt{1+p^2} + p)(\sqrt{1+p^2} - p) = 1$$

Представим ~~то~~ это тождество ввиде первой скобки в формулу (4) и перенесем второе множитель во вторую часть сомножителя, получим: —

$$\sqrt{1+p^2} - p = e^{-\frac{x}{a}} \dots (5)$$

Формулу (5) вычитаем из (4), получим: —

$$2p = e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}; \quad p = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}})$$

Заменяем p через $\frac{dz}{dx}$, умножаем на dx и интегрируем: —

$$z = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) + C_4$$

Из определения C_4 предполагаем, что разложение $x=a$; тогда ~~что~~ точка C будет иметь: — $z=a$, $x=0$; представим как следует: —

$$a = a + C_4, \text{ следовательно } C_4 = 0$$

получим: —

$$z = \frac{a}{2}(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}) \dots (b)$$

Это и есть уравнение искомого эллипса кривой; оно называется уравнением эллиптической кривой.

Поскольку вторая часть уравнения не зависит от изменений x на $-x$, то эллиптическая кривая имеет ось OZ своей осью симметрии.

Остаётся ещё определить силу натяжения T во всякой точке кривой. Для этого приходим к формуле (1), в которую нужно подставить величину $\frac{dx}{ds}$; тогда как

$$ds = dx \sqrt{1+p^2}, \text{ то } \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$$

подставим, во формулу (1), получим: —

$$T = T_0 \sqrt{1+p^2} \dots (7)$$

Для определения $\sqrt{1+p^2}$ складываем формулы (5) и (4); получим по разложению на 2

$$\sqrt{1+p^2} = \frac{1}{2}(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}})$$

или по формуле (6):

$$\sqrt{1+p^2} = \frac{z}{a}$$

Подставим в формулу (7) и получим: —

$$T = \frac{T_0 z}{a}$$

или, заменив $\frac{1}{a}$ его величиной из формулы (3), получим: —

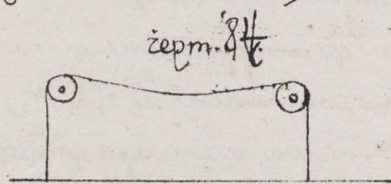
$$T = T_0 z \frac{g}{T_0} = g z; \text{ следовательно: —}$$

$$T = g z \dots (8)$$

Найдённый результат имеет очень интересное

геометрическое представление. Ось Ox , отстоящая от вершины изогнутой линии на расстоянии a , называется направленной, а расстояние a ее параметром.

Положим, что нужно определить натяжение в точке B . Проведем ординату Z , которая представляется линией BZ и посмотрим каково будет в этой отрезке кисти, расположенного по прямой BZ . Так как на единицу длины приходится масса ρ , то в эту на единицу длины приходится ρg , а на всю длину Z придется в эту gZ . Таким образом натяжение в какой-нибудь точке кисти равно



в эту отрезка этой кисти, помещенного вертикально от данной точки до направленной. На основании сказанного, кисть, перекинутая через два блока, как показано на термуре находится в равновесии. Определим теперь длину дуги, имеем: —

$$ds = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) dx$$

откуда

$$S = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}) + C_2$$

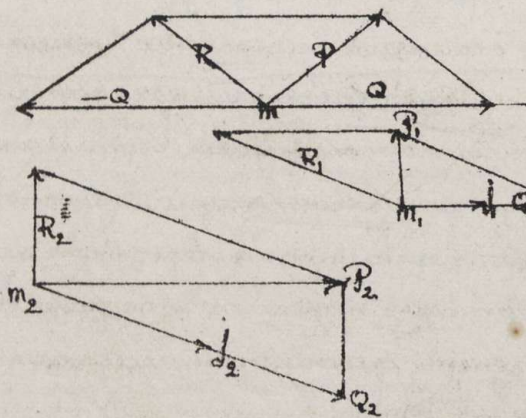
то, при $x=0$, $S=0$ и $C_2=0$, следовательно

$$S = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}})$$

Теорема Д'Аламбера.

Теорема Д'Аламбера состоит в следующем. — Если в какой нибудь момент движения остановить все материальные точки системы и приложить ко всем силам действующим и силам инерции этого момента, то получится равновесие.

Доказательство: — Пусть $m, m_1, m_2, \dots$ будут материальные точки



материальных точек системы, а $P, P_1, P_2, \dots$ силы, к которым действуют. Если бы точки $m, m_1, m_2, \dots$ были свободны, то от их действия эти силы получили бы полные ускорения, направленные

по силам и равные: —

$$\frac{P}{m}, \frac{P_1}{m_1}, \frac{P_2}{m_2}, \dots$$

Но так как точки не свободны, то они получают полные ускорения. Пусть эти полные ускорения будут $j, j_1, j_2, \dots$. Берем силы: —

$$Q = mj; Q_1 = m_1 j_1; Q_2 = m_2 j_2; \dots$$

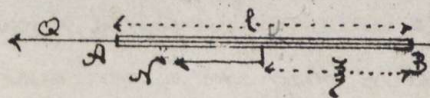
потерянных сил. Дополнив карманные или параллельные, мы видим, что сила P состоит из сил P_1 и Q . (Сила Q есть такая карманная сила инерции, так как она равна произведению массы на полное ускорение и направлена в сторону противоположную полному ускорению.

Из всего сказанного следует, что силы движущие выветт с силами инерции уравновешиваются сопротивлением связей системы, т.е. будут приложены к системе остановленной немогут сообщить ей движение. Это и требовалось доказать.

Прежде чем перейти к дальнейшему приложению динамики системы, разделим несколько примеров:

I. Материальная полоска, бесконечно тонкая, постоянной плотности, находится под действием сил P и Q , при чем $P > Q$, и движется в сторону силы P . Какова будет сила натяжения полоски в разных ее местах.

рис. 86.



Вообразим, что полоска остановлена в каждой частице

приложена сила инерции $- \rho dx \frac{d^2x}{dt^2}$ (где ρ есть

плотности, отнесенная ко всему объему системы)

Примем условие равновесия: —

$$P - Q - \int_0^l \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right) dx = 0$$

Здесь $\frac{d^2 x}{dt^2}$ при интегрировании считается постоянным, интегрируя уже рассматриваемые на всем протяжении l напомним: Выводимое условие: —

$$P - Q - gl \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right) = 0$$

отсюда ускорение

$$j = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{P - Q}{gl}$$

Этими же производными частями и записываемся сивой натяжения N , тогда натяжения которой будем K , на расстоянии ξ от точки B натяжения сивы P , то будем иметь: —

$$-N + P - \int_0^\xi \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

или

$$-N + P - \frac{\xi}{l} (P - Q) = 0$$

откуда

$$N = P - \frac{\xi}{l} (P - Q)$$

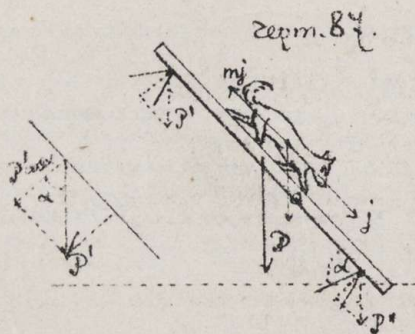
Вот сива' натяжения. Она дается известными иными же образом от $N = P$ (при $\xi = 0$) до $N = Q$ (при $\xi = l$), а если $\xi = \frac{l}{2}$, т.е. в середине навозки получим: —

$$N = P - \frac{\frac{l}{2}}{l} (P - Q) = P - \frac{1}{2} (P - Q) = P - \frac{P}{2} + \frac{Q}{2}$$

или

$$N = \frac{P + Q}{2}$$

II. Имеем доску под углом α к горизонту и подпертая в двух точках. На этой доске находится собака (травматическая есть ли возможность у собаки, чтобы доска не падала). Она должна будет двигаться с определенной скоростью вперед и доска не упадет). Пусть вес доски будет P , а собаки — Q .



Спротивление опоре будет P' и P'' . Это веса доски и собаки разобьются на силы трения. Они найдутся, если разложить силы P' и P'' на нормальные и касательные по линии доски. Силы трения будут:

$$P' \cos \alpha + P'' \cos \alpha = P \cos \alpha$$

Можно также написать: — $Q \cos \alpha$.

Следовательно силы трения будут

$$(P + Q) \cos \alpha,$$

а давление соответственно будет

$$P \sin \alpha + P'' \sin \alpha = P \sin \alpha$$

$$Q' \sin \alpha + Q'' \sin \alpha = Q \sin \alpha$$

а все давление будет: —

$$(P + Q) \sin \alpha$$

Получив доску падающую, так что: —

$$(P+Q)\sin\alpha > (P+Q)\cos\alpha,$$

а собака бегущая по дороге будет со ускорением j Семановским, собаку и приложим к ней ускорение $= \frac{Q}{g}j$ (пом. что $m = \frac{Q}{g}$, а $mj = \frac{Q}{g}j$). Имеем условие равновесия

$$(P+Q)\cos\alpha = (P+Q)\sin\alpha - \frac{Q}{g}j$$

Отсюда и определим ускорение j , с которого прыжка будет бегать собака

$$j = \frac{[(P+Q)\cos\alpha + (P+Q)\sin\alpha]g}{Q}$$

или $j = [\cos\alpha + \sin\alpha](1 + \frac{P}{Q})g$

Если бы не было трения, т.е. $f=0$, тогда бы

$$j = \sin\alpha(1 + \frac{P}{Q})g$$

и собака прыжка была бы бегать со большим ускорением.

Проекция силы инерции на ось координаты есть: —

$$\begin{aligned} & -m \frac{d^2x}{dt^2}; -m \frac{d^2y}{dt^2}; -m \frac{d^2z}{dt^2} \\ & -m \frac{d^2x_1}{dt^2}; -m \frac{d^2y_1}{dt^2}; -m \frac{d^2z_1}{dt^2} \end{aligned}$$

Приведем эти силы к составленным

$$X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1, \dots$$

движущих сил, каковы условие равновесия по теореме Лагранжа. Тогда будем иметь: —

$$\Sigma \left\{ \left(x - m \frac{dx}{dt^2} \right) \delta x + \left(y - m \frac{dy}{dt^2} \right) \delta y + \left(z - m \frac{dz}{dt^2} \right) \delta z \right\} = 0 \dots (1)$$

Мы пишем $= 0$, так как в будущем рассматриваем только такие системы, для которых возможны двусторонние перемещения. Знаки $\delta x, \delta y, \delta z, \delta x_1, \delta y_1, \dots$ суть перемещения, которые возможны в будущем для данной системы, если все уже в настоящее время t остановили, а также считать t постоянным во всех условиях системы, в которых вводится время.

Пусть напр. система уже n точек относительно p условий вида: —

$$f(x, y, z, x_1, y_1, z_1, \dots, t) = 0$$

$$f_1 = 0; f_2 = 0 \dots \dots f_{p-1} = 0 \dots \dots (2)$$

из которых в некоторых можно вводить время t , в других оно может и не входить.

В функции 1 можно будет считать произвольных только $3n - p$ вариаций, т. е. между вариациями будет существовать на основании условий (2) p зависимостей вида:

p зависимостей вида:

$$\frac{dt}{dx} \delta x + \frac{dt}{dy} \delta y + \frac{dt}{dz} \delta z + \frac{dt}{dx_1} \delta x_1 + \frac{dt}{dy_1} \delta y_1 + \dots + \frac{dt}{dz_{p-1}} \delta z_{p-1} = 0 \dots (3)$$

Запомним, что мы не пишем сюда $\frac{dt}{dt} \delta t$, так как по принципу Д'Аламбера, давая возможные перемещения надо считать время постоянным. В помощи этих p условий вида (3), можно исключить p зависимых вариаций. Для этого нужно.

наизаучить условия) как $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ и прибавить к ур-ю (1). Поэтому, отобразив коэффициенты при всех вариациях возврат. р. величине λ так, чтобы коэффициенты при р. зависящих вариациях обратились в нуль. Тогда у нас останутся только $3n - p$ независимых вариаций, коэффициенты при которых должны равняться нулю вследствие независимости этих вариаций. Таким образом составимся $3n$ ур-ий движения

$$X - m \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \frac{dt}{dx} + \lambda_1 \frac{dt}{dx_1} + \dots + \lambda_{p-1} \frac{dt}{dx_{p-1}} = 0 \dots (4.)$$

Ур-я ур-ий: —

$$\sum \left\{ \left(X - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \delta z \right\} = 0$$

Следует, что для данной гамильтоновой системы при произвольных перемещениях $\delta x, \delta y, \delta z, \delta x_1, \delta y_1, \dots$ имеем $3n$ ур-ий движения такого простого вида: —

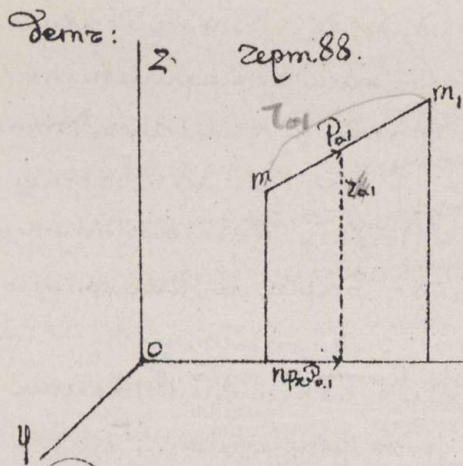
$$X - m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0; \quad Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} = 0; \quad Z - m \frac{d^2 z}{dt^2} = 0$$

$$X_1 - m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = 0; \quad Y_1 - m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = 0; \quad Z_1 - m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} = 0$$

Примечание это к примеч.

Движение систем свободных притягивающихся материальных точек прямо пропорционально расстоянию и произведению масс.

Величина гравитации точек m , к точке m_2 —



$$P_{0,1} = km_1, x_{0,1}$$

Отсюда

$$np_x P_{0,1} = km_1, x_{0,1} \frac{x_1 - x}{x_{0,1}}$$

$$np_x P_{0,1} = km_1 (x_1 - x)$$

В этой формуле в кин-

земе и знака проекции
онс записывается в
($x_1 - x$)

Предположим, что все образцы проекции в кин-
семе приращение точек: $m_2, m_3, m_4, \dots$ на то-
ку m_1 кажутся: —

$$x = km_1 (x_1 - x) + km_2 (x_2 - x) + \dots + km_{n-1} (x_{n-1} - x)$$

Предположим, что все образцы кажутся в кин-
семе приращение. Выводим
этого дифференциального ур-ия движения кин-
системы будем: —

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = km_1 (x_1 - x) + km_2 (x_2 - x) + \dots + km_{n-1} (x_{n-1} - x)$$

$$m_1 \frac{d^2 x}{dt^2} = km_1 (x_1 - x) + km_2 (x_2 - x) + \dots + km_{n-1} (x_{n-1} - x)$$

$$m_{n-1} \frac{d^2 x_{n-1}}{dt^2} = km_{n-1} (x_{n-1} - x) + km_{n-2} (x_{n-2} - x) + \dots + km_{n-1} (x_{n-1} - x)$$

Предположим, что ур-ия кажутся и что все $y_1, y_2, \dots$ кин-
семе в кин-семе ур-ия кажутся и что все $x_1, x_2, \dots$ по-
лучим: —

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \dots + m_{n-1} \frac{d^2 x_{n-1}}{dt^2} = 0$$

Умножая на dt , интегрируем, получим: —

$$m \frac{dx}{dt} + m_1 \frac{dx_1}{dt} + \dots + m_{n-1} \frac{dx_{n-1}}{dt} = C$$

Из простоты предположим, это постоянное

$C=0$, получим: —

$$m \frac{dx}{dt} + m_1 \frac{dx_1}{dt} + \dots + m_{n-1} \frac{dx_{n-1}}{dt} = 0.$$

Умножаем на dt и второй раз интегрируем, получим

$$mx + m_1 x_1 + \dots + m_{n-1} x_{n-1} = C'$$

Предположим, это какин'нибудь ось координат вобрали таким образом, что в какин' времени $C'=0$, тогда во все время движение: —

$$mx + m_1 x_1 + \dots + m_{n-1} x_{n-1} = 0 \dots (2)$$

Совершенно так же получится относительно двух других осей получим: —

$$\left. \begin{aligned} m\eta + m_1 \eta_1 + \dots + m_{n-1} \eta_{n-1} &= 0 \\ m\zeta + m_1 \zeta_1 + \dots + m_{n-1} \zeta_{n-1} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

Преобразуем на основании найденных уравнений формулу (1). Сокращаем первое из этих уравнений на m и раскладываем все скобки, получим: —

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = K \{ m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_{n-1} x_{n-1} - x(m + m_1 + \dots + m_{n-1}) \}$$

На основании уравнения (2) можем положить

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_{n-1} x_{n-1} = -mx$$

получим окончательно: —

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -Kx(m + m_1 + \dots + m_{n-1})$$

наименование, это

$$m + m_1 + \dots + m_{n-1} = M$$

где M — масса всей системы, каждаго! —

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kMx$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k m l m a$$

также каждаго

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -kMy$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -kMz$$

Так как в этих формулы входят координаты только 1^й точки, то движение 1^й точки может быть определено независимо от движений других. При этом мы видим, что 1^я точка будет двигаться под действием притягивающей массы M , помещенной в начало координат и притягивающей прямо пропорционально произведению массы и расстояния от начала.

Так как мы имеем силу центропритяжения, то траектория будет плоской. Принимая, что плоскость плоскость Oxy за плоскость траектории каждаго, то $z=0$ и соответствующее уравнение обратится в тождество и остается, интерпретировать только два 1^{ых} уравнения: —

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k l l x \dots (2)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -k l l y \dots (3)$$

Это суть линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами без постоянного

лика, которые могут быть интегрированы по известным правилам.

Для большей простоты напишем прямо эти интегралы и повторим только их справедливость.

$$\begin{aligned} x &= A \cos(\sqrt{kM} \cdot t + c) \\ y &= B \sin(\sqrt{kM} \cdot t + c) \end{aligned} \quad \Big| \quad \text{В}$$

Справедливость этих интегралов будет из того, что:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -A k M \cos(\sqrt{kM} \cdot t + c)$$

Подставим величину x и ее вторую производную в формулу (3) найдем тождество. Также увидим, что и x^2 интеграл удовлетворяет формуле (4); эти интегралы содержат не A , а только 3 произвольных постоянных, это происходит от известной выбора направления осей x, y относительно траектории. Если написать найденные интегралы в форме:

$$\frac{x}{A} = \cos(\sqrt{kM} \cdot t + c)$$

$$\frac{y}{B} = \sin(\sqrt{kM} \cdot t + c)$$

возведем в квадраты и сложим, имеем:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

Таким образом оказывается, что точка описывает эллипс, центр которого есть 0.

Заметьте, что ур-ие: —

Аналитическая механика

Лекция 32^{II}

$$m x + m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_{n-1} x_{n-1} = 0$$

$$m y + m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_{n-1} y_{n-1} = 0$$

$$m z + m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_{n-1} z_{n-1} = 0$$

показываются также, что центр тяжести системы лежит в начале координат, так как: —

$$\bar{x} = \frac{\sum m x}{M} = 0$$

$$\bar{y} = 0 \text{ и } \bar{z} = 0$$

Получаем такой результат также изъясняющийся: все материальные точки будут описывать эллипсы, центры которых будут лежать в общем центре тяжести системы.

Теорема о движении центра тяжести.

Центр тяжести свободной системы или вообще всякой системы, для которой возможны произвольные поступательные перемещения по направлению трех осей координат, движется, как материальная точка в которой сосредоточена вся масса системы и на которую действуют равнодействующие всех внешних сил, действующих на точки системы.

(Свободною системою называют такую, которая стянута только внутренними силами.

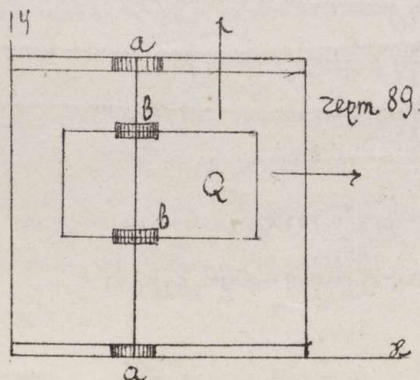
акими связями. Такой системой можно соединить какие угодно последовательные переходы по направлению осей координат; по крайности это бывают и несвободные системы, которыми все таки можно соединить какие угодно переходы по осевым координатам. Это бывает всекinds, как в случае системы входят только разности одностепенных координат точек системы. Например если условие имеет вид: —

$$f(x-x_1, x-x_2, \dots, y-y_1, y-y_2, \dots, z-z_1, z-z_2, \dots) = 0$$

Мы можем систему передвинуть по оси x постепенно на пространство δx ; тогда все координаты x получат приращение δx и будем иметь координаты: —

$$x + \delta x, x_1 + \delta x, \dots$$

Вставляя эти величины новых координат в данное условие, видим, что оно удовлетворяется, если удовлетворяется в каком-нибудь первоначальном состоянии, потому, что все δx сокращаются.



Железнодорожный пример такой системы мы можем представить на фиг. 89 (a, a, b, b суть длины).

Обращаемся к доказательству

отбу теорема о центре тяжести. На основании
какая Ф'Амандера, соединенная с теоремой
Лагранжа имеем: —

$$\Sigma \left\{ (x - m \frac{d^2 x}{dt^2}) \delta x + (y - m \frac{d^2 y}{dt^2}) \delta y + (z - m \frac{d^2 z}{dt^2}) \delta z \right\} = 0$$

Здесь $\delta x, \delta y, \delta z$ суть возможные перемещения из
покой системы, если систему оставим в
какой нибудь момент времени. Также как по
условию из системы возможны всякия попят-
ательныя движения, то можно положить: —

$$\delta x = \delta x_1 = \delta x_2 = \dots = \delta x$$

$$\delta y = \delta y_1 = \delta y_2 = \dots = \delta y$$

$$\delta z = \delta z_1 = \delta z_2 = \dots = \delta z$$

Получим: —

$$\Sigma \left\{ (x - m \frac{d^2 x}{dt^2}) \delta x + (y - m \frac{d^2 y}{dt^2}) \delta y + (z - m \frac{d^2 z}{dt^2}) \delta z \right\} = 0$$

Вынося из знака суммы $\delta x, \delta y, \delta z$, получим: —

$$\delta x \Sigma (x - m \frac{d^2 x}{dt^2}) + \delta y \Sigma (y - m \frac{d^2 y}{dt^2}) + \delta z \Sigma (z - m \frac{d^2 z}{dt^2}) = 0$$

Так как $\delta x, \delta y, \delta z$ совершенно произвольны, то не-
обходимо, чтобы сфакторизованты при них равнялись
нулю. Поэтому найдем: —

$$\Sigma (x - m \frac{d^2 x}{dt^2}) = 0$$

$$\Sigma (y - m \frac{d^2 y}{dt^2}) = 0$$

$$\Sigma (z - m \frac{d^2 z}{dt^2}) = 0$$

Откуда: —

$$\Sigma x = \Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \Sigma m x$$

но $\frac{\Sigma m x}{m} = \bar{x}$ (коорд. центр. тяж.)

Следовательно

$$\Sigma m\vec{x} = M\vec{x}$$

Максимь образую:—

$$\left. \begin{aligned} \Sigma X &= M \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} \\ \Sigma Y &= M \frac{d^2 \bar{y}}{dt^2} \\ \Sigma Z &= M \frac{d^2 \bar{z}}{dt^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots (1)$$

$\Sigma X, \Sigma Y, \Sigma Z$, суть не что иное, как проекции равнодействующей силы, которая получается, если все силы перенести в центр тяжести и сложить по правилу сложения векторов.

Формула (1) доказывает нашу раздматриваемую теорему.

Заметим, что во выражениях $\Sigma X, \Sigma Y, \Sigma Z$ не входят внутренние силы, а только внешние. Это происходит отъ того, что внутренние силы по закону действия равно противоположному равно и направлены въ противоположные стороны; поэтому, если одна внутренняя сила дает на ось X проекцию X_k , то другая, ей противоположенная дает проекцию $-X_k$, такъ что сумма ихъ будетъ:—

$$X_k + (-X_k) = 0$$

Если равнодействующая внешнихъ силъ $= 0$, то

$$\Sigma X = 0, \Sigma Y = 0, \Sigma Z = 0$$

У-изъ движения центра тяжести, будемъ:—

$$M \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = 0, M \frac{d^2 \bar{y}}{dt^2} = 0, M \frac{d^2 \bar{z}}{dt^2} = 0$$

Умножив на dt и интегрируем, получим: —

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = a, \quad \frac{d\bar{y}}{dt} = a', \quad \frac{d\bar{z}}{dt} = a''$$

Это показывает, что центр тяжести будет двигаться прямолинейно и равномерно, так как скорость его будет иметь постоянную величину. Если бы в начале времени центр тяжести был неподвижен, то имеем бы: —

$$a = a' = a'' = 0$$

поэтому ~~будем~~

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = 0, \quad \frac{d\bar{y}}{dt} = 0, \quad \frac{d\bar{z}}{dt} = 0$$

Умножая на dt и интегрируя, получим: —

$$\bar{x} = b, \quad \bar{y} = b', \quad \bar{z} = b''$$

т.е. координаты центра тяжести постоянны и он неподвижен; отсюда:

Принцип сохранения центра тяжести, который состоит в следующем: если система может иметь всякие поступательные движения и на нее действуют силы, равнодействующая которых равна нулю, то центр тяжести системы или остается неподвижным, или движется прямолинейно и равномерно.



Теорема площадей

Теорема площадей имеет место для систем, которые могут совершать всякие взаимные движения около осей, проходящих через какой-либо координат.

Такие свойства отброско обладают всякая система свободная; или обладает также всякая система, имеющая одну неподвижную точку, по отношению к какой координат.

Можно вообще сказать, что эти свойства обладает система, в условии которой входить взаимное разстояние точек и разстояние точек от какой-либо координат, т.е. когда условие имеет вид: —

$$f(\xi_{1,2}, \xi_{1,3}, \dots, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) = 0$$

где ξ с двумя знаками представляет разстояние точек, а ξ с одним знаком представляет разстояние точек от какой-либо координат.

Прежде, чем доказать теорему площадей, изложим теорему, из которой теорема площадей выводится. Вот эта предварительная теорема: — если будем рассматривать количество движений точек, как силы, сложив их, заменим одной силой, проходящей

через каково координаты и одной пары, то производная по времени проекции на нейкаго момента пары на ось координатъ равна моменту движущихся силъ относительно оси координатъ.

Для доказательства этой теоремы напишемъ равенство, вытекающее изъ теоремы Д'Аламбера

$$\Sigma \left\{ \left(x - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \delta x + \left(y - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \delta y + \left(z - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \delta z \right\} = 0$$

Такъ какъ система можетъ поворачивать всякое вращение около оси, проходящей черезъ каково координатъ, то можно предположить, что она повернется на $\delta\varphi$ около оси x , на $\delta\psi$ около оси y и на $\delta\theta$ около оси z . Тогда точки системы, какъ было показано при выводѣ ур-нъ равновѣсія, твердаго тѣла, получатъ перемещенія: —

$$\begin{aligned} \delta x &= \delta\psi \cdot z - \delta\theta \cdot y; & \delta x_1 &= \delta\psi z_1 - \delta\theta y_1; & \dots\dots\dots \\ \delta y &= \delta\theta x - \delta\varphi \cdot z; & \delta y_1 &= \delta\theta x_1 - \delta\varphi z_1; & \dots\dots\dots \\ \delta z &= \delta\varphi y - \delta\psi x; & \delta z_1 &= \delta\varphi y_1 - \delta\psi x_1; & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Подставляя эти перемещенія въ нашу основную формулу, получимъ: —

$$\Sigma \left\{ \left(x - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) (\delta\psi z - \delta\theta y) + \left(y - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) (\delta\theta x - \delta\varphi z) + \left(z - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) (\delta\varphi y - \delta\psi x) \right\} = 0$$

или: —

$$\begin{aligned} & \delta\varphi \Sigma \left\{ y \left(z - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) - z \left(y - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \right\} + \\ & + \delta\psi \Sigma \left\{ z \left(x - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) - x \left(z - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \right\} + \\ & + \delta\theta \Sigma \left\{ x \left(y - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) - y \left(x - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Так как перемещения $\delta x, \delta y, \delta z$ совершенно произвольны, то множителем при таких выражениях должны быть, вследствие чего будем иметь в U -is движение, которое называется так: —

$$\left. \begin{aligned} \Sigma(yZ - zY) &= \Sigma m \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \\ \Sigma(zX - xZ) &= \Sigma m \left(z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \\ \Sigma(xY - yX) &= \Sigma m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

Преобразуем U -is (2); замечая что: —

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) &= y \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \frac{dz}{dt} - z \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dz}{dt} \frac{dy}{dt} = \\ &= y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \end{aligned}$$

Отсюда следует, что: —

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \{ yZ - zY \} &= \frac{d}{dt} \Sigma m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) \\ \Sigma \{ zX - xZ \} &= \frac{d}{dt} \Sigma m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) \\ \Sigma \{ xY - yX \} &= \frac{d}{dt} \Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

U -is (3) доказываются разнотермическую теорему, потому что проекция количества движения, относящаяся по направлению скорости на ось координат, суть не что иное как $m \frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt} m$, $m \frac{dz}{dt}$; составив проекцию количества момента равнодействующей пары на ось X , найдем: —

$$\Sigma y \cdot m \frac{dz}{dt} - z m \frac{dy}{dt} = \Sigma m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right)$$

можно также и относительно других осей.

Таким образом линейный момент пары, полученный от движения количества движения, через y , по формулы (3) могут быть написаны еще так:

$$\Sigma (yZ - zY) = \frac{d}{dt} (np_z g)$$

$$\Sigma (zX - xZ) = \frac{d}{dt} (np_x g)$$

$$\Sigma (xY - yX) = \frac{d}{dt} (np_y g)$$

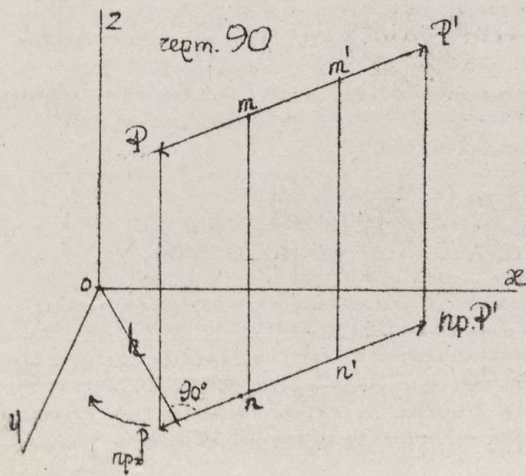
Обращаясь к предположению, что на точки системы действуют такие внешние силы, которые дают равнодействующую, проходящую через начало координат, тогда:

$$\Sigma (yZ - zY) = 0$$

$$\Sigma (zX - xZ) = 0$$

$$\Sigma (xY - yX) = 0$$

Что будет тогда, когда на тело действуют внешние силы, т. е. внешние силы моменты относительно осей координат не дают. Это происходит отсюда, что действующая причина. Возмем на рисунке 2 точки m и m' и предположим, что они отталкиваются друг от друга по направлению линии mm' силами P и P' . Эти силы будут рав-



ны и противоположны. Мы получим:

$$m_z(P) = h np.P$$

$$m_z(P') = h np.P'$$

$$m_z(P) + m_z(P') =$$

$$h(np.P - np.P') = 0$$

В этом случае предположение внешние

и то, что $\frac{d}{dt} \sum m (y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt}) = 0$

$$\frac{d}{dt} \sum m (y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt}) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \sum m (z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt}) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \sum m (x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}) = 0$$

Умножив уравнение $\frac{d}{dt} \sum m (y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt}) = 0$ на dt , получим:

$$\left. \begin{aligned} \sum m (y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt}) &= A \\ \sum m (z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt}) &= B \\ \sum m (x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}) &= C \end{aligned} \right\} \dots \dots (1)$$

Другие уравнения можно дать с помощью принципа действия, рассматривая эти движения как движение материальной точки. Разобьем ее на dw_x, dw_y, dw_z ...

проекции на плоскости ZY трехмерного пространства, описанные радиусами векторов. Эти проекции будут, как сказано в теореме, равны нулю, так как движение точки, равняется нулю:

$$\left. \begin{aligned} dw_x &= (y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt}) dt \\ dw_y &= (y' \frac{dz'}{dt} - z' \frac{dy'}{dt}) dt \end{aligned} \right\} \times 2$$

Суммируя, получим:

$$\sum m dw_x = A dt$$

$$\sum m dw_y = B dt$$

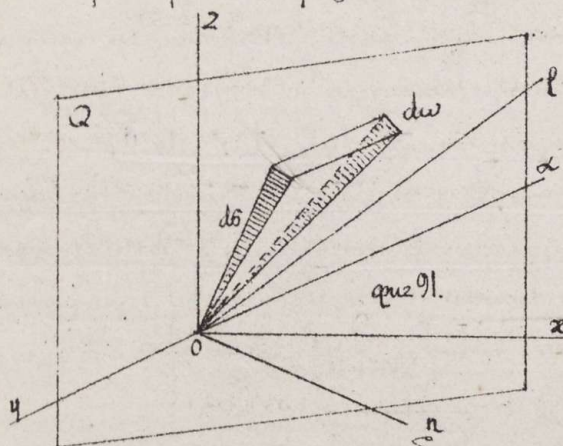
$$\sum m dw_z = C dt$$

Таким образом мы видим, что суммируя проекции, описанные про-

элементами радиусов векторов материальных точек на плоскости координат, указанных на массы точек, пропорциональным элементам времени dt , в которых они описаны.

Из этого состоит теорема площадей. Представим эту теорему в иной форме.

Проведем через начало координат некоторую



плоскость, перпендикулярную к прямой l и составившей сумму $\sum m d\sigma$, где $d\sigma$ есть элементарная площадь, описанная проекцией радиуса вектора dl точки системы

на эту плоскость. Если назовем $d\sigma$ площадью, описанную радиусом вектора в пространстве и обозначим через n прямую линию, перпендикулярную к площади $d\sigma$, то найдем: —

$$d\sigma = dl \cos(\angle l, n)$$

Это же касается $g \cos(\angle l, n)$, то его можно определить так:

$$\cos(\angle l, n) = \cos(\angle l, x) \cos(\angle n, x) + \cos(\angle l, y) \cos(\angle n, y) + \cos(\angle l, z) \cos(\angle n, z)$$

Подставим эту величину в нашу формулу

$$d\sigma = \cos(l, x) d\omega \cos(n, x) + \cos(l, y) d\omega \cos(n, y) + \cos(l, z) d\omega \cos(n, z)$$

$$d\omega \cos(n, x) = d\omega_x; d\omega \cos(n, y) = d\omega_y; d\omega \cos(n, z) = d\omega_z$$

Подставляем, получим: —

$$d\sigma = d\omega_x \cos(l, x) + d\omega_y \cos(l, y) + d\omega_z \cos(l, z)$$

Интегрируем: —

$$\Sigma m d\sigma = \cos(l, x) \Sigma m d\omega_x + \cos(l, y) \Sigma m d\omega_y + \cos(l, z) \Sigma m d\omega_z$$

Подставляем вместо бесконечных сумм известные величины A, B, C , получим: —

$$\Sigma m d\sigma = \left\{ \frac{A}{2} \cos(l, x) + \frac{B}{2} \cos(l, y) + \frac{C}{2} \cos(l, z) \right\} dt.$$

Максимум отрезков l и l' равен $\Sigma m d\sigma$ при произвольном направлении, происходящем из центра тяжести координат.

Рассмотрим, какова геометрическая форма поверхности Q , при этом, чтобы она была симметрична относительно осей координат, образуемых осями x, y, z : —

$$\Sigma m d\sigma = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dt \cdot \left\{ \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \cos(l, x) + \right. \\ \left. + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \cos(l, y) + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \cos(l, z) \right\}$$

Рассмотрим теперь направление минуса l , соответствующее случаю осей координат: —

$$\cos(l, x) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos(l, y) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos(l, z) = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

тогда: —

$$\Sigma m d\sigma = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dt \left\{ \cos(l, x) \cos(l, x) + \cos(l, y) \cos(l, y) + \right. \\ \left. + \cos(l, z) \cos(l, z) \right\} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dt \cos(l, l)$$

Получим, что она была бы равна нулю, если бы

этим меньшее значение (L, l) ; когда $\varphi = 0$, то $\cos(L, l) = 1$ и мы получим: —

$$\Sigma m d\phi = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dt.$$

Максимальное значение $\Sigma m d\phi$ получается тогда, когда плоскость Q перпендикулярна к самой линии L , т.е. когда ее нормаль образует угол, $\cos$ -ту которого суть: —

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Поскольку эти углы зависят только от постоянных, то получаем такую теорему: плоскость, для которой $\Sigma m d\phi$ имеет наибольшее значение, есть неизменяющаяся плоскость во все время движения. Эта плоскость была указана Лагранжем.

Если бы мы обратились к рассмотрению линейного момента g равнодействующей пары, полученной от системы движений, то могли бы представить интегралы площадей (1) в таком простом виде: —

$$pr_x g = A; \quad pr_y g = B; \quad pr_z g = C$$

Эти формулы показывают, что линейный момент g во все время движения остается неизменным и по величине и по направлению. Мы можем теорему площадей выразить в форме, предложенной Пуансо.

Эта система может свободно вращаться около начала координат и на нее не действует никаких моментов внешних сил относительно осей координат, то все время движения линейный момент $\mathcal{G}$ равнодействующей пары, полученной от сложения моментов движения, остается неизменным по величине и направлению.

Не трудно заметить, что неизменяемая плоскость Лагранжа есть не что иное, как плоскость вышеупомянутой равнодействующей пары моментов движения.

Действительно, так как линейный момент $\mathcal{G}$ перпендикулярен к плоскости пары, то линия к плоскости пары образует угол, cos-ty которого суть: —

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

а это суть те углы, которые образует нормаль неизменяемой плоскости Лагранжа.

Что касается величины $\mathcal{G}$, то: —

$$\mathcal{G} = \sqrt{A^2+B^2+C^2}$$

Докажем это для неизменяемой плоскости

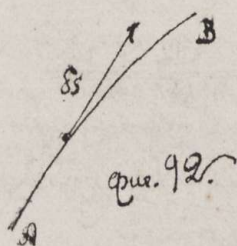
$$\sum m d\sigma = \mathcal{G} dt.$$

Теорема живых сил

Теорема усильных сил имеет место тогда, когда во условии системы не входит время и когда силы имеют силовую функцию.

Необходимость того, что условие системы не зависит от времени, является следствием того положения, на котором основано доказательство теоремы усильных сил. Это положение заключается в следующем: возможные перемещения действительным. Если во условии системы не входит время, то очевидно, что из действительных перемещений есть один из возможных.

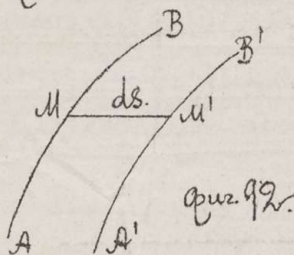
Пусть какая-нибудь точка системы движется относительно поверхности AB во все время своего движения. Оста-



новить точку в какой-нибудь момент, мы видим, что это не является возможным перемещением, а является всего перемещением на поверхности AB . Покажем, что один из таких перемещений будет и то действительное перемещение ds , которое получает точка во время движения. Если же точка

движется на поверхности AB . Покажем, что один из таких перемещений будет и то действительное перемещение ds , которое получает точка во время движения. Если же точка

глубины по поверхности AB , которая сама гбу-
 уется в пространстве так, что в время dt пе-
 реходит из положения AB в $A'B'$. Гидростатическое
 переизмерение точки в пространстве будет то,



которое равно $M'M = ds$. Если
 считать точку в ds по-
 лостью M , а поверхность в ds
 полностью AB , то гбуение,
 что это гидростатическое пере-

измерение ds не есть возможное при установив-
 шей поверхности, так как при этом точка
 выходит из поверхности AB . Таким образом
 таким гидростатическое переизмерение точки
 ограничено из возможных измерений только тогда,
 когда в приращении элемента не выходит время. От-
 сюда это предположение в нашей теории
 О'Анандерар -

$$\Sigma \left\{ \left(x - m \frac{dx}{dt^2} \right) \delta x + \left(y - m \frac{dy}{dt^2} \right) \delta y + \left(z - m \frac{dz}{dt^2} \right) \delta z \right\} = 0$$

или: -

$$\Sigma (X dx + Y dy + Z dz) = \Sigma m \frac{dx^2 dx + dy^2 dy + dz^2 dz}{dt^2}$$

так как: -

$$\frac{dx^2 dx + dy^2 dy + dz^2 dz}{dt^2} = \frac{dv^2}{2},$$

а

$$\Sigma (X dx + Y dy + Z dz) = du,$$

згто u есть кинетическая энергия, то находим: -

$$du = d \Sigma \frac{mv^2}{2}$$

Гидростатическая механика

лучше $\Sigma \frac{1}{2} m v^2$

Отсюда, интегрируя, получаем: —

$$\sum \frac{mv^2}{2} = u + H$$

Это и есть интеграл живых сил, который дает теорему: если условия системы не зависят от времени и существуют функции, то приращение живых сил равно силовой функции + постоянное количество.

Мы знаем, что

$$\sum \frac{mv^2}{2} = u + H,$$

где u — силовая функция, а H — постоянное. Если вместо функции u введем некоторую функцию w , полагаем, что: —

$$u = -w$$

тогда наш интеграл может быть написан так: —

$$\sum \frac{mv^2}{2} + w = H.$$

w называется потенциальной энергией, а $\sum \frac{mv^2}{2}$ называется кинетической энергией. Формула показывает, что сумма потенциальной и кинетической энергии есть величина постоянная. Если кинетическая энергия увеличивается, то потенциальная уменьшается и наоборот.

Возьмем пример.

Положим что имеем систему материаль-

ных точек, находящихся под действием сил тяжести, тогда для каждой точки имеем: —

$$X=0, Y=0, Z=-mg.$$

полагая, что ось Z направлена по вертикальной линии, вверх. Основным из потенциальной энергии; мы имеем: —

$$dU = \Sigma (Xdx + Ydy + Zdz) = \Sigma -mgdz.$$

Интегрируем, будем иметь: —

$$U = \Sigma -mgz + C$$

Для простоты полагая, $C=0$, так как постоянное не имеет значения в силовой функции, получим

$$U = -g \Sigma mz$$

Известно, что

$$\bar{Z} = \frac{\Sigma mz}{M}, \text{ откуда } \Sigma mz = M\bar{Z},$$

откуда

$$U = -\bar{Z} Mg$$

поэтому

$$W = \bar{Z} \cdot Mg$$

Mg есть вес всей системы, назовем его силой P , так что $Mg = P$, будем иметь: —

$$W = P \cdot \bar{Z}$$

Таким образом найдем, что —

$$\Sigma \frac{mv^2}{2} + P\bar{Z} = H.$$

Отсюда заключаем, что когда центр тяжести опускается, кинетическая энергия системы увеличивается.

живается и наоборот. Положив найденной формулой, можно доказать следующую теорему об устойчивости: если центр тяжести тела занимает самое низкое место, то тело будет иметь устойчивое положение равновесия после действия тяжести.

Докажем предварительно, что при равновесии системы после действия тяжести, центр тяжести занимает непременно самое высшее или самое низкое место.

Условие равновесия, по теореме Лагранжа, требует, чтобы:

$$\Sigma (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$$

В нашем случае это приведет к ур-ию:

$$\Sigma -gm\delta z = 0 \text{ или } \Sigma m\delta z = 0, \delta \Sigma mz = 0$$

Положим как

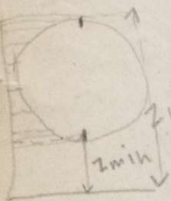
$$\Sigma mz = M\bar{z},$$

то

$$\delta \bar{z} = 0$$

Максимум образом система должна занимать такое место, чтобы при безконечно малом перемещении приращение координаты $\bar{z}$ центра тяжести равнялось нулю. Это как известно соответствует максимуму или минимуму выражения $\bar{z}$.

Предполагая, что $\bar{z}$ имеет в положении рав-



новое наименьшее значение $\bar{z} = \bar{z}_0$. Введем систему из положений равновесия посредством малой толчки. В продолжении всего времени движения будет иметь место формула: —

$$\sum \frac{mv^2}{2} + P\bar{z} = H.$$

Взвешивая моменты

$$\bar{z} = \bar{z}_0 \text{ и } \sum \frac{mv^2}{2} = \sum \frac{mv_0^2}{2},$$

представим, найдём: —

$$\sum \frac{mv^2}{2} + P\bar{z}_0 = H$$

Отсюда, вычитая, находим

$$\sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2} + P(\bar{z} - \bar{z}_0) = 0$$

Это можно представить так: —

$$\sum \frac{mv^2}{2} = \sum \frac{mv_0^2}{2} - P(\bar{z} - \bar{z}_0)$$

1^я часть этой формулы очевидно положительна,

1^я часть 2^я часть некоторая положительная величина малая величина. Отсюда заключаем, что второй член 2^я часть не может по абсолютной величине достигать больше 1^ю, т.е.

$$P(\bar{z} - \bar{z}_0) < \sum \frac{mv_0^2}{2}$$

Это доказывает, что $\bar{z}$ никогда значительно не удаляется от $\bar{z}_0$.

О моментах инерции.

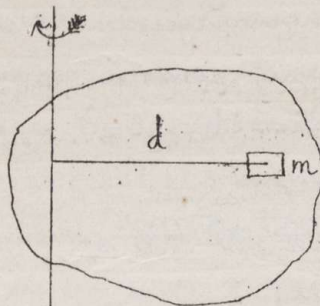
Моменты инерции называются выражением вида: —

$$K = \sum m d^2$$

Отношение момента инерции к массе тела называется радиусом инерции

$$\frac{K}{M} = \rho^2 \dots \rho = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

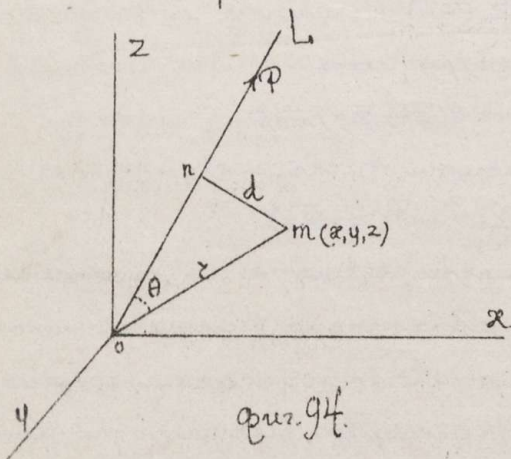
фиг. 93.



Формула

$$K = M \rho^2$$

показывается, что радиус инерции есть расстояние такой точки, сосредоточивая в которой массу тела, получим ту же сумму моментов инерции, как и для всего тела. Вообразим, что тело от-



фиг. 94.

неско к прямоугольным осям координат x, y, z и нужно определить момент инерции этого тела относительно оси OL, образующей с осями углы α, β, γ . Этот момент будет:

$$K = \sum m d^2 \dots (1)$$

но

$$\begin{aligned} d^2 &= r^2 - n^2 = x^2 + y^2 + z^2 - z^2 \cos^2 \theta = \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - z^2 (\cos \alpha \frac{x}{z} + \cos \beta \frac{y}{z} + \cos \gamma \frac{z}{z})^2 = \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - (\cos \alpha \cdot x + \cos \beta \cdot y + \cos \gamma \cdot z)^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (x^2 + y^2 + z^2)(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) - \\
 &\quad - (\cos \alpha \cdot x + \cos \beta \cdot y + \cos \gamma \cdot z)^2 = \\
 &= \cos^2 \alpha (y^2 + z^2) + \cos^2 \beta (x^2 + z^2) + \cos^2 \gamma (x^2 + y^2) - 2yz \cos \alpha \cos \beta - \\
 &\quad - 2zx \cos \alpha \cos \gamma - 2xy \cos \alpha \cos \beta.
 \end{aligned}$$

Представим в формулу (1), получим: -

$$\begin{aligned}
 K &= \cos^2 \alpha \sum m (y^2 + z^2) + \cos^2 \beta \sum m (x^2 + z^2) + \cos^2 \gamma \sum m (x^2 + y^2) - \\
 &\quad - 2 \cos \alpha \cos \beta \sum m yz - 2 \cos \alpha \cos \gamma \sum m zx - 2 \cos \alpha \cos \beta \sum m xy
 \end{aligned}$$

Из сравнения получим, что

$$\left. \begin{aligned}
 A &= \sum m (y^2 + z^2) \\
 B &= \sum m (z^2 + x^2) \\
 C &= \sum m (x^2 + y^2)
 \end{aligned} \right\} \dots \dots (2)$$

$$D = \sum m yz; E = \sum m zx; F = \sum m xy;$$

Из помощи этих равенств представим момент инерции так: -

$$\begin{aligned}
 K &= A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma - 2D \cos \alpha \cos \beta - \\
 &\quad - 2E \cos \alpha \cos \gamma - 2F \cos \alpha \cos \beta \dots \dots (3)
 \end{aligned}$$

Формула (3) позволяет определить момент инерции для всякого направления оси Oz, когда известны в постоянных A, B, C, D, E, F. Легко доказать, что постоянные A, B, C выражаются как моменты инерции относительно осей x, y, z. В самом деле если направить ось Oz по оси Ox. Тогда $\cos \alpha = 1, \cos \beta = 0, \cos \gamma = 0$; тогда формула (3) дает $K = A$, значит это есть момент инерции относительно оси Ox. Ebenso так

уже доказано, что $K=B$, когда ось Ol направлена по Oy и $K=C$, когда Ol направлена по Oz

Теорема. Если через какую-нибудь точку O будем проводить во разных направлениях оси Ol и откладывать на них от точки O длины:

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{K}} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$$

то место всех точек P будет представлять трехосный эллипсоид, имеющий центром точку O .

Доказательство. Назовем координаты точки P , полученной указанным способом через x, y, z . Эти координаты будут: —

$$x = \rho \cos \alpha; \quad y = \rho \cos \beta; \quad z = \rho \cos \gamma$$

$$\text{или} \quad x = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{K}}; \quad y = \frac{\cos \beta}{\sqrt{K}}; \quad z = \frac{\cos \gamma}{\sqrt{K}}$$

Разделив формулу (3) на K и представим ее в виде: —

$$1 = A \left(\frac{\cos \alpha}{\sqrt{K}} \right)^2 + B \left(\frac{\cos \beta}{\sqrt{K}} \right)^2 + C \left(\frac{\cos \gamma}{\sqrt{K}} \right)^2 - 2D \frac{\cos \beta \cos \gamma}{\sqrt{K} \sqrt{K}} - 2E \frac{\cos \beta \cos \alpha}{\sqrt{K} \sqrt{K}} - 2F \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sqrt{K} \sqrt{K}}$$

Согласно формуле (4)

$$1 = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz - 2Exz - 2Fxy \dots (5)$$

Это есть ур-ие некоторой поверхности 2^{го} порядка, имеющей центр в начале координат, ибо в ур-ии нет никаких сдвигов с центром тяжести в 1^ю степень. Поэтому вообще говоря мы можем предпо-

показать, что найденная поверхность есть эллипсоид или гиперболюид. Но не трудно убедиться не прибегая к способам, изложенным в Аналитической геометрии, что ур-ие (5) не может представлять гиперболюид. Действительно, мы откладываем:

$$OP = \frac{1}{\sqrt{K}}$$

так как K никогда не может быть $= 0$ (мы рассматриваем не точку, а не точку), то никогда не может быть $OP = 0$, а это было бы, если бы поверхность была гиперболюид. Таким образом наша поверхность есть эллипсоид и теорема доказана. Этот эллипсоид называется эллипсоидом инерции относительно точки O .

Если точка O есть центр тяжести тела, то эллипсоид называется центральным эллипсоидом инерции.

Так как центральный радиус вектора R никогда инерции получается, откладывая $R = \frac{1}{\sqrt{K}}$, то $K = \frac{1}{R^2}$. Значит, большие R темные меньшие K . Извещено, что эллипсоид инерции имеет два радиуса вектора, из которых один наибольший, а другой наименьший. Если предположим, что полуоси эллипсоида суть $a > b > c$, то наибольший радиус вектора есть a , а наименьший c . Так как наименьший момент инерции есть $K = \frac{1}{a^2}$,

а канонический $K = \frac{1}{a^2}$. Направляя оси координат x, y, z по главным осям эллипсоида инерции, найдем, что в у-е эллипсоида не войдут члены, содержащие произведение координат. Это у-е будет: --

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

также что в этом случае

$$D = E = F = 0$$

Отсюда теорема: -- если оси координат направлены по главным осям эллипсоида инерции, то

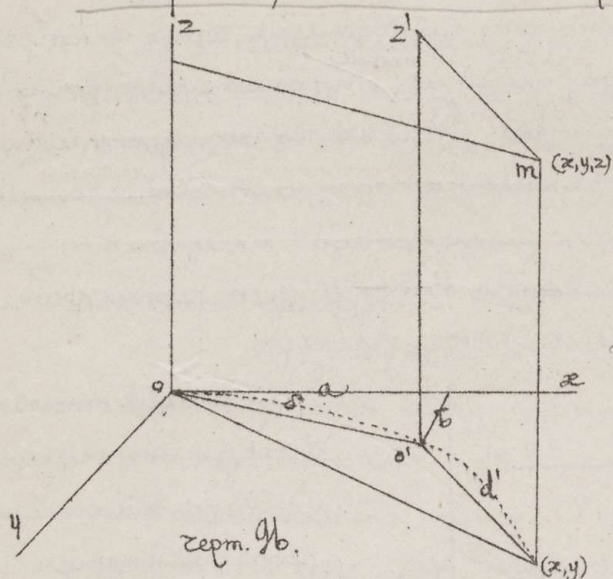
$$\sum m y z = 0; \sum m z x = 0; \sum m x y = 0$$

Когда известен центральный эллипсоид инерции, то с помощью его можно определить моменты инерции относительно всякой оси, проходящей через центр массе.

Покажем, что при этом будет известно и моменты инерции относительно всякой другой оси. Это следует из теоремы: --

Моменты инерции относительно какойнибудь оси, равны моменту инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр массе + масса тела, умноженная на квадрат расстояния между осями.

Положим, что какою координатах



во векторе тупее и ось Z параллельна той оси, относительно которой криво взято измерение инерции,

Положим, что ось относительно которой криво взято измерение инерции ось OZ, при севе координат

точки O' севе a и b . Пусть искомым моментом инерции будет C' и момент инерции относительно оси OZ будет C . Мы имеем: —

$$C' = \sum m d'^2 = \sum m \{ (x-a)^2 + (y-b)^2 \} = \\ = \sum m (x^2 + y^2) + \sum m (a^2 + b^2) - 2a \sum m x - 2b \sum m y$$

Так как: —

$$\bar{x} = \frac{\sum m x}{M} = 0 \text{ и } \bar{y} = \frac{\sum m y}{M} = 0,$$

$$\text{то } 2a \sum m x = 0 \text{ и } 2b \sum m y = 0$$

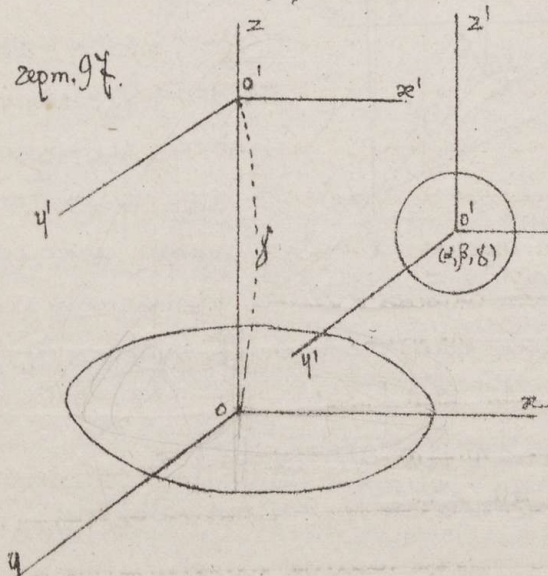
С другой стороны $a^2 + b^2 = \delta^2$, а $\sum m = M$, так что это получим: —

$$C' = C + M \delta^2$$

Это и требовалось доказать.

Это равенство показывает, что момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести, всегда меньше относительно другой оси, ей параллельной. Так это наименьший из всех моментов инерции относительно любой центральной оси симметрии инерции.

Задача. Отсчитать точку, для которой момент инерции есть шар.



Отсечем точку главных осей центрального инерции.

Положим, что каждая точка есть O' , координаты которой суть α, β, γ .

Так как же шар всякая система прямоуголь-

ных осей координат направлена по главным осям, то мы должны иметь для каждой оси x', y', z' —

$$\sum m y' z' = 0, \sum m z' x' = 0, \sum m x' y' = 0$$

Подставим сюда —

$$x' = x - \alpha; \quad y' = y - \beta; \quad z' = z - \gamma,$$

выпишем: —

$\Sigma mxy - \beta \Sigma my - \beta \Sigma mz + \beta \beta \Sigma m = 0$
 $\beta^2 \Sigma m = 0$, т. к. оси x, y, z суть главные инерции,
 $\beta^2 \Sigma m = 0$, ибо центр тяжести не
 лежит в точке O . Укажем остальное

$$\beta \beta = 0$$

также докажем, что

$$\alpha \beta = 0, \alpha \beta = 0$$

Эти 3 условия могут быть удовлетворены толь-
 ко тогда, когда 2 из 3-х координат равны 0.

Следовательно точка O' по произвольности ин-
 терпретации на одну из трех осей центрального инер-
 ции. Рассмотрим предположение, что она ле-
 жит на оси z . Тогда $\alpha = 0$ и $\beta = 0$.

Развернем сферу A, B, C относительно инерции отко-
 сительно осей $O'x', O'y'$ и $O'z'$

Мы имеем $C' = C$, дающее по вышеприведен-
 ной теореме $A' = A + Mz^2$. Можно также $B' =$
 $B + Mz^2$. Так как наша эллипсоид инерции
 в точке O' есть шар, то $A' = B' = C'$, отсюда: —

$$A + Mz^2 = B + Mz^2 = C$$

Эти 2 ур-ия могут быть удовлетворены только
 тогда, когда $A = B$. Если это условие имеет,
 то для величины β найдем

$$\beta = \pm \sqrt{\frac{C-A}{M}}$$

Эта величина будет действительной только тогда, когда $C > A$. Такие образы могут быть только тогда, когда центральный эллипсоид есть эллипсоид вращения около ² ~~большой~~ ^{своей} оси (растянутой эллипсоид). Тогда будут существовать 2 точки на ос. вращения, симметрично расположенные относительно центра тяжести, в которых эллипсоид инерции есть шар. В случае $A = C$ или $\xi = 0$, т.е. когда центральный эллипсоид инерции есть шар, то тогда только один этот шарообразный эллипсоид инерции и существует.

Вращение твердого тела около неподвижной оси.

Положим, что некоторое твердое тело может вращаться около ос. Z . Тогда на основании теоремы Д'Аламбера, прилагая ко этому телу силы его движущих и сил инерции, мы должны во всякий момент получить равновесие тела относительно рассматриваемой неподвижной ос.

Так как условие равновесия при неподвижной

оси считаемъ $\bar{x}$ такое, что сумма моментов

относительно этой

оси есть нуль, т.е. при-
уток имеет уравне-
няющего вида: —

$$\Sigma (xY - yX) + \Sigma \left\{ x \left(-m \frac{dy}{dt} \right) - y \left(-m \frac{dx}{dt} \right) \right\} = 0$$

или

$$\Sigma (xY - yX) = \Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right)$$

Здесь Σ — значит, какъ

было показано въ теоремѣ площадей можетъ
быть написана такъ: —

$$\Sigma (xY - yX) = \frac{d}{dt} \Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right)$$

Такъ какъ вращение каменъ тогда совершается
о относительно оси Z , то въ формулахъ Дюпера,
выражающихъ проекции скорости вращательна-
го движения надо положить: —

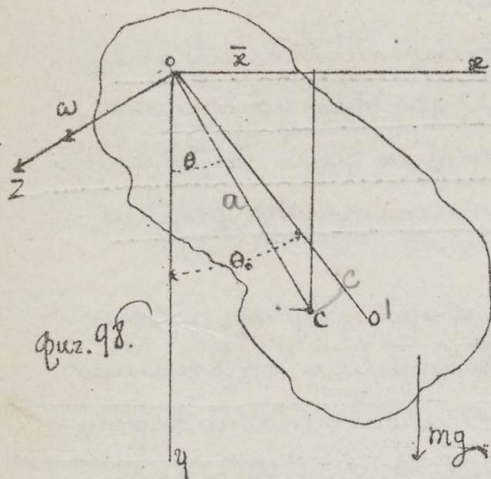
$$p=0, q=0, \text{ и } z=\omega$$

Поэтому изъ формулъ Дюпера найдемъ: —

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= qz - zy = -\omega y \\ \frac{dy}{dt} &= zx - pz = \omega x \\ \frac{dz}{dt} &= pz - qx = 0 \end{aligned}$$

Подставляя получимъ: —

$$\Sigma (xY - yX) = \frac{d}{dt} \Sigma m [x^2 \omega + y^2 \omega] = \frac{d}{dt} [\omega \Sigma m (x^2 + y^2)] = \frac{d}{dt} (\omega C)$$



откуда: —

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma(xY - yZ)}{c}$$

Наконец образуем при вращательном движении около перпендикулярной оси угловое ускорение — сумму моментов движущихся сил, разделенной на мом. инерции соответствующего разнотриваемой оси.

Применим каноническую формулу к теории физического маятника. Положим, что наша ось Z горизонтальна, ось Y — направлена по вертикальной линии вниз, а тело находится под действием силы тяжести. Тогда $X=0$, $Y=mgx$

$$\Sigma(xY - yZ) = +g \Sigma mx = Mg\bar{x}, \text{ где}$$

$\bar{x}$ есть координата центра тяжести. Предположим, что просто, что центр тяжести лежит в плоскости XY, каноническое уравнение —

$$\bar{x} = a \sin \theta.$$

так что: — $\Sigma(xY - yZ) = Mga \sin \theta.$

Подставим в нашу формулу: —

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{Mga}{c} \cdot \sin \theta$$

Замечаем, что: —

$$\omega = \frac{d}{dt} (90^\circ - \theta) = - \frac{d\theta}{dt}$$

откуда: —

$$dt = - \frac{d\theta}{\omega}$$

Подставим, получим: —

$$\frac{\omega d\omega}{d\theta} = - \frac{Mga}{c} \sin\theta$$

Умножаем на $2d\theta$ и интегрируем, находим: -

$$\omega^2 = + \frac{2Mga}{c} \cos\theta + \text{const.}$$

где, определяя const. замечаем, что при $\theta = \theta_0$

$\omega = 0$, получим: -

$$0 = + \frac{2Mga}{c} \cdot 2(\cos\theta_0 - \cos\theta) = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

Отсюда

$$dt = + \sqrt{\frac{c}{Mga}} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta_0 - \cos\theta)}}$$

Это есть та самая формула, которую мы
имели в математическом маятнике, различая
в том, что вместо l стоит: -

$$l = \frac{c}{Ma}$$

Итак физический маятник колеблется как математический, длина которого = моменту инерции, разделенному на произведение массы на расстояние от центра тяжести до точки подвеса.

Назовем здесь C_0 момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести маятника и параллельной оси pivots. Будем иметь: -

$$C = C_0 + Ma^2$$

Подставим, находим: -

$$l = \frac{C_0 + Ma^2}{Ma} = \frac{C_0}{Ma} + a$$

Академическая механика

Лист № 36

$$l-a = \frac{Q}{Ma}$$

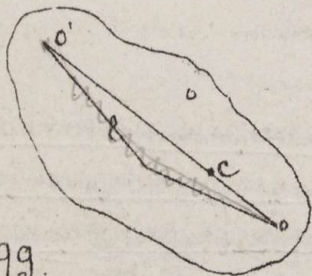
Пакъ какъ $l-a$ оказываетъ величину положи-
тельной, то функция $l>a$.

Если отъогнать функцию l , то получимъ неко-
торую точку O' , которая называется центромъ
качанія. Эта точка ниско центра тяжести.

$$a(l-a) = \frac{Q}{M} = \frac{Mg \cdot z}{M}$$

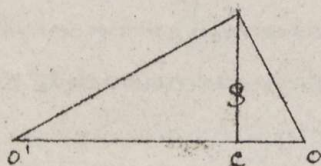
$$a(l-a) = g \cdot z; \text{ ос. ос. } = g \cdot z.$$

Пакимъ образомъ: произведение разстояній
точки привеса и цен-
тра качанія отъ цен-
тра тяжести рав-
но квадрату радиуса
инерціи относителъ-
но центра тяжести.

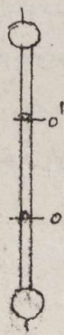


черт. 99.

Это позволяет весьма просто отроить центръ
качанія по точке привеса.



черт. 100.



Если принять точку O' за
точку привеса, то тогда
уже примемъ каждаго,
это центръ качанія бу-
детъ O . Пакимъ образомъ
эти точки суть взаимъ-

ными и функция малости не измѣняется, если.

точку привеса перенести въ центр касанія.
На этой теоремѣ Гюйгенса основана лемма
Катора.

О движении твердаго тѣла около неподвижной точки.

Когда твердое тѣло имѣетъ неподвижную точку,
то принявъ эту точку за начало координатъ, мо-
жемъ поворачивать нашу систему вѣтвей около
какого координатъ, а при этомъ имѣетъ мѣсто
теорема площадей, которую можно формулиро-
вать слѣдующимъ образомъ:—

Проекціи на оси координатъ мимен-
наго момента/равнодействующей пары,
полученной отъ перенесенія вѣтвей силъ въ
начало координатъ, равны произвольнымъ
по времени отъ проекцій на эти оси ми-
неннаго момента пары, полученной отъ
слученія вѣтвей количества движенія и отъ
защоны ихъ одной силой, проходящей
середъ начала координатъ и одной пары.

Рассмотримъ эту равно проекціи по осямъ
координатъ мименнаго момента пары, количе-
ства движенія тѣла, вращающагося около непод-

Единичный момент пары называем срезь $\mathcal{G}$, то 1^я часть нашего равенства представляется проекцией на ось X единичного момента $\mathcal{G}$ и нашим образом, это: —

$$\left. \begin{aligned} \text{Пр}_x \mathcal{G} &= A p \\ \text{Пр}_y \mathcal{G} &= B q \\ \text{Пр}_z \mathcal{G} &= C r \end{aligned} \right\} \dots\dots (1) \quad (\text{в данном смысле})$$

Проекты будут проекции единичного момента пары, поперечная ось системы координат движения, на ось эллипсоида инерции. Из наших неподвижных осей X, Y, Z такие значения будут иметь проекции $\mathcal{G}$ только в том моменте, когда главные оси эллипсоида совпадают с нашими неподвижными осями. По свойству этого момента главные оси эллипсоида отойдут от неподвижных осей и проекции $\mathcal{G}$ не будут выражаться формулами (1).

Назовем срезь L, M, N проекции на оси эллипсоида инерции единичного момента пары поперечной оси системы движущихся масс. В разнотриваемый момент времени t эти величины L, M, N будут представлять такую проекцию единичного момента ^{данн. сис.} вытекующей пары на неподвижные оси. Вообразим некоторые оси X', Y', Z' подвижные, которые, имея точку начала

О в неподвижной точке центра направлены по осям симметриа и сфериче; во разсматриваемый момент эти посылки ось совпадают с неподвижными. Если будем казать через p, q и z' проекции угловой скорости на ось x', y', z' , то во все время движения будем иметь:—

$$np_x \Theta = Ap,$$

$$np_y \Theta = Bq,$$

$$np_z \Theta = Cz.$$

Поизводя вышесказанной теоремой о сохранении движения, можно казать что разсматриваемое во времени t вращение ур-ия:—

$$\frac{d}{dt}(np_x \Theta) = L; \frac{d}{dt}(np_y \Theta) = M; \frac{d}{dt}(np_z \Theta) = N \dots (2)$$

Значит пость закона производной келье писано:—

$$np_x \Theta = Ap,$$

потому что проекция на неподвижную ось x момента Θ не остается во все время равной Ap , а поизражает иную величину по произведению разсматриваемого момента.

Тогда определим каковы будут величины производные во 1^е частях келье ур-ий, обратив внимание на вращение обетательство:—

Разсмотрим точку P , лежащую на концы вектора Θ . Эта точка будет иметь относительно неподвижных осей такие координаты:—

$$\text{пр}_z G, \text{пр}_y G, \text{пр}_x G.$$

а относительно подвижных осей координат эта точка будет иметь координаты: —

$$A_p, B_q \text{ и } C_z$$

1^{ая} часть наших формул (2) представляют та-
кие соотношения между ними, как проекции на оси
 x, y, z , абсолютной скорости точки P , так как
это суть производные по времени координат
этой точки относительно неподвижных осей.

Вспользуемся теперь теоремой сложения ско-
ростей: скорость абсолютного движения
слагается геометрически из скорости
относительного движения и скорости
вращения.

Проекция по осям x, y, z или, все равно, по осям
 x', y', z' , которых ось z совпадает в моменте
 t , скорости относительного движения точки P ,
будут: —

$$\frac{d(A_p)}{dt}, \frac{d(B_q)}{dt}, \frac{d(C_z)}{dt}$$

Нужно еще определить скорость вращения точки
 P . Эта скорость найдется по формуле Дюпюа, т. е. ось
 x', y', z' вращаются с угловой скоростью ω . Мы при-
дем к этому в формуле Дюпюа, введя вместо
 $x = A_p$, вместо $y = B_q$ и вместо $z = C_z$. Получим
следующую скорость вращения.

$$qCz - rBq = zq(C - B)$$

$$zAp - pCz = pz(A - C)$$

$$pBq - qAp = pq(B - A)$$

Наконец образуя наложив, это: —

$$\frac{d}{dt}(np_x G) = \frac{d(Ap)}{dt} + zq(C - B)$$

$$\frac{d}{dt}(np_y G) = \frac{d(Bq)}{dt} + pz(A - C)$$

$$\frac{d}{dt}(np_z G) = \frac{d(Cz)}{dt} + pq(B - A)$$

Подставляя это в форму. (2), найдем окончательно: —

$$L = A \frac{dp}{dt} + zq(C - B)$$

$$M = B \frac{dq}{dt} + pz(A - C)$$

$$N = C \frac{dz}{dt} + pq(B - A)$$

Эти формулы были выведены из того момента t , в котором неподвижные оси X, Y, Z совпадают с подвижными X', Y', Z' , то е. в нуль входят только величины от подвижных осей, поэтому в любой момент времени, т. е. в любой момент времени можно предположить, что неподвижные оси совпадают с подвижными.

Найденные формулы называются динамическими формулами Дйлера.



Движение твердого тела около неподвижной точки без действия внешних сил.

Если сначала внешние силы не действуют, то проеции силовых моментов пары на оси координат суть нули, так что $L=0, M=0, N=0$. Тогда ур-е Эйлера примет вид: —

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C-B)qz &= 0 \\ B \frac{dq}{dt} + (A-C)rp &= 0 \\ C \frac{dz}{dt} + (B-A)pq &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

Прежде, чем приступить к интегрированию этих ур-ий, рассмотрим 2 частных вида движений.

Положим что $q=0$ и $z=0$ во все время движения. Тогда предположения 2^е и 3^е ур-ий обращаются в тождество, 1^е ур-ие дает: —

$$\frac{dp}{dt} = 0 \text{ или } p = \text{const.}$$

Таким образом мы удовлетворили ур-иям движения, предполагая, что тело вращается равномерно около 1^й из своих осей инерции. Если сообщим телу толчок, так чтобы мгновенная ось вращения направилась по оси инерции то тело будет во все время вращаться около этой оси с постоянной угловой скоростью. Если предположим,

это каково координаты взято в центре тяжести, который может быть рассматриваемый как неподвижная точка в пространстве, если тело не имеет никакой движения (на основании закона сохранения энергии центра тяжести), то придем к заключению, что создавая поворачивающий в пространстве телу некоторое вращение около оси центрального или центрального инерции, мы получим постоянное вращение около той же оси с той же угловой скоростью, как будто эта ось была кинематически закреплена. Поэтому все центрального эллипсоиды инерции называются свободными осевыми вращениями.

Как и во втором частном случае, установим — с на предположении, что $C=B$. Тогда из уравнения независимости от $q, z, \dots$

$$\frac{dp}{dt} = 0 \text{ или } p = \text{const.}$$

Таким образом, если эллипсоид инерции тела есть эллипсоид вращения около оси D , то создавая или ему какое-нибудь вращательное движение около оси D , мы найдем, что проекция угловой скорости вращения на эту ось не будет изменяться если $L=0$ хотя бы $M \neq 0$ и $N \neq 0$

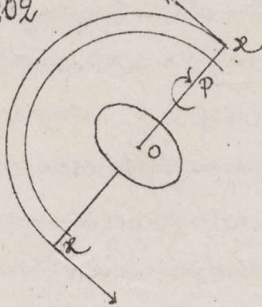
Переходим к интерпретированию уравнения (1) в смысле случая. Из этого заключаем уравнения на z_p, z_q, z_c и складываем, получим: —

$$2Ap \frac{dp}{dt} + 2Bq \frac{dq}{dt} + 2Cz \frac{dz}{dt} + 2pqr(C-B+A-C+B-A) = 0$$

интегрируя, находим: —

$$Ap^2 + Bq^2 + Cz^2 = H \dots (2)$$

рис 102

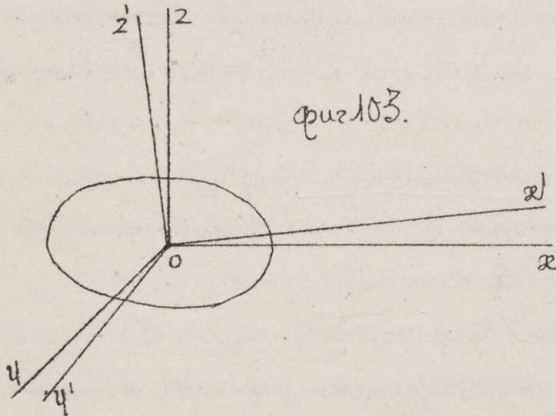


Не трудно показать, что этот интеграл представляет нашу теорему уайбуха сущ. Действительно, так как к. к. только не дпй-свуются в кинетич. сущ., то по теореме уайбуха сущ. — уайбуха.

сущ. всего тѣла не допуска измѣнчивости. Посмо-

тримъ, какъ велика эта сущ.

рис 103.



Если предположимъ, что въ разсматриваемый моментъ времени кинетич. сущ. неподвижны ось x', y', z', направ-ленные по главнымъ

осямъ эллипсоида инерции тѣла, совпадающихъ съ неподвижными осями x, y, z и выразимъ проекциско-рости точки на неподвижные оси по формуламъ Дирера.)

$$\frac{dx}{dt} = qz - zy$$

$$\frac{dy}{dt} = zx - pz$$

$$\frac{dz}{dt} = py - qx$$

то найдем: -

$$\begin{aligned}\sum \frac{mv^2}{2} &= \sum \frac{m}{2} \left\{ \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right\} = \sum \frac{m}{2} \{ q^2 z^2 + z^2 y^2 - \\ &- 2qzzy + z^2 x^2 + p^2 z^2 - 2zpxz + p^2 y^2 + q^2 x^2 - 2pqxy \} = \\ &= \frac{p^2}{2} \sum m (y^2 + z^2) + \frac{q^2}{2} \sum m (z^2 + x^2) + \frac{z^2}{2} \sum m (x^2 + y^2) - \\ &- qz \sum m yz - zp \sum m xz - pq \sum m xy\end{aligned}$$

Коэффициенты при $\frac{p^2}{2}$, $\frac{q^2}{2}$ и $\frac{z^2}{2}$ суть те же, что и выше, как A, B, C , коэффициенты при $-qz, -zp, -pq$ суть те же, что и выше, как D, E, F , рассматриваемые в теории моментов инерции

Пак как главные оси земного шара инерции совпадают с осями x, y, z , то $D=E=F=0$. Мы получим: -

$$2 \sum \frac{mv^2}{2} = Ap^2 + Bq^2 + Cz^2$$

Пак к. 1^я часть постоянна, то и 2^я формула будет постоянной, это и есть интеграл (2)

Вставив в 2^й интеграл формулы (1) дифференцируем их по независимым координатам x, y, z и складывая, получим: -

$$2Ap^2 \frac{dp}{dt} + 2Bq^2 \frac{dq}{dt} + 2Cz^2 \frac{dz}{dt} + 2pqz \{ AC - AB + AB - BC + BC - AC \} = 0$$

Интегрируя, получим: -

$$Ap^2 + Bq^2 + Cz^2 = G^2 \dots \dots (3)$$

где G^2 - произвольное постоянное. Не трудно заметить, что формула (3) есть интеграл энергии. Ученко было доказано, что проекции G на главные оси

оси симпсоа иkerиш суть $A\rho$, Bq и Cz . По-
тому сама величина Θ выражается формулой:

$$\Theta = \sqrt{A^2\rho^2 + B^2q^2 + C^2z^2}$$

Θ есть линейный момент пары, полученной
от сложения коммента движений не изменяется
со временем своего направления и своей величины,
то Θ выражается постоянно, что и видно из фор-
мулы (3). Пользуясь интервалом (2) и (3), можно
выразить q и z с помощью ρ ; потом определить
дифференциалы Θ , ψ и θ , дающие полусение положе-
ния осей координат x', y', z' относительно ко-
нечных неподвижных осей с помощью ρ , а
также и время определить с помощью ρ .

Таким образом вся задача будет решена, но
подробное решение весьма сложно, т.к. производится
с помощью эллиптических функций.

Вместо этого аналитического пути еше рѣ-
шения задачи мы воспользуемся геометричес-
кими методами, предложенными Пуансо.

Метод Пуансо опирается на 3 теоремы, вы-
текающие из формул (2) и (3)

1. Теорема Пуансо. Угловая скорость
вращения тѣла пропорциональна отрез-
ку, который поверхность симпсоа иker-
иш отскакивает на мгновенной оси вращения.

Для сокращения будем при дальнейшем изложении обозначать через x, y, z координаты подвижной оси, направленные по главным осям инерции U -и эллипсоида инерции будет: —

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

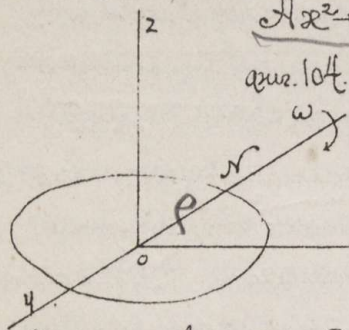


рис. 104.

Пусть мгновенная ось вращения ω перескакает этот эллипсоид в точку N , координаты которой означим через x, y, z , а радиус ON по-

ложим равным ρ : — $ON = \rho$. Макс как угловая скорость ω отклоняется по направлению линии ρ , то отклонение проекции ρ к проекции ω равно отношению ρ к ω , т. е.: —

$$\frac{x}{\rho} = \frac{y}{\rho} = \frac{z}{\rho} = \frac{\rho}{\omega} \dots (4)$$

Впредь будем из формулы (4) ρ, q, z

$$\rho = \frac{\omega x}{\rho}; \quad q = \frac{\omega y}{\rho}; \quad z = \frac{\omega z}{\rho}$$

и подставим их в формулу (2), получим: —

$$\frac{\omega^2}{\rho^2} (Ax^2 + By^2 + Cz^2) = H.$$

Мак к. точка N лежит на поверхности эллипсоида, то: —

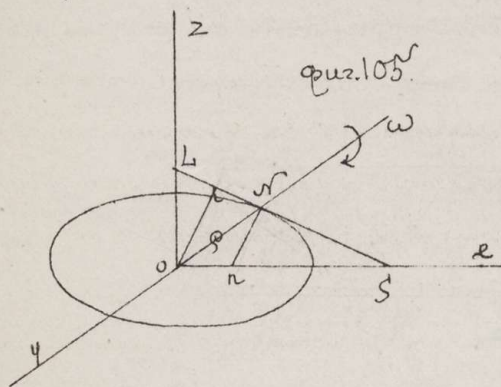
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

Отсюда

$$\omega = \sqrt{H} \cdot \rho$$

Это и требовалось доказать.

2^я теорема Пуансо. Касательная плоскость, проведенная в точку M к поверхности эллипсоида, все время движения сохраняет постоянное направление.



На основании теоремы площадей вектора G все время движения сохраняет постоянное направление. На основании сказанного нами углы α, β, γ , которые образуют этот вектор

с главными осями эллипсоида и меридианом, в нашем случае с осями X, Y, Z , суть: —

$$\cos \alpha = \frac{Ap}{G}; \cos \beta = \frac{Bq}{G}; \cos \gamma = \frac{Cz}{G}$$

или

$$\cos \alpha = \frac{Ap}{\sqrt{A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 z^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{Bq}{\sqrt{A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 z^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{Cz}{\sqrt{A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 z^2}}$$

Представляя в этих формулах вместо p, q, z их величины и формулы, по сокращению записывая и знаменатель на $\frac{\omega}{S}$, получим: —

$$\cos \alpha = \frac{Ax}{\sqrt{A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{By}{\sqrt{A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{Cz}{\sqrt{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}}$$

Представим теперь γ -е минимума и максимум
таких образцов: —

$$F = Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0$$

и вспомнив, что $\cos$ -ты углов α', β', γ' , которые
нормаль к поверхности образует с осями коор-
динат, выражаемся про- нм: —

$$\cos \alpha' = \frac{\frac{dF}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}}$$

$$\cos \beta' = \frac{\frac{dF}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}}$$

$$\cos \gamma' = \frac{\frac{dF}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}}$$

и это в качестве значений нормаль Nn образует
углы, $\cos$ -ты которых суть: —

$$\cos \alpha = \frac{2Ax}{2\sqrt{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{2By}{2\sqrt{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{2Cz}{2\sqrt{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}}$$

Отсюда следует: —

$$\cos \alpha = \cos \alpha'; \quad \cos \beta = \cos \beta'; \quad \cos \gamma = \cos \gamma'$$

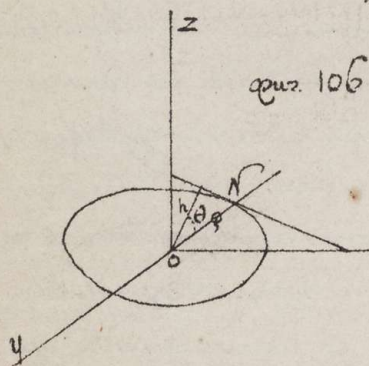
то есть —

$$\alpha = \alpha'; \quad \beta = \beta'; \quad \gamma = \gamma'$$

Таким образом нормаль Nn параллельна

линейному моменту G , полученному от сложения
радиусов вращений. И так как этот линейный мо-
мент не изменяется своим направлением во простран-
стве, то и нормали N , а следовательно, и каса-
тельная плоскости L остаются сами собой парал-
лельными.

3 теорема Пуансо. Длина перпендикуля-
ра, опущенного из неподвижной точки
на касательную плоскость, постоянна.



Длина h найдется так: —

$$h = \rho \cos \theta = \rho \left[\frac{p}{\omega} \frac{Ap}{G} + \frac{q}{\omega} \frac{Bq}{G} + \frac{z}{\omega} \frac{Cz}{G} \right]$$

$$= \frac{\rho}{\omega G} (Ap^2 + Bq^2 + Cz^2)$$

$$\text{но } Ap^2 + Bq^2 + Cz^2 = H.$$

и так как это

$$h = \frac{H\rho}{\omega G} = \frac{H\rho}{G\sqrt{H}G}$$

это касается ω , то по

теореме Пуансо имеем

$$\omega = G\sqrt{H}.$$

Подставляя, находим

$$h = \frac{\sqrt{H}}{G}$$

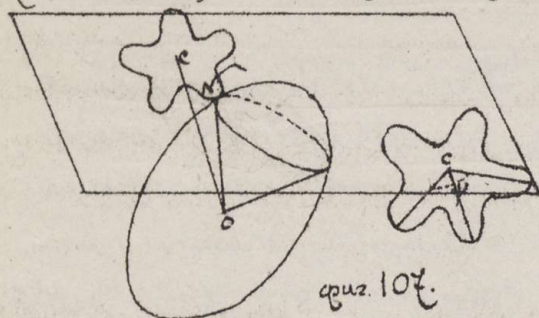
Это есть выражение 3^{ей} теоремы Пуансо

На основании 2^{ей} и 3^{ей} теоремы Пуансо, ^{выражен} что каса-
тельная плоскость, ось которой идет ось непо-
движна.

По какому-нибудь данному касательная плоскость

вполне отроится. Π_{12} — 298 — будет так вращаться, что всегда минимизировать будет прикасаться к ней.

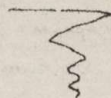
Отсюда, точки касания N , лежащие на некоторой кривой, которая называется герполоидой



Замечу, когда герполоид вращается, поступают так: прикоснешься к плоскости и будешь катить ее так, это она будет катиться

по плоскости без скольжения, прикасаясь к герполоиду. Когда она откатится к некоторой линии, которая называется поллоидой, она может быть разорвана. В движении все точки герполоиды и все точки поллоиды с точкой O , лежащие в конусах: — конус герполоиды и конус поллоиды.

Все движение тела приводится к тому, что конус поллоиды катится по конусу герполоиды без скольжения. При этом угловая скорость на основании 1^й теоремы Понсе пропорциональна только образующей. Если герполоид не спускается, то движение тела безконечно разнообразно

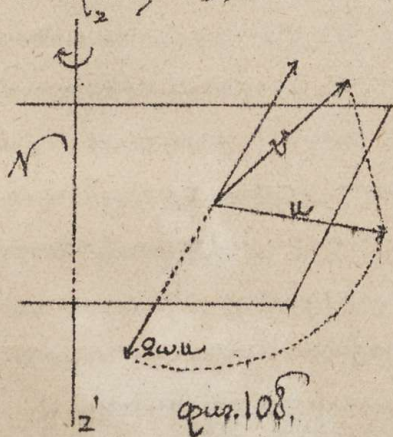


Теорія гироскоповъ.

Въ явленіяхъ гироскоповъ действуютъ на основаніи теоремы Коріолиса.

На основаніи этой теоремы. Если движу- щееся тѣло отнесено къ подвижному оснѣ, то надо прибавить силы инер- ции отъ поворотнаго ускоренія и уско- ренія вращенія.

Въ явленіяхъ гироскоповъ играютъ роль силы инерціи отъ поворотнаго ускоренія. Положимъ, что у насъ ZZ' — ось вращенія, а N — плоскость, перпендикулярная къ оси



вращенія. Положимъ также, что материальная точка дви- жется со скоростью V , проекція которой на плоскость N равна u . Сила инерціи поворотна- го ускоренія $u\omega$ и ускоренія вращенія $2\omega u$ повернуть около оси вращенія въ сторону

вращенія на прямой уголъ.

(Сила инерціи) отъ поворотнаго ускоренія направ- лена въ противоположную сторону и равняется $2\omega ut$.

ции относительно оси Z , происходящей отъ по-
воротного ускорения. Эта сумма ^{равнодействующей} будетъ — линей-
ный моменту пары, ^{пониженной} отъ этихъ силъ
инерции, такимъ образомъ: —

$$L = \sum 2m \omega r y = \sum 2m \omega r y^2 = 2\omega n \sum m y^2$$

Припомнимъ, что моментъ инерции

$$A = \sum m (z^2 + y^2)$$

Но т. к. это есть моментъ вращения, то состав-
ляя $\sum m (z^2 + y^2)$ и $\sum m z^2 = \sum m y^2$, а отсюда

$$A = 2 \sum m y^2$$

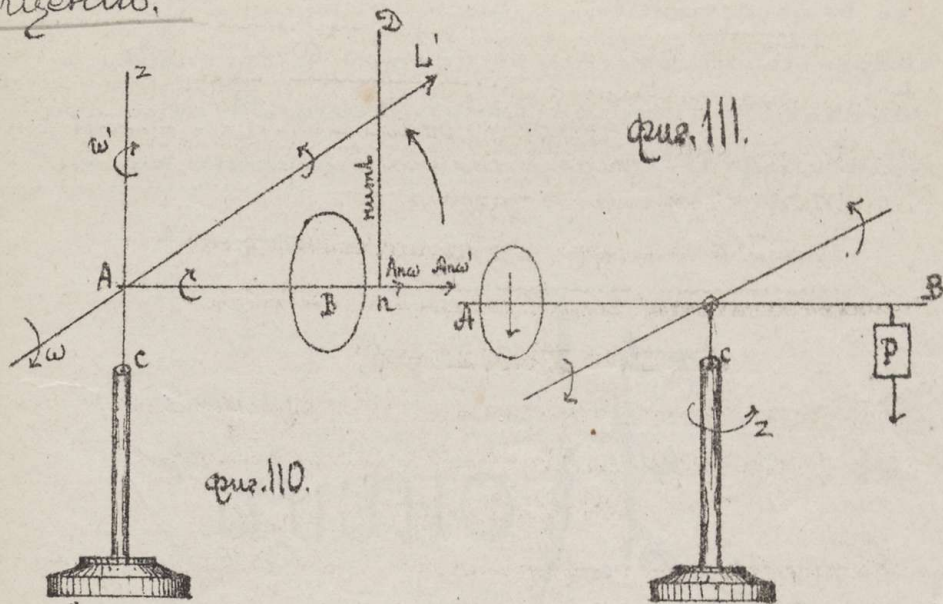
Подставивъ найденныя: —

$$L = A \omega n$$

Изъ сказанного найдемъ такое правило для
составления пары, происходящей отъ силъ инерции
отъ поворотного ускорения въ гироскопъ: —

Чтобы получить линейный моментъ
пары, надо умножить моментъ инерции
гироскопа на его угловую скорость и на уг-
ловую скорость, на которую мы его по-
ворачиваемъ, отложивъ это на оси вра-
щения гироскопа въ ту сторону, куда
откладываютъ угловую скорость, потомъ
повернуть полученный векторъ на пря-
мой уголъ около оси новаго вращения въ
сторону, противоположную этой вра-

уценно.



Гироскоп Фуко, представленный на фиг. 110, состоит из следующих частей. В стойке OC (одна из маленьких отверстий, куда вставляется проволока AC , к этой проволоке прикреплена под прямым углом рукоятка AB , в которой вращается колесо B . Если мы сообщим колесу B вращение, то рукоятка выйдет из колеса и начнет вращаться около оси Z . Чтобы во время спокойного состояния колесо B с рукояткой не упало и поддерживалось криво BD .

Известные гироскопы Аллера и Гюйгенса отличаются от гироскопа Фуко; разница только

ко въ устройствѣ. Здѣсь стержень АВ своей
срединой опирается, въ точку С въ стойку и
имѣетъ на остромъ концѣ колесо А, а на дру-
гомъ концѣ Р — значительное маховое колесо.



гии относительно оси Z, происходящих от по-
воротного ускорения. Эта сумма будет = линей-
ному моменту ^{равновесия} (пары, возникающей от этих сил
инерции) таким образом: -

$$L = \sum 2 m a n y = \sum 2 m a n y^2 = 2 \omega n \sum m y^2$$

Предположим, это моменты инерции

$$A = \sum m (z^2 + y^2)$$

Но т.к. это тело есть тело вращения, то состав-

им, $\sum m (z^2 + y^2)$ и $\sum m z^2 = \sum m y^2$, а отсюда получим

$$A = 2 \sum m y^2$$

Подставим найденное: -

$$L = A \omega n$$

Из сказанного получили такое правило для
оставшихся пар, происходящих от сил инерции
от поворотного ускорения в центре тяжести: -

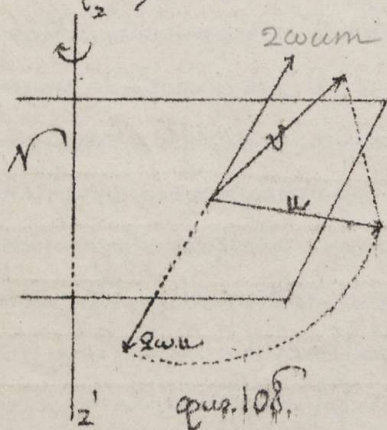
Это же получить линейный момент
пары, надо умножить моменты инерции
зероскопа на его угловую скорость и на у-
словную скорость, на которую мы его по-
ворачиваем, отложив это на оси вра-
щения зероскопа в ту сторону, куда
откладывают угловую скорость, потом
повернув полученный вектор на пря-
мой угол около оси колов вращения в
сторону, противоположную этой вра-

Теория гироскоповъ.

Всѣ явления гироскоповъ объясняются на основаніи теоремы Кориолиса.

На основаніи этой теоремы если движу- щееся тѣло отнесено къ подвижной осѣ, то надо прибавить силы инер- ции отъ поворотнаго ускоренія и усе- ренія вращенія.

Въ явленіи гироскоповъ играютъ роль силы инерции отъ поворотнаго ускоренія. Положимъ, что у насъ ZZ' - ось вращенія, а N - плоскость, перпендикулярная къ оси



вращенія. Положимъ даже, что материальная точка дви- жется со скоростью V , проекція которой на плоскость N равна u . Изъ поусенія поворотна- го ускоренія нужно u увели- чить на 2ω и повернуть около оси вращенія въ сторону,

вращенія на прямой уголъ.

(Два инерции) отъ поворотнаго ускоренія направ- лена въ противоположную сторону и равняется 2ω ит.

Летников.

Интегрирование

дифференциальных уравнений.

Дифференциальным уравн. называется уравн. содержащее производную неизвестной функции по переменному независимому. Это уравн. кроме того может содержать саму функцию и переменное независимое; но, чтобы оно было дифференциальным, необходимо, чтобы в него входила производная функции.

Дифференциальные уравн. разделяются на порядки, смотря по высшему порядку входящей в него производной.

Пусть y есть неизвестная функ. переменного независимого x : $f(x)=y$. Тогда общий вид d -ного уравн. $1^{\text{го}}$ порядка будет:

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$$

и общий вид d -ного уравн. $n^{\text{го}}$ порядка будет:

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0$$

Чтобы уравн. было $n^{\text{го}}$ порядка, необходимо, чтобы в него входила производная $\frac{d^ny}{dx^n}$ и не входила производная высшего порядка.

Интегрировать данное d -ое уравн. - значит найти такую зависимость между x и y , из которой данное d -ое уравн. вытекает бы как необходимое следствие. Для f -ия d -ых уравн. функции существуют особые случаи, как как непосредственное интегрирование их невозможно.

Таким образом на d -ные уравн. $1^{\text{го}}$ порядка.

Решив его относительно $\frac{dy}{dx}$, напишем $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ и можем написать:

Интегрирование дифференциальных уравн.

Летников 1.

$dy = f(x, y) dx$. Записав можно написать: $y = \int f(x, y) dx$.

Но здесь интегрирования выполнить нельзя, ибо под знаком $\int$ а вхо-
дит y , т.е. неизвестная ф-ция x ?

Простейший случай д-го ур-я будет тот, когда производная выра-
жается ф-цией одного x , т.е. когда: $\frac{dy}{dx} = f(x)$, тогда $dy = f(x) dx$ и
 $y = \int f(x) dx + c$. Здесь $\int$ -ие можно выполнить, так как здесь $\int$ -е
представляет простую квадратуру.

В геометрии и механике существует весьма много вопросов, при-
водящихся к д-ным ур-ям. Так если в геометрии требуется оп-
ределить такую кривую линию, которая обладает бы данными свой-
ствами по отношению к касательной, то так как направление ка-
сательной определяется производной $\frac{dy}{dx}$, то, возникая такой вопрос
в ур-е, мы необходимо приходим к некоторой зависимости между
 $\frac{dy}{dx}$ и координатами x и y , т.е. приходим к д-ому ур-ю вида:

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$$

и интегрирование этого ур-я должно открыть конечное ур-е иско-
мой кривой, обладающей данными свойствами.

Подобно этому, если ищется кривая, которая обладает бы данными
свойствами по отношению к радиусу кривизны, то, так как в вы-
ражении радиуса кривизны входят два первых производных: $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$,
то, возникая вопрос в ур-е, мы приходим к д-ому ур-ю 2^{го} порядка.

И опять интегрирование этого ур-я должно дать ур-е иско-
мой кривой.

Из теории плоскопараллельного движения в механике скорость вращае-

есть 1^я производной пространства по времени, а сила поперечетовой 2^я производной. Поэтому, если ставить вопрос, в котором по данной силе требуется определить движение, то такой вопрос всегда приводится к д-ию ур-ю 2^{го} порядка. Интегрирование этого ур-я должно дать зависимость между пространством и временем в конкретном виде, т.е. без диф. лова; т.е. должно дать ур-е движения.

Кроме вопросов с одним неизвестным ср-ием могут встречаться вопросы, в которых входят несколько неизвестных ср-ий одного переменного независимого. Для определения этих ср-ий достаточно б. составлено столько ур-ий, сколько неизвестных. Эти ур-я могут б. д-ыми, т.е. в них, кроме самой ср-ии искомой входят их производные различных порядков по переменному независимому. Такая система или совокупность д-ых ур-ий называется совместными дифференциальными уравнениями. Интегрирование совместных д-ых ур-ий приводится к $\int$ -ю одного д-о ур-я с одним неизвестным.

Наконец могут б. такие вопросы, в которых неизвестными являются ср-ии нескольких независимых переменных. И для определения этих ср-ий могут б. даны д-ые ур-я, в которых входят частные производные этих ср-ий по различным независимым. Такие ур-я называются уравнениями с частными производными или уравнениями с частными дифференциалами. Они представляются в вопросах мате-

математики, физики и их $\int$ -ия представляет особую трудность.

Остановимся сначала на д-ухх ур-иях 1^{го} порядка

Общий видъ такого ур-ия есть:

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$$

Предположим, что это ур-ие решено относительно $\frac{dy}{dx}$. Оно можетъ иметь несколько решений. Тогда каждое решение следует раз-
решивать какъ отдельное ур-ие. Возьмемъ одно решение:

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Первый вопрос, который следуетъ предположить себе относительно этого ур-ия есть вопросъ о томъ: всегда ли существуетъ такая ф-ция x^0 , которая удовлетворяетъ форму ур-ия. Возьмемъ произвольную функцию $x^0 \dots \dots \dots f(x)$. Эту ф-цию можно представить въ видъ ряда по степенямъ Тейлора сходящийся образомъ: пусть x_0 есть совершенно произвольное и постоянное значение, взятое для x^0 . Тогда напишемъ ур-ие: $f(x) = f(x_0 + x - x_0)$ и теперь будемъ разсматривать разность $(x - x_0)$ какъ прираще-
ние, данное x^0 , тогда по степенямъ Тейлора получимъ:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} + f'''(x_0) \frac{(x - x_0)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \dots \dots$$

Чтобы это разложение существовало, необходимо, чтобы коэффи-
циенты $f(x_0), f'(x_0), f''(x_0), \dots$ были бы величинами конечными. Этому
требованию всегда можно удовлетворить, такъ какъ x_0 выбирает-
ся совершенно произвольно. Заметимъ этотъ рядъ долженъ б. сходя-
щаяся по крайней мѣрѣ при значеніи x весьма близкомъ къ x_0 ,
потому что члены въ этомъ ряду будутъ идти, быстро умень-
шаясь. Такимъ образомъ всякая ф-ция можетъ б. представлена

подобных рядов. Предположим в этом равенстве $\varphi(x) = y$ и составим первый член этого равенства. 1^й член есть: $\varphi(x_0) = y_0$. Это есть значение y , соответствующее значению $x = x_0$. Это значение нам неизвестно и из данного д-го ур-я мы определить его не можем. Выходом из этого это значение y мы можем взять совершенно произвольным, потому что относительно его в данном ур-е не выражено никаких требований. Поэтому, если мы выберем такое значение y_0 , тогда во второй член встроится $\varphi'(x_0)$, т. е. значение производной y по x при $x = x_0$. Отмечая это значение так: $(\frac{dy}{dx})_0 = \varphi'(x_0)$. Это значение определяется прямо посредством данного д-го ур-я, именно при $x = x_0$ будем иметь $y = y_0$ и $(\frac{dy}{dx})_0 = f(x_0, y_0)$. Во succeeding членах ряда входят производные: $\varphi''(x_0)$, $\varphi'''(x_0)$, т. е. значения производных высших порядков y по x при $x = x_0$. Все эти значения могут б. определены посредством данного д-го ур-я аналогичным образом.

Возьмем ур-е $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ и от обеих частей возьмем производную по x . Тогда в 1^й части войдет $\frac{d^2y}{dx^2}$, а во второй войдут: $\frac{dy}{dx}$, x , y . Выходом из этого будет подставить его значение $f(x, y)$. Тогда получим выражение $\frac{d^2y}{dx^2} = f_2(x, y)$. Далее возьмем снова производную по x . Тогда 1^я часть будет иметь производную $\frac{d^3y}{dx^3}$, а во второй войдут x , y и $\frac{dy}{dx}$; выхотом снова подставить его выражение $f(x, y)$, тогда получим: $\frac{d^3y}{dx^3} = f_3(x, y)$. Далее можно так же получить $\frac{d^4y}{dx^4} = f_4(x, y)$. Вообще, все производные высших порядков можно бу-

здесь выразить через x и y только. Вспомогательная, полагая в этих равенствах $x = x_0$ и $y = y_0$, дает функции:

$$\varphi''(x_0) = \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_0 = f_1(x_0, y_0)$$

$$\varphi'''(x_0) = \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)_0 = f_2(x_0, y_0)$$

вставляя все это в наше разложение, получим ряд:

$$y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0) + f_1(x_0, y_0) \frac{(x - x_0)^2}{1.2} + \dots + f_n(x_0, y_0) \frac{(x - x_0)^{n+1}}{1.2.3. \dots n(n+1)}$$

И таким образом ряд будет вполне определен. Этот ряд представляет функцию, удовлетворяющую требованиям данного дифференциального уравнения. Не трудно повторить, что функция, представляемая этим рядом, действительно удовлетворяет данному дифференциальному уравнению.

Из самого явного способа производную этого ряда:

$$\frac{dy}{dx} = f(x_0, y_0) + f_1(x_0, y_0)(x - x_0) + f_2(x_0, y_0) \frac{(x - x_0)^2}{1.2} + \dots$$

Не разглядывая ряд, стоящий во второй части, мы легко заметить, что этот ряд представляет разложение $f(x, y)$ по степеням $(x - x_0)$ по формуле Тейлора. Следовательно это равенство можно написать прямо в виде $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Мы видим, что дифференциальное уравнение имеет вид выражение, как прямо получим из него данное дифференциальное уравнение, следовательно это разложение удовлетворяет данному уравнению.

Отсюда следует, что всякое дифференциальное уравнение первого порядка имеет интеграл.

Понимая y представлять y , как функцию x , но таким образом, что эта функция при $x = x_0$ обращается в $y = y_0$, где y_0 совершенно произвольно, т.е. что зависимость между x и y должна быть такова, чтобы при совершенно произвольных значениях $x = x_0$...

можно было бы назначить для y совершенно произвольное соответствующее значение $y = y_0$. Это требование указывает, что в уравнении, связывающем x с y , кроме x и y должно входить еще некоторое произвольное количество, величину которого мы могли бы располагать, для того, чтобы удовлетворить последнему требованию. Если бы в уравнении, связывающем x с y , входили бы только x и y , так же мы имели бы $\varphi(x, y) = 0$, то тогда при произвольном значении $x = x_0$ получили бы для y совершенно определенное соответствующее значение и вышеуказанное требование не могло бы быть удовлетворено.

Вследствие этого необходимо предположить, что в это уравнение кроме x и y входит некоторое произвольное количество C , зависящее от x и y , так что уравнение будет: $\varphi(x, y, C) = 0$

Это C называется произвольным постоянным и, располагая его величиною, всегда можно выбрать эту величину так, что при $x = x_0$ можно было бы назначить для y величину $y = y_0$ совершенно произвольно. Для этого можно только удовлетворить уравнению $\varphi(x_0, y_0, C) = 0$, а удовлетворить этому уравнению всегда можно, определив из него величину, которую следует приписать C . И так заключаем, что дифференциальное уравнение первого порядка всегда имеет интеграл.

Этот $\int$ представляет некоторое уравнение между x и y , содержащее произвольное постоянное C , так что, располагая величиною этого постоянного, можно при $x = x_0$ назначить для y

совершению произвольное соответствующее значение $y = y_0$.

Такой интеграл существует только один.

Посмотрим теперь, как из этого интеграла получается обратное данное темное д-ое ур-е. Помогим, что это ур-е есть:

$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$, откуда $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Пусть интеграл будет: $\varphi(x, y, C) = 0$

Дифференцировав это ур-е, мы получим новое ур-е: $\psi(x, y, \frac{dy}{dx}, C) = 0$

В данном д-ом ур-и мы имеем $\frac{dy}{dx}$, выраженное в ф-ции только x и y , между ~~только~~ ^{только} из последнего ур-я $\frac{dy}{dx}$ получается, как ф-ция x, y и C . Следовательно это выражения не может быть тождеством с тем, которое мы имеем в данном д-ом ур-и. Если мы исключим C из последнего ур-я и из $\int$ -а, то получим зависимость между x, y и $\frac{dy}{dx}$. Эта зависимость должна быть тождественна с данным д-ым ур-ем, т.е. она должна приводить к $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

Интеграл, содержащий C -произвольное постоянное называется общим интегралом д-го ур-я и следовательно д-ое ур-е можно получить из общего интеграла через дифференцирование его по x и через исключение произвольного постоянного C .

Можно спросить: общий $\int$ -т написать так, что исключение произвольного постоянного совершается само собою при дифференцировании. Для этого стоит только общий $\int$ -т решить относительно произвольного постоянного C и представить его в таком виде: $\varphi(x, y) = C$. Тогда, дифференцируя его по x , получим: $\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} \frac{dy}{dx} = 0$ и $\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dy}}$. Это выражение уже право

не следует содержать C и следовательно оно должно в
тождественно с тем, которое давая в d -ом чл-е т. е. с
 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. В геометрической точке ординат общий интеграл
 $\varphi(x, y, C) = 0$ представляет безразличное множество кривых ли-
ний, которые поются, приписывая постоянному C разны-
м значения. Дифференциальное уравнение, которое поется из
из общего интеграла, т. е. $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ не содержит постоян-
ного C , и поэтому оно относится ко всем кривым линиям,
выражаемым общим интегралом (в геометрич. смысле это
уравнение будет представлять некоторое свойство касательной,
общее для всех кривых, выражаемых общим $\int$ -ом)

Если в общем $\int$ -е произвольному постоянному дадим ка-
кое либо частное значение, напр., полагая $C=0$, $C=1$ и т. п.,
то получим частные $\int$ -ы; частных $\int$ -ов существует действительное множество

Примечание. Общий $\int$ может в. представлять в. все-
ма разнообразных видах, которые иногда имеют весьма ма-
ло сходства. Действительно, так как C совершенно произ-
вольное, то мы можем полагать $C = \varphi(C')$, где $\varphi()$ озна-
чает ^{функцию} совершенно произвольную, а C' новое произвольное постой-
янное и тогда общий $\int$ будет $\varphi(x, y, \varphi(C')) = 0$, где произ-
вольным постоянным уже будем считать C' . Это уравнение
будет другого вида, чем первоначальное, но, тем не менее
это будет такое же общий $\int$.

Поэтому замечанию для одного и того же d -го ур-я можно приписать общий f -з в разных видах, но всегда не трудно удовлетвориться, будет ли это один и тот же интеграл. Действительно предположим, что для одного и того же d -го ур-я разными приемами f -ия мы получили 2 разных f -а, помножив $\varphi(x, y, z) = 0$ и $\varphi(x, y, z') = 0$. Эти два ур-я должны б. одинаковы, потому что d -ое ур-е имеет один только f -з. Поэтому, если из этих ур-ий исключить x , то непременно выветь с x должно исчезнуть y , потому что иначе мы получили бы зависимость между y и z, z' , т.е. получили ур-е такого вида: $\varphi(y, z, z') = 0$, откуда получили $y = \varphi(z, z')$, т.е. $y = \text{const.}$, что невозможно. Поэтому, если при исключении x -а пропадает и y и получается ур-е: $\varphi(z, z') = 0$, то это значит, что 2 f -а согласны между собою. Если же при исключении x -а, y не пропадает, то это значит, что по крайней мере один из этих f -ов невторен.

Дифференциальные ур-я 1^{го} степени и 1^{го} порядка

В таком ур-е производная $\frac{dy}{dx}$ входит только в 1^ю степень. Общий вид такого ур-я есть $M + N \frac{dy}{dx} = 0$, или $M dx + N dy = 0$, где M и N суть некоторые f -ии x^a и y^a . Существует несколько случаев, в которых такое ур-е можно f -ровать. Рассмотрим эти случаи:

1) Отделение переменных. Если д-ое ур-е можно привести к такому виду, что M , т.е. коэффициент при dx будет ф-ей одного только x , а N -коэффициент при dy - ф-ей одного только y , то тогда говорят, что в ур-е переменные отделены и $\int$ -е совершается непосредственно, т.е. прямо приводится к квадратурам. Действительно, пусть $M = f(x)$, а $N = \varphi(y)$ и тогда ур-е будет $f(x)dx + \varphi(y)dy = 0$. Здесь в 1^й части стоит д-е двух $\int$ -ов (от сеп-ль двух $\int$ -ов). Член $\int f(x)dx + \int \varphi(y)dy = C$ и так как этот д-е $= 0$, то эта сеп-ль аримена б. равна постоянному количеству, поэтому:

$\int f(x)dx + \int \varphi(y)dy = C$. Это равенство и будет общим интегралом данного д-го ур-я. Также если интеграл ур-я $\frac{dx}{1+x} + \frac{dy}{1+y} = 0$, то здесь переменные отделены и $\int$ -е его будет $\int (1+x) + \int (1+y) = C$ или $\int \{(1+x)(1+y)\} = C$ или $(1+x)(1+y) = e^C$. Нужно положить $e^C = C'$ и тогда общий $\int$ -е представит в виде: $(1+x)(1+y) = C'$

Иногда в ур-е переменные не отделены, но достаточно иначе написать это ур-е, чтобы переменные явились в нем отделенными. Также помним, что такое дано такое ур-е $X \cdot X' dx + Y' Y' dy = 0$, в котором относи-тели X и X' суть ф-ии одного только x , Y и Y' суть ф-ии одного только y . Тогда разделив это ур-е на $X'Y$, мы получим $\frac{X \cdot dx}{X'} + \frac{Y'}{Y} dy = 0$. Здесь переменные отделены и общий $\int$ -е этого ур-я будет: $\int \frac{X}{X'} dx + \int \frac{Y'}{Y} dy = C$. Примем дано ур-е $X\sqrt{1-y^2} dx + Y\sqrt{1-x^2} dy = 0$. Разделив это ур-е на $\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-x^2}$, по-

имеем $\frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{y dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$ и его общий $\int$ -е дает: $-\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2} = C$.

2) Ур-я однородная. Если в д-ом ур-и $M dx + N dy = 0$ коэффициенты M и N суть однородные ф-ии x и y (одинакового измерения), то в этом ур-и можно отделить переменные, вводя новую переменную вместо y . Полагая, что M и N будут однородные ф-ии $n^{\text{го}}$ измерения относительно x и y . Тогда вставив множитель x^n , мы представим эти ф-ии в таком виде: $M = x^n \varphi(\frac{y}{x})$ и $N = x^n \psi(\frac{y}{x})$, следовательно ур-е будет: $x^n \varphi(\frac{y}{x}) dx + x^n \psi(\frac{y}{x}) dy = 0$ или $\varphi(\frac{y}{x}) dx + \psi(\frac{y}{x}) dy = 0$ введем новое переменное, полагая $\frac{y}{x} = v$ или $y = vx$ и, исключая y , будем иметь $dy = v dx + x dv$ и ур-е будет: $\varphi(v) dx + \psi(v)[v dx + x dv] = 0$ или $[\varphi(v) + v \psi(v)] dx + x \cdot \psi(v) dv = 0$ или напомним так

$\frac{dx}{x} + \frac{\psi(v) dv}{\varphi(v) + v \psi(v)} = 0$ В этом ур-и переменная отделилась и оно интегрируется прямо в квадратурах, получим:

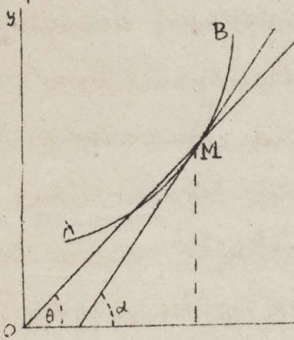
$$\ln|x| + \int \frac{\psi(v) dv}{\varphi(v) + v \psi(v)} = C.$$

Когда будет найдена эта квадратура, то мы получим ур-е такого вида: $F(v, x) = C$, вставив в которое $v = \frac{y}{x}$, получим $F(x, \frac{y}{x}) = C$. Это и будет общий $\int$ -е.

Пример. Найти такую кривую линию, в каждой точке которой касательная составляет дв с осью $x^{\text{ой}}$ угол вдвое больший угла, образованного вектором с осью $x^{\text{ой}}$.

Решет. АВ есть требуемая кривая и М произвольная на ней точка. ОМ-радиус вектор; он составляет $\angle MOx = \theta$ Проводим касательную, $\angle$ ее с $Ox = \angle x$. По требованию задачи должно иметь $\angle x = 2\theta$, отсюда $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$

но $Jy = \frac{dy}{dx}$, а $Jy = \frac{y}{x}$, вставив, получим $\frac{dy}{dx} = \frac{2(\frac{y}{x})}{1 - \frac{y^2}{x^2}} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$ или $2xy \cdot dx + (y^2 - x^2) dy = 0$. Это есть однородное д-ое ур-е, его $\int$ -е

укажет как же какова кривая, обладающая данными свойствами своей формы.  $y = vx$ и $dy = v \cdot dx + x \cdot dv$. Взяв вид, получим $2x^2 v \cdot dx + x^2 (v^2 - 1)(v dx + x dv) = 0$ или $(2v + v^3 - v) dx + x(v^2 - 1) dv = 0$ или $\frac{dx}{x} + \frac{v^2 - 1}{v^2 + v} dv = 0$. $\int$ -я, получим $\ln x + \int \frac{v^2 - 1}{v^2 + v} dv = C$. $\frac{v^2 - 1}{v^2 + v} = \frac{A}{v} + \frac{Bv + C}{v^2 + 1} \dots v^2 - 1 = (A + B)v^2 + Cv + A$

$A + B = 1, C = 0$ и $A = -1$, следовательно $B = 2$ и $\frac{v^2 - 1}{v^2 + v} = -\frac{1}{v} + \frac{2v}{v^2 + 1}$; $\ln x - \int \frac{dv}{v} + \int \frac{2v \cdot dv}{v^2 + 1} = C$, $\ln x - \ln v + \ln(v^2 + 1) = C$, отсюда $\ln \frac{x(v^2 + 1)}{v} = C$ и $\frac{x(v^2 + 1)}{v} = e^C = C'$. Указав $v = \frac{y}{x}$, вставив, получим $x \left(\frac{y^2}{x^2} + 1 \right) \frac{x}{y} = C'$ или $\frac{y^2 + x^2}{y} = C'$ или $x^2 + y^2 - C'y = 0$. Это есть

уравнение искомай кривой. Взяв центр, проходящий через начало координат, которого центр на оси y . Действительно $x^2 + (y - \frac{C'}{2})^2 = \frac{C'^2}{4}$. Будем иметь $CA = \frac{C'}{2}$. Из чертежа видно, что $\alpha = 2\theta$. Наше вычисление доказывает кроме того, что никакая другая кривая не обладает указанными свойствами, кроме указанного круга.

Уравнение, приводимое к однородному

Это ур-е сводящееся: $(ax + by + c)dx + (a'x + b'y + c')dy = 0$
 Введем новые переменные x' и y' , полагая $x = x' - \alpha$ и $y = y' - \beta$, где α и β найдем так, пока простыми коэффициентами, тогда $dx = dx'$ и $dy = dy'$ и, вставив, получим: $(ax' + by' + c - a\alpha - b\beta)dx' + (a'x' + b'y' + c' - a'\alpha - b'\beta)dy' = 0$

спределим неизвестные x и y так, чтобы было $a'x + b'y = c'$
т. е. найдем x и y из этих 2 ур-ий, тогда д-ое ур-ие будет
 $(ax' + by') dx' + (a'x' + b'y') dy' = 0$ и это новое ур-ие будет уже од-
нородно относительно x' и y' , так что его можно $\int$ -ть, полагая $y' = vx'$.

Уравнение линейное

Также называется д-ое ур-ие, в котором y и $\frac{dy}{dx}$ входят только в 1^ю степень. Это ур-ие имеет вид $\frac{dy}{dx} + Py = Q$, где P и Q суть f -ии одного только x . Пособием $y = uz$, где u и z будут неизвестными f -ии x . Из них одну можно взять произвольно. Вставив, получим $u \frac{dz}{dx} + z \frac{du}{dx} + Puz = Q$ или $u \frac{dz}{dx} + (\frac{du}{dx} + P)z = Q$. Для u возьмем такое выражение, чтобы было $\frac{du}{dx} + P = 0$. Из этого равенства можно будет определить u . Действительно имеем $\frac{du}{u} = -P dx$ и, $\int$ -чая получим $\ln u = -\int P dx$ и $u = e^{-\int P dx}$. Таким образом u будет известно и при этом значении u , будет: $u \frac{dz}{dx} = Q$ или $e^{-\int P dx} \frac{dz}{dx} = Q$, откуда $\frac{dz}{dx} = Q e^{+\int P dx}$, а, отсюда, $\int$ -чая, получим $z = C + \int Q e^{+\int P dx}$, где C есть произвольное постоянное. Значит получается некая функция $y = e^{-\int P dx} (C + \int Q e^{+\int P dx})$. Эта формула дает общий $\int$ -ый линейного ур-ия. Он получается, выполнив указанные квадратуры.

Уравнение Бернулли

Также называется д-ое ур-ие связующего вида $\frac{dy}{dx} + Py = Q y^n$, где P и Q суть f -ии одного x , а n - произвольный показатель. Это ур-ие приводится к линейному, разделив его на y^n , будет

имеем $y \cdot \frac{d^n y}{dx^n} + P \cdot y^{1-n} = Q$. Положим $y = z$, тогда, д-руя, получим $(1-n) y \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{dz}{dx}$ и, вставив, получим: $\frac{1}{1-n} \cdot \frac{dz}{dx} + Pz = Q$, $\frac{dz}{dx} + (1-n)Pz = (1-n)Q$. Это ур-е относительно z есть линейное и $\int$ -е его по формуле Бернулли будет: $z = e^{-\int (1-n)P dx} [C + (1-n) \int Q e^{\int (1-n)P dx} dx]$, или вставив вместо z его выражение, будем иметь $y^{1-n} = e^{-\int (1-n)P dx} [C + (1-n) \int Q e^{\int (1-n)P dx} dx]$ это есть общий $\int$ -е ур-я Бернулли.

Полная дифференциальная ур-я 1^{го} порядка

Возьмем ур-е $M + N \frac{dy}{dx} = 0$ или $M dx + N dy = 0$. Известно, считая, что 1^е часть этого ур-я будет представлять полный д-е некоторой ф-ции двух переменных x и y , т. е. будем иметь тождество $M dx + N dy = du = df(x, y) = \frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy$, где $u = f(x, y)$ и есть некоторая известная ф-ция x и y . В этом случае ур-е называется полным д-ом ур-я и его $\int$ получается непосредственно, если ф-ция u известна. Действительно, тогда наше ур-е будет $df(x, y) = 0$ и следовательно будем иметь $f(x, y) = C$, где C есть произвольное постоянное. Равенство это и будет общим $\int$ -ом д-го ур-я. Теперь предположим себе такой вопрос: дано д-ое ур-е: $M dx + N dy = 0$ требуется узнать не есть ли оно полное д-ое ур-е и если есть, то как найти его общий $\int$ -е? Если 1^е часть ур-я есть полный д-е от ф-ции $f(x, y)$, то должно иметь тождество $M dx + N dy = \frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy$ и следовательно: $M = \frac{df}{dx}$ и $N = \frac{df}{dy}$. Если дифференцировать 1^е равенство по y , 2^е по x , получим $\frac{dM}{dy} = \frac{d^2 f}{dx dy}$

$\frac{dH}{dx} = \frac{d^2 f}{dy dx}$ следовательно должны иметь $\frac{dH}{dy} = \frac{dH}{dx}$ но это равенство есть необходимое условие, которое должно быть соблюдено для того, чтобы уравнение можно было бы решить. Полагая, что это условие выполнено и будем искать функцию u , помня, что u которой $= 1^{\text{я}}$ части нашего d -го уравнения. Полагая $f(x, y) = u$ должны иметь $\frac{du}{dx} = H$. Здесь в $1^{\text{я}}$ части равенства стоит полная производная по x . Следовательно, при d -м по x, y было рассматриваемое как постоянное. Интегрируя по x , получим $u = \int H \cdot dx + C'$. Здесь при f -м y должно быть такое рассматриваемое как постоянное количество. C' есть постоянное количество по отношению к x , но оно может зависеть от y . Поэтому должны положить $C' = \varphi(y)$ где φ есть неизвестная нам функция и напишем $u = \int H \cdot dx + \varphi(y)$. Надо определить $\varphi(y)$. Отбросив часть, возмем производную по y , получим $\frac{du}{dy} = \frac{d}{dy} \int H \cdot dx + \varphi'(y)$, но $\frac{du}{dy} = H$ следовательно найдем: $\varphi'(y) = H - \frac{d}{dy} \int H \cdot dx$; в этом равенстве $1^{\text{я}}$ часть есть функция одного y , следовательно и $2^{\text{я}}$ часть не должна содержать x , но между тем x входит в H и $\int H$. Поэтому необходимо удостовериться в том, что действительно и $2^{\text{я}}$ часть не содержит x . Если она не содержит x , то ее производная по x должна быть $= 0$. Найдем эту производную. Получим: $\frac{dH}{dx} = \frac{d}{dx} \int H \cdot dx$. Или, переменив порядок d -го получим: $\frac{dH}{dx} = \frac{d}{dy} \cdot \frac{d}{dx} \int H \cdot dx$ или $\frac{dH}{dx} = \frac{dH}{dy}$, но эта разность действительно $= 0$, если только выполнено условие $\frac{dH}{dx} = \frac{dH}{dy}$ полного d -на, которое мы полагали выполненным. И так $2^{\text{я}}$

засть, которую мы разанатривали, действительно не зави-
ситъ отъ x . (Возвратившись къ ур-ю $\varphi'(y) = X - \frac{d}{dy} \int M dx$ и ум-
ножая обе части на dy и $\int$ -руя: $\int \varphi'(y) dy = \varphi(y) = \int (X - \frac{d}{dy} \int M dx) dy$,
сгруппировавъ воедино, мы получимъ ор-цию $\varphi(y)$. Затѣмъ будемъ
искать, что некая ор-ция будетъ: $u = \int M dx + \int (X - \frac{d}{dy} \int M dx) dy$
Теперь ор-ция u известна и наше ур-е можно написать въ ви-
дѣ: $du = 0$. Это $\int$ -е будетъ $u = C$, т.е. $\int M dx + \int (X - \frac{d}{dy} \int M dx) dy = C$
Это есть общій $\int$ -е полного дифференціального ур-я.

Объ интегральномъ факторѣ.

Если данное d -ное ур-е $M dx + X dy = 0$ не есть полное диф-
ференціальное, такъ что $\frac{dM}{dy} \neq \frac{dX}{dx}$, то тогда по мысли Эй-
лера можно искать такой множитель v , который, будучи
введенъ въ данное d -ое ур-е, обратитъ въ его полное d -ное
такъ чтобы новое ур-е $v M dx + v X dy = 0$ было бы полнымъ
 d -нымъ ур-емъ. Этотъ множитель будетъ вводить ор-цию
 x и y . Онъ называется интегральнымъ факторомъ и можно
доказать, что такой факторъ для данного ур-я всегда
существуетъ. Докажемъ, что интегральный факторъ су-
ществуетъ для всякаго данного дифференціального ур-я
Пусть данное d -ое ур-е есть: $M dx + X dy = 0$. Оно имеетъ
общій $\int$ -е. Решивъ этотъ $\int$ -е относительно произвольнаго по-
стояннаго, M представимъ его въ видѣ $f(x, y) = C$. Дифференци-
руя, находимъ $\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \frac{dy}{dx} = 0$ и отсюда: $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dx}}$, а изъ данного
 d -ного ур-я имеемъ $\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{X}$. Эти два выраженія должны
именировать диф. ур-е

б. тогда действительны, то есть дрелью $\delta. \frac{df}{dx} = \frac{f_H}{x}$ или $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$

Это отношение не равно $\delta. = 1$, потому что тогда имели бы $\frac{df}{dx} = f_H$ и $\frac{df}{dy} = f$, т.е. данное ур-е было бы полным δ -ным, следовательно это отношение будет вводить ф-цию некого-то x и y . Пусть эта ф-ция будет v , где $v = \phi(x, y)$; тогда $\frac{df}{dx} = v f_H$; $\frac{df}{dy} = v f$. Умножив 1^е равенство на dx , второе - на dy и сложив, получим: $\frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy = f_H \cdot v \cdot dx + v \cdot f \cdot dy$. Взяв в 1^е часть это δ -ное, имеем $\frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy = df(x, y) = dv$, где $v = \phi(x, y)$, следовательно будем иметь $v f_H dx + v f dy = dv$, т.е. введение фактора v отделяет 1^е часть нашего ур-я полным δ -ным, следовательно интегральный фактор существует. Легко показать, что интегральный фактор существует не один, но это не безграничное множество. Действительно возьмем произвольно ф-цию $\phi(u)$ и умножим обе части последнего равенства на $\phi(u)$: $\phi(u) [f_H dx + f dy] = \phi(u) dv$ или $= \phi(u) \frac{dv}{du} + \phi(u) \frac{du}{dy} dy$. Но легко проверить, что во второй части этого произведения стоит полный δ -н. В самом деле, по цепному правилу δ -на дано $\delta. \frac{d}{dy} [\phi(u) \frac{du}{dx}] = \frac{d}{dx} [\phi(u) \frac{du}{dy}]$ или $\phi(u) \frac{d^2 u}{dx dy} + \phi'(u) \frac{du}{dy} \frac{du}{dx} = \phi(u) \frac{d^2 u}{dx dy} + \phi'(u) \frac{du}{dx} \frac{du}{dy}$, а это тождество очевидно, следовательно выражение $\phi(u) (f_H dx + f dy)$ есть полный δ -н и следовательно произведение: $\phi(u)$ есть интегральный фактор для выражения $f_H dx + f dy$ и так как ф-ция ϕ произвольна, то факторов существует безграничное множество. Найти фактор для данного δ -го ур-я есть задача в общем виде нераз-

решимая. Посмотрим, к чему приводится эта задача.

Пусть фактор будет v и ур-е $vXdx + vYdy = 0$ есть полное d -ное; тогда должны иметь $\frac{d(vX)}{dy} = \frac{d(vY)}{dx}$ или: $v \frac{dX}{dy} + X \frac{dv}{dy} = v \frac{dY}{dx} + Y \frac{dv}{dx}$ из этого ур-я следует определить v ; но v есть ф-ция двух переменных x и y и в это ур-е входят кроме v частные производные $\frac{dv}{dx}$ и $\frac{dv}{dy}$. Чтобы определить v , надо интегрировать это ур-е с частными производными. Это задача большей трудности, чем $\int$ -е дано d -но ур-я; много же способа для определения не существует. Таким образом указание на интегр. фактор имеет преимущественно только теоретическое значение.

Дифференциальныя ур-я 1^{го} порядка, но высших степеней

Несколько отвлеченно ур-ями весьма много таких, которые можно $\int$. интегрированы. Укажем на некоторые таковыя случаи

1) Дифференциальное ур-е содержит только $\frac{dy}{dx}$, но не содержит ни x , ни y . Тогда полагая, что это ур-е алгебраическое и $n^{\text{я}}$ степени, оно будет иметь вид:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + A_1 \left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + A_2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + \dots + A_n = 0 \text{ где коэффициенты } A_1, A_2, \dots, A_n$$

суть числа постоянныя. Полагая, что это ур-е имеет n различных корней $a_1, a_2, \dots, a_n$, которые суть постоянныя числа.

Разложив первую часть на множители, будем иметь $\left(\frac{dy}{dx} - a_1\right) \left(\frac{dy}{dx} - a_2\right) \dots \left(\frac{dy}{dx} - a_n\right) = 0$. Удовлетворить этому ур-ю можно, полагая отдельно каждую из множителей равной 0, т.е.

$\frac{dy}{dx} - a_1 = 0; \frac{dy}{dx} - a_2 = 0, \dots, \frac{dy}{dx} - a_n = 0$ или $\frac{dy}{dx} = a_1, \dots, \frac{dy}{dx} = a_n$, $dy = a_1 dx, \dots, dy = a_n dx$
 и мы имеем n дифференциальных ур-ий 1^й степени. Их $\int$ -во будут: $y = a_1 x + c_1, y = a_2 x + c_2, \dots, y = a_n x + c_n$ или $y - a_1 x - c_1 = 0, y - a_2 x - c_2 = 0, \dots, y - a_n x - c_n = 0$, где $c_1, c_2, \dots, c_n$ а^н произвольные постоянные. Можно все эти ур-ия соединить в одно, взяв их произведение, получится $(y - a_1 x - c_1)(y - a_2 x - c_2) \dots (y - a_n x - c_n) = 0$, потому $\therefore$ это ур-ие опять разлагается на предшлющие n ур-ий. Наконец заметим, что, не увеличив общности решения, можно в последнем ур-ии полагать произвольные постоянные равными и обозначить все их ^н одной буквою, т.е. $c_1 = c_2 = \dots = c_n = c$ и написать $(y - a_1 x - c)(y - a_2 x - c) \dots (y - a_n x - c) = 0$ т.е. это ур-ие разлагается на n определенных ур-ий, именно $y - a_1 x - c = 0, y - a_2 x - c = 0, \dots, y - a_n x - c = 0$, из которых каждое отдельно будет $\int$ -ом данного ур-ия; и так как эти ур-ия разлагаются отдельно, то в каждом из них произвольное постоянное может принимать всевозможные значения и следовательно общность решения не увеличится, если эти постоянные будут обозначены разными буквами. Общ^н $\int$ -е ур-ие можно представить в андуицие вид^е, разделив его на $x^n = x \cdot x \cdot \dots \cdot x$ (n раз): $(\frac{y-c}{x} - a_1)(\frac{y-c}{x} - a_2) \dots (\frac{y-c}{x} - a_n) = 0$ увидим, что общ^н $\int$ -е получается из данного д-го ур-ия x -резо делени^е в к-е $\frac{dy}{dx}$ через $\frac{y-c}{x}$. Выводя отсюда общ^н $\int$ -е можно написать прямо в андуицие вид^е:

$$(\frac{y-c}{x})^n + A_1 (\frac{y-c}{x})^{n-1} + A_2 (\frac{y-c}{x})^{n-2} + \dots + A_n = 0$$

2) Дифференциальное ур-е содержит только $\frac{dy}{dx}$ и x , но не содержит y . Пусть это ур-е будет $F(x, \frac{dy}{dx}) = 0$, тогда, если отсюда можно вывести $\frac{dy}{dx}$, то положим $\frac{dy}{dx} = f(x)$ и затем $y = \int f(x) dx + c$. Если же из ур-я нельзя вывести $\frac{dy}{dx}$, то можно решить относительно x , т.е. положим $x = f(\frac{dy}{dx})$; пусть $\frac{dy}{dx} = p$, тогда будем иметь $x = f(p)$ дифференцировав это ур-е, найдем: $dx = f'(p) dp$, но $dx = \frac{dy}{p}$ и следовательно $\frac{dy}{p} = f'(p) dp$, отсюда $dy = p f'(p) dp$ и, интегрируя, имеем $y = c + \int p f'(p) dp$. Выполним квадратуру, положим: $y = \varphi(p, c)$ присоединив к этому ур-ю данное д-ное, т.е. $F(x, p) = 0$, заменив некие из них p , тогда получим ур-е $\varphi(x, y, c) = 0$ это будет общий ф-т, тк к-е это есть зависимость между x, y и c

3) Дифференциальное ур-е содержит y и $\frac{dy}{dx}$, но не содержит x . Пусть это ур-е: $F(y, \frac{dy}{dx}) = 0$ и положим опять $\frac{dy}{dx} = p$, тогда $F(y, p) = 0$. Если это ур-е можно решить относительно p , то из него выведем $p = \frac{dy}{dx} = f(y)$; $dx = \frac{dy}{f(y)}$. Интегрируя, получим: $x = \int \frac{dy}{f(y)} + c$. Выполним квадратуру, будем иметь общий ф-т. Если же данное ур-е нельзя решить относительно p , то положим из него $y = f(p)$; д-я, найдем $dy = f'(p) dp$. Но $dy = p dx$, $p dx = f'(p) dp$; $dx = \frac{f'(p)}{p} dp$. Интегрируя, получим $x = \int \frac{f'(p)}{p} dp + c$. Выполним квадратуру, получим $x = \varphi(p, c)$ Присоединив к этому ур-ю данное: $F(y, p) = 0$ и из этого двух ур-й исключим p , получим $\varphi(x, y, c) = 0$. Это будет

общий $\int$ -е, ибо это зависимость между x, y и C .

4) Дифференциальное ур-е содержит $\frac{dy}{dx}$, x и y , но x и y входят только в первых степенях

Такое ур-е приводится к виду, решаемому относительно

y : $y = x f(p) + \varphi(p)$, где f и φ произвольные ф-ции d -ря, получим:

$dy = x f'(p) dp + f(p) dx + \varphi'(p) dp$. Но опять $dy = p dx$, вставляя и пе-

реходим к виду получим: $[p - f(p)] dx - x f'(p) dp = \varphi'(p) dp$ или

$$\frac{dx}{dp} - \frac{f(p)}{p - f(p)} x = \frac{\varphi'(p)}{p - f(p)}$$

Это есть d -ное ур-е между переменными x и p . Если рассматривать x как ф-цию p , то это ур-е относительно x будет линейное 1^{го} порядка и следовательно все-

гда можно найти его общий $\int$ -е; помножив, что этот $\int$ -е будет

$\varphi(x, p, C) = 0$. Присоединив к нему данное d -ное ур-е т.е.

$y = x f(p) + \varphi(p)$ и имея этих двух ур-ий исключив p , получим

ур-е $\varphi(x, y, C) = 0$. Это будет общий интеграл.

Рассмотрим частный случай, когда $f(p) = p$ и имеем ур-е

$$y = px + \varphi(p). \text{ Это ур-е называется уравнением Клеро.}$$

Предвизиное высказание не применяется к нему непосредствен-

но, потому что y нас в знаменателе входит равность

$f(p) - p$, которая теперь $= 0$. Но ур-е Клеро интегрируется всега-

ки только для произвольн. d -ря φ , получим: $dy = p dx + x dp + \varphi'(p) dp$

или $dx = p dx$, т.е. $dy = p dx$. Сократив на $p dx$, будем иметь

$$[x + \varphi'(p)] dp = 0$$

Удовлетворить этому равенству можно дво-

ако или 1) положить $dp = 0$, тогда будем иметь $p = c$ произ-

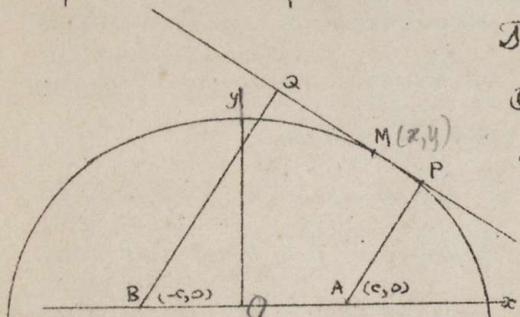
вообще постоянному, следовательно $y = cx + \varphi(c)$. Это будет общий $\int$ -е, но также можно удовлетворить 2) полагая, $\alpha + \varphi'(p) = 0$, откуда выведем $p = \theta(x)$ (арbitrary) и, вставив, получим $y = \alpha \cdot \theta(x) + \varphi\{\theta(x)\}$. Это есть такое решение данного д-го ур-я но это решение представляет замечательную особенность. Именно ур-е это не содержит произвольного постоянного c и оно не есть частный $\int$ -е, ибо его нельзя получить из обш-го $\int$ -а, приписывая c какое либо частное значение.

Такого рода решение, которое не содержит произвольного постоянного и не есть частный $\int$ -е, называется особым решением д-го ур-я и мы здесь встречаем первый пример такого решения. Это особое решение имеет особое геометрическое значение. Именно можно доказать, что оно представляет огибающую линии семейства линий, составляющих интегралы.

Фактически, возьмем общий $\int$ -е $y = cx + \varphi(c)$. Это ур-е представляет бесчисленное множество прямых линий. Рассматривая c , как переменный параметр, будем искать огибающую этих прямых. По правилу, д-ря. это ур-е не параметр c , получим $0 = \alpha + \varphi'(c)$. Ватом для получения ур-я огибающей надо исключить c . Чтобы сделать это, введем c из второго ур-я. Это ур-е одинаково с ур-ем $0 = \alpha + \varphi'(c)$ только вместо p стоит c . Следовательно, введя c , получим $c = \theta(x)$, вставив в первое ур-е, найдем ур-е огибающей.

$y = x \cdot \theta(x) + \varphi[\theta(x)]$. А это есть особое решение.

Задача. Найти кривую лимито, обладающую такими свойствами, что произведение двух перпендикуляров, опущенных из двух постоянных точек А и В на произвольную касательную к этой кривой было бы постоянно и равнялось бы b^2 .



Положим $AB = 2c$. Возьмем начало

O на середине AB: $OA = OB = c$. Линия OA - ось $x^{ов}$ и $\perp OY$ за ось $y^{ов}$.

Пусть M произвольная точка с координатами (x, y) . Проведем

касательную. Опустим два $\perp AP$ и BQ . Должны быть $AP \cdot BQ = b^2$

Возникнет ур-е касательной: $y - y_0 = p(x - x_0)$

Формулы расстояние от точки A $(c, 0)$ до этой прямой будет

$y - y_0 - p(x - x_0) = 0$, $AP = \frac{|y - p \cdot c - x_0|}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{|y - p \cdot c + p \cdot c|}{\sqrt{1 + p^2}}$. По той же формуле

расстояние от точки B $(-c, 0)$: $BQ = \frac{|y - p \cdot (-c) - x_0|}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{|y - p \cdot c + p \cdot c|}{\sqrt{1 + p^2}}$. Возм.

как произведение $AP \cdot BQ = \frac{(y - p \cdot c)^2 - p^2 c^2}{1 + p^2} = b^2$. Это есть д-ное ур-е.

задачи, из него получим: $y = p \cdot c + \sqrt{b^2(1 + p^2) + p^2 c^2}$ или $y = p \cdot c + \sqrt{b^2 + (b^2 + c^2)p^2}$

Положим, что $b^2 + c^2 = a^2$, имеем $y = p \cdot c + \sqrt{b^2 + a^2 p^2}$. Это есть ур-е

Клеро. д-уем по x $dy = p dx = p dx + x dp + \frac{a^2 p \cdot dp}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}} = [x + \frac{a^2 p^2}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}}] dp = 0$

Если положим $dp = 0$, то $p = c$ и получим интегр $y = c x + \sqrt{b^2 + a^2 c^2}$

Это есть общий интегр. А если положим $x + \frac{a^2 p^2}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}} = 0$, то выйдем

$x + \frac{a^2 p^2}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}} = 0$, $b^2 x^2 + a^2 p^2 x^2 = a^4 p^2$, $p^2 [a^4 - a^2 x^2] = b^2 x^2$, $p^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2(a^2 - x^2)}$, $p = \pm \frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$

Соответственно беремому при $x > 0$, имеем $p < 0$, поэтому при-

меем $p = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$. Подставив, получим особое решение:

$$y = -\frac{bx^2}{a\sqrt{a^2-x^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{b^2 x^2}{a^2-x^2}}; y = -\frac{bx^2+a^2b}{a\sqrt{a^2-x^2}} = +\frac{b(a^2-x^2)}{a\sqrt{a^2-x^2}}; y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

Это ур-е представляет эллипс, у которого А и В суть фокусы. Следовательно искомая кривая, обладающая требуемыми свойствами есть эллипс. На этом примере можно видеть, что иногда особое решение представлять большую важность, нежели общий интеграл.

О дифференциальных уравнениях высших порядков

Общий вид д-го ур-я $n^{\text{го}}$ порядка: $F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0$
 Прежде всего докажем, что такое ур-е всегда имеет общий интеграл. Решив его относительно высшей производной, получим $\frac{d^ny}{dx^n} = f(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}})$. Таким образом здесь производная $n^{\text{го}}$ порядка выражена в ф-ции из y и первых $(n-1)$ производных y по x . Легко показать, что и все производные высших порядков могут б. найдены в ф-ции тех же координат. Действительно, дифференцировав эти равенства по x , мы получим $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$ в ф-ции $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$. Но во второй части величины производной $\frac{d^ny}{dx^n}$ можно будет вставить выражение из предыдущего равенства и тогда: $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = f_1(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}})$. Таким же если это равенство вновь одифференцируем по x и опять во второй части величины $\frac{d^ny}{dx^n}$ поставим его выражение по первому равенству, то найдем $\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}} = f_2(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}})$ и т. д. для всех производных высших порядков найдем подробные выражения. Заканчивая это, обратимся к доказательству существования интеграла дифф. ур-я.

существования f -а. Если этот f -е существует и есть $y = f(x)$, то как всякая ф-ция x , она может б. представлена рядом Тейлора. Возьмем для x какое нибудь произвольное значение x_0 , мы можем этот ряд, как видели раньше, написать так:

$$f(x) = f[x_0 + (x-x_0)] = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{1.2} + f'''(x_0)\frac{(x-x_0)^3}{1.2.3} + \dots$$

и можно принять, что мы x_0 выбрали так, чтобы коэффициенты (все) $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, все имелись величинами конечными, тогда этот ряд будет непрерывно существовать и будет сходиться, по крайней мере, при значениях x весьма близких к x_0 . Предположив в этой формуле $f(x) = y$, попробуем по ней сообразить наши интегралы. Здесь, во первую, мы уже будем знать $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, т. е. значения y и его производные при $x = x_0$.

Для определения этих значений мы имеем данные одно n -ное ур-е. Но из этого ур-я можно видеть, что посредственно него нельзя найти, чему равны y и его $(n-1)$ первых производных при $x = x_0$, а можно только определить производную n -го порядка посредственно x, y и $(n-1)$ первых производных. Следовательно, значения y и производных: $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ при $x = x_0$ могут б. назначены совершенно произвольно и мы можем, что

при $x = x_0$, будем иметь $y = y_0 = b$, $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = b'$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = b''$

$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_0 = b^{(n-1)}$, т. е. значения y и его $(n-1)$ производных при $x = x_0$.

Когда эти коэффициенты назначены, тогда все производные высших порядков при $x = x_0$ будут уже вполне определены. Именно будем иметь: $\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)_0 = f(x_0, b, b', b'', \dots, b^{(n-1)})$, $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = f(x_0, b, b', b'', \dots, b^{(n-1)})$,

$\frac{d^2 y}{dx^{n+2}} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ и т. д. и тогда наш ряд можно будет на-
писать в виде составл. Он будет иметь следующий вид:

$$y = b + b'(x-x_0) + \frac{b''(x-x_0)^2}{1.2} + \dots + \frac{b^{(n-1)}(x-x_0)^{n-1}}{1.2 \dots n-1} + f(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \frac{(x-x_0)^n}{1.2 \dots n} + f(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \frac{(x-x_0)^{n+1}}{1.2 \dots n+1} + \dots$$

Ныш пошлмъ безконечный рядъ. во второй части его входят n
совершенно произвольныхъ постоянныхъ количествъ $b, b', b'', \dots, b^{(n-1)}$ и легко
показать, что этотъ рядъ действительно удовлетворяетъ данному
д-мому ур-ю. Въ самомъ дѣлѣ, одифференцируемъ это ур-е n разъ по рядъ,
получимъ: $\frac{d^n y}{dx^n} = f(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) + f'(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) (x-x_0) + f''(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \frac{(x-x_0)^2}{1.2} + \dots$

Разсматривая вторую часть, мы замѣтимъ, что она representa-
етъ нѣчто иное, какъ разложение ф-ции $f(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}})$ по степенямъ $(x-x_0)$
и въ рядъ, расположенный

удовлетворяю вторую часть можно замѣнить этою ф-цією и на-
ше ур-е будетъ: $\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}})$, т. е. посылъ n д-мъ на-
шего ряда, мы получимъ данное д-мое ур-е.

Следоват. этотъ рядъ удовлетворяетъ данному д-мому ур-ю и представляетъ его раз-
лжнй $\{x\}$. И такимъ образомъ мы доказали, что общій интегралъ
дифференциальнаго ур-я n порядка всегда существуетъ.

Интегралъ этого ур-я дѣлается представл. такою зависи-
мостью между x и y , при которой для одного значенія $x = x_0$ мо-
жно было бы для y и для его $(n-1)$ первыхъ производныхъ назна-
чить совершенно произвольныя величины. Тогда удовлетворитъ
такому требованію, необходимо, чтобы въ ур-и, связывающіе
 x съ y , кроме x и y входили бы n произвольныхъ величинъ или
 n произвольныхъ постоянныхъ, величинами которыхъ мы мо-
жемъ

и δ так расположить, для того, чтобы удовлетворить функции предположению. Предположим, что, это общий $\int$ -е имеет вид: $\mathcal{F}(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0 \dots (I)$ где $c_1, c_2, \dots, c_n$ суть произвольные постоянные. Тогда это $\mathcal{F}$ -е через d -ие должно приводить к данному d -ому $\mathcal{F}$ -у. Одиформе-из это $\mathcal{F}$ -е n раз поградь. Если поместим еще n $\mathcal{F}$ -у. Тогда 1^о d -ия: $\mathcal{F}_1(x, y, \frac{dy}{dx}, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$, пусть 2^о $\mathcal{F}_2(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$ $\mathcal{F}_{n-1}(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$ и n -е d -ие даст наконец $\mathcal{F}_n(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \frac{d^n y}{dx^n}, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$. Всего будет иметь $n+1$ $\mathcal{F}$ -у. Из них сколько можно исключить n произвольных пограничных: $c_1, c_2, \dots, c_n$ и тогда поместим одно $\mathcal{F}$ -е, в которое войдут: $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}$. Это $\mathcal{F}$ -е и должно δ одинаково с данными d -ыми $\mathcal{F}$ -ями, так что, если посредством d -ия исключить n произвольных постоянных из $\mathcal{F}$ -ия (I), то поместим данное d -ное, то это и значит, что $\mathcal{F}$ -е (I) есть общий $\int$ -е. Какое исключение произвольных пограничных можно представить себе n $\mathcal{F}$ -ями. Если возведем скажем n первых $\mathcal{F}$ -у, т.е. $\mathcal{F}_1 = 0, \mathcal{F}_2 = 0, \mathcal{F}_3 = 0, \dots, \mathcal{F}_{n-1} = 0$ и эти $\mathcal{F}$ -ия решим относительно произвольных постоянных. Выходя найденные уже выражения постоянных вставим в последнее $\mathcal{F}$ -е, т.е. в $\mathcal{F}_n = 0$. Тогда оно должно поместить данное d -ное $\mathcal{F}$ -е. При этом предположении, чтобы решения, найденная для произвольных постоянных: $c_1, c_2, \dots, c_n$ были бы конечны, т.е. чтобы первые n $\mathcal{F}$ -у относительно произв. пограничных были бы совместны. Если же эти $\mathcal{F}$ -ия окажутся несовместными, то их нельзя будет решить и $\mathcal{F}$ -е (I) не будет общим.

интегралом. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ окажется, что кривая, будетъ касаться при $x = x_0$ совершенно произвольныхъ касательныхъ для y и для ея $(n-1)$ производныхъ. Кривая потому, что постоянная при этомъ принимаетъ безконечныя значенія и значеніе ур-я (1) не будетъ общимъ $\int$ -омъ. Изъ д-ныхъ ур-й наиболѣе важныя являются ур-я линейныя.

Линейныя дифференціальныя уравненія вы- шихъ порядковъ

Такъ называется ур-е, въ которомъ ф-ція y и все ея производныя входятъ только въ первыхъ степеняхъ. Общій видъ линейнаго ур-я n порядка: $\frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + X_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + X_n y = X$ (1) где коэффициенты $X_1, X_2, \dots, X_n$ и вторая часть X суть ф-ціи одного x . Если докажемъ, что интегрированіе такого ур-я со второго члена приводится къ интегрированію ур-я съ такою же первой частью, но у котораго вторая часть будетъ нулемъ, т. е. къ интегралу такого $\frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + X_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + X_n y = 0$ (2) Поэтому будемъ разсматривать предварительно ур-е (2), т. е. линейное ур-е безъ 2-й части. Покажемъ во первыхъ, что если для ур-я (2) найдено n частныхъ рѣшеній, то будетъ известна и общій интегралъ (2) ур-я. Въ самомъ дѣлѣ пусть $y_1, y_2, \dots, y_n$ суть частныя рѣшенія ур-я (2), т. е. ф-ціи x , не содержащія произвольныхъ постоянныхъ и удовлетворяющія ур-ю (2). Въ этомъ случаѣ говоримъ, что можно удовлетворить ур-ю (2), такими только, $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$, где $C_1, C_2, \dots, C_n$ будутъ произвольныя постоянныя

Эквивалентно вставить выражение это вкнесто y в ур-е (2), тогда в:

$$1^{\text{я}} \text{ часть полинома: } \frac{d^n (C_1 y_1 + \dots + C_n y_n)}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} (C_1 y_1 + \dots + C_n y_n)}{dx^{n-1}} + \dots + X_n (C_1 y_1 + \dots + C_n y_n) =$$

$$= C_1 \left(\frac{d^n y_1}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \dots + X_n y_1 \right) + \dots + C_n \left(\frac{d^n y_n}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} + \dots + X_n y_n \right) = 0.$$

Но так как $y_1, y_2, \dots, y_n$, заданы вставлены в 1^ю часть ур-я (2), образуют его в кнесто, то в последнем выражении каждая из скобок представляет нуль, и все выражение будет $= 0$. Таким образом мы видим, что ф-ция $y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$ действительно удовлетворяет ур-ю (2). При этом, так как эта ф-ция содержит n произвольных постоянных $C_1, \dots, C_n$, то, следовательно, она есть общий $\int$ -е. На этом предположении основано $\int$ -ние д-ных ур-ий. Рассмотрим сначала:

Линейная дифференциальная ур-я с постоянными коэффициентами и без в-рой части.

$$\text{Пусть дано: } \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + A_n y = 0 \dots (2')$$

Поскольку, что в кнесто коэффициенты $A_1, A_2, \dots$ суть постоянная числа. Тогда найти общий $\int$ -е, можно найти для него n частных решений. Допустим удовлетворит этому ур-ю, полагая $y = e^{\lambda x}$, где λ - некоторый постоянный коэффициент. Вставим это вы-

$$\text{ражение в 1^ю часть и заметим, что будет иметь: } \frac{dy}{dx} = \frac{d(e^{\lambda x})}{dx} = \lambda e^{\lambda x}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 (e^{\lambda x})}{dx^2} = \lambda^2 e^{\lambda x}, \dots \text{поэтому в 1^ю части: } \frac{d^n e^{\lambda x}}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} e^{\lambda x}}{dx^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-2} e^{\lambda x}}{dx^{n-2}} + \dots + A_n e^{\lambda x} =$$

$$= e^{\lambda x} (\lambda^n + A_1 \lambda^{n-1} + A_2 \lambda^{n-2} + \dots + A_n) = 0 \text{ коротко } (A) = e^{\lambda x} f(\lambda), \text{ где } f(\lambda) = \lambda^n + A_1 \lambda^{n-1} + A_2 \lambda^{n-2} + \dots + A_n$$

т.е. $f(\lambda)$ будет некоторая ф-ция n -й степени. Рассмотрим (A) представляет тождество, удовлетворяющее при всяком значении λ

Но если мы возьмем для λ такую величину, при которой $f(\lambda)$ обратится в 0, то вторая часть равенства (а) будет = 0 и тогда выражение $y = e^{\lambda x}$ удовлетворит уравн (2'). Но поскольку $f(\lambda) = \lambda^n + A_1 \lambda^{n-1} + A_2 \lambda^{n-2} + \dots + A_n = 0$, мы получим уравн n° степени, имеющее n корней. Следовательно, что все эти корни равны и тогда они будут: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. тогда каждый из этих корней даст одно частное решение уравн (2') и всего получим n линейно независимых решений: $y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, y_3 = e^{\lambda_3 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}$ и по предыдущей теореме будет иметь общий $\int$ уравн (2') в алгебраическом виде: $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$, где $C_1, C_2, \dots, C_n$ произвольные постоянные. Таким образом мы видим, что для получения общего $\int$ уравн (2') нужно только предварительно решить уравн $f(\lambda) = 0$.

Примеры. Дано уравн $\frac{d^2 y}{dx^2} - k^2 y = 0$. В этом случае $f(\lambda) = \lambda^2 - k^2$. Решим уравн $\lambda^2 - k^2 = 0$, находим $\lambda = \pm k$, т. е. $\lambda_1 = +k$ и $\lambda_2 = -k$. Поэтому общий $\int$ будет: $y = C_1 e^{+kx} + C_2 e^{-kx}$.

Если между корнями уравн есть корни мнимые, то если только все n корней равны, то все такая формула дает общий $\int$, но формула эта будет неудобна в том отношении, что она будет описана мнимыми выражениями.

В этом случае общий $\int$ можно будет представить в ином виде, при чем в нем не будет входить мнимых выражений.

Известно, что мнимые корни всегда бывают сопряженными парами. Пусть λ_1 и λ_2 есть пара мнимых сопряженных корней, $\lambda_1 = \alpha + \beta \sqrt{-1}$
 $\lambda_2 = \alpha - \beta \sqrt{-1}$ Эти два корня соответствуют циклам

двух значений: $C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$; которая равна $C_1 e^{\alpha x + \beta x \sqrt{-1}} + C_2 e^{\alpha x - \beta x \sqrt{-1}} = e^{\alpha x} (C_1 e^{\beta x \sqrt{-1}} + C_2 e^{-\beta x \sqrt{-1}}) =$
 $=$ по формуле Бернулли $= e^{\alpha x} [C_1 (\cos \beta x + \sqrt{-1} \sin \beta x) + C_2 (\cos \beta x - \sqrt{-1} \sin \beta x)] =$
 $= e^{\alpha x} [(C_1 + C_2) \cos \beta x + \sqrt{-1} (C_1 - C_2) \sin \beta x]$. Вместо произвольных постоян-

ных введем новые произвольные постоянные; именно, положим:
 $C_1 + C_2 = C'$ и $\sqrt{-1} (C_1 - C_2) = C''$, где C' и C'' будут такие некоторые по-
 стоянные, совершенно произвольные, действительные или мнимые.

Тогда получим: $C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = e^{\alpha x} [C' \cos \beta x + C'' \sin \beta x]$. В этом
 выражении уже не выходит мнимости явных образом и об-
 щий $\int$ -е будет: $y = e^{\alpha x} (C' \cos \beta x + C'' \sin \beta x) + C_3 e^{\lambda_3 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$

Это будет общий $\int$ -е с n произвольными постоянными.

Каждой паре мнимых сопряженных корней в общем $\int$ -е бу-
 дет соответствовать по отдельности тригонометрич. выражение

Примеры. $\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0$, здесь $f(\lambda) = \lambda^2 + k^2$, решим $\lambda^2 + k^2 = 0$.
 $\lambda = \pm k \sqrt{-1}$, здесь $\lambda_1 = +k \sqrt{-1}$, $\lambda_2 = -k \sqrt{-1}$, т. е. здесь $\alpha = 0$ и $\beta = k$. Общий $\int$ -е будет:

$$y = C' \cos kx + C'' \sin kx.$$

Ур-е $f(\lambda) = 0$ называется характеристическим ур-ем для данно-
 го линейного ур-я с постоянными коэффициентами. Если ха-

рактеристическое ур-е имеет равные корни, тогда введенная
 формула не дает общего интеграла. Пусть если положим, что

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, тогда наша формула будет: $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\lambda_3 x} + C_4 e^{\lambda_4 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$,
 или $y = (C_1 + C_2 + C_3) e^{\lambda_1 x} + C_4 e^{\lambda_4 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$, при этом можно поло-

жить $C_1 + C_2 + C_3 = C_0$ и $y = C_0 e^{\lambda_1 x} + C_4 e^{\lambda_4 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$. Это ур-е будет
 содержать уже не n произвольных постоянных, а $n-2$ произ-
 вольных постоянных: $C_0, C_4, \dots, C_n$. Следовательно оно не будет

давать общало $f-a$.

Во всяком равных корней общий f -е выражается другой
 формулой. Тогда пошлать эту формулу, вернее же к выведен-
 ному, тождеству; мы видим, что пошлать $y = e^{\lambda x}$, где λ - не-
 определенное постоянное и, вставив это выражение во ур-е (2),
 мы пошлать: $\frac{d^n (e^{\lambda x})}{dx^n} + H_1 \frac{d^{n-1} e^{\lambda x}}{dx^{n-1}} + H_2 \frac{d^{n-2} e^{\lambda x}}{dx^{n-2}} + \dots + H_n e^{\lambda x} = e^{\lambda x} f(\lambda)$ (произво-
 дя дифференцие). Это ур-е есть тождество, существующее при
 всяком значении λ . Из этого тождества мы выведем много
 новых тождеств, для чего от общего частного будем брать
 производные по λ и заметим, что d -ние по λ во 1-е частной кофе-
 но производит равные d -ния по x , пошлать: $\frac{d}{dx} x e^{\lambda x} + H_1 \frac{d}{dx} x e^{\lambda x} + \dots + H_n x e^{\lambda x} = e^{\lambda x} [x f(\lambda) + f'(\lambda)]$ и т.д. (по λ пошлать знакомое d -ие мы d -ие) =
 $= e^{\lambda x} [x f(\lambda) + f'(\lambda)] \dots (a)'$. Дифференцие еще раз пошлать знакомое d -ие:
 $\frac{d^2}{dx^2} x e^{\lambda x} + H_1 \frac{d}{dx} x^2 e^{\lambda x} + \dots + H_n x^2 e^{\lambda x} = e^{\lambda x} [x^2 f(\lambda) + 2x f'(\lambda) + f''(\lambda)]$ и т.д.
 Рассматривая эти тождества, пошлать $\lambda = \lambda$, есть двойной корень
 ур-я $f(\lambda) = 0$. Тогда, как известно, будем иметь не только $f(\lambda) = 0$,
 но и $f'(\lambda) = 0$ и, пошлать во тождества (a) и (a)' $\lambda = \lambda$, мы увидим, что
 вторые частные тоже обратятся в 0 и тогда из тождества (a)
 видно, что $e^{\lambda x}$ удовлетворяет ур-ю (2). А из тождества (a)' уви-
 дим, что ур-ю (2)' удовлетворяет сверх того выражение $x e^{\lambda x}$. На-
 конец образом двойному корню λ , будем соответствовать два
 частных решения: $y_1 = e^{\lambda x}$, $y_2 = x e^{\lambda x}$. Теперь, если пошлать, что $\lambda = \lambda$, есть
 корень тройной, то тогда будем иметь не только $f(\lambda) = 0$, но
 и $f'(\lambda) = 0$ и $f''(\lambda) = 0$. Во этом случае кроме указанных выше
 интегрирование d -ие ур-я

часть частных решений, увидим, по тождеству (2)", что вто-
 рая часть этого тождества при $\lambda = \lambda$, тоже обратится в 0. А
 из первой части следует, что в этом случае $x^2 e^{\lambda_1 x}$ будет
 также удовлетворять уравн. (2)'. Таким образом, если корень λ ,
 есть тройной, то ему будут соответствовать 3 частных реше-
 ния, именно: $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = x e^{\lambda_1 x}$, $y_3 = x^2 e^{\lambda_1 x}$. Продолжая эти рассуждения далее,
 заключаем вообще, что если $\lambda = \lambda$, есть кратный корень степени p ,
 то ему будут соответствовать p частных решений, именно:
 $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = x e^{\lambda_1 x}$, ..., $y_p = x^{p-1} e^{\lambda_1 x}$. Так. обр. в случае кратных равных
 корней, каждому кратному корню соответствует столько
 частных решений, сколько единиц имеет степень его
 кратности. В случае кратного корня степени p , поставим
 общий f -е в таком виде: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_p y_p + C_{p+1} y_{p+1} + \dots + C_n y_n$ или
 $y = [C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_p x^{p-1}] e^{\lambda_1 x} + C_{p+1} x^p e^{\lambda_{p+1} x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$. Эта формула про-
 сто представит f -е в том случае, когда кратные корни двой-
 ственны. Если имеются мнимые кратные корни, то фор-
 мулу эту преобразовывают в другую, в которую мнимости
 явные образом вводить не будет. Помогает, что имеем 2
 мнимых корня: $\lambda_1 = \alpha + \beta \sqrt{-1}$ и $\lambda_2 = \alpha - \beta \sqrt{-1}$ и что эти корни крат-
 ны степени p . Тогда, по доказанному в общем f -е корни f -е
 будут соответствовать следующие члены:
 $(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_p x^{p-1}) e^{(\alpha + \beta \sqrt{-1})x} + (C'_1 + C'_2 x + \dots + C'_p x^{p-1}) e^{(\alpha - \beta \sqrt{-1})x} = e^{\alpha x} [(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots) (\cos \beta x + \sqrt{-1} \sin \beta x) + (C'_1 + C'_2 x + C'_3 x^2 + \dots) (\cos \beta x - \sqrt{-1} \sin \beta x)] = e^{\alpha x} \{ [(C_1 + C'_1) + (C_2 + C'_2) x + (C_3 + C'_3) x^2 + \dots] \cos \beta x + \sqrt{-1} [(C_1 - C'_1) + (C_2 - C'_2) x + (C_3 - C'_3) x^2 + \dots] \sin \beta x \}$. Теперь

выберем $C_1, C_2, \dots$ и $C'_1, C'_2, \dots$ выберем новую произвольную постоянную, полагая $C_1 + C'_1 = A_1, C_2 + C'_2 = A_2, \dots$ и $\sqrt{-1}(C_1 - C'_1) = B_1, \sqrt{-1}(C_2 - C'_2) = B_2, \dots$ тогда совокупность тригонометрических, соответствующих нашим мнимым сопряженным кратным корням в общем $\int$ -е будет: $e^{i\alpha} [(A_1 + A_2 x + \dots + A_p x^{p-1}) \cos \beta x + (B_1 + B_2 x + \dots + B_p x^{p-1}) \sin \beta x]$ Пусть возьмем $2p$ произвольных постоянных. Каждой паре мнимых корней будет соответствовать совокупность тригонометрической $\int$ -а. Все это общее решение закончим: линейное уравнение с постоянными коэффициентами и без второй части всегда может быть интегрировано.

Линейные дифференциальные уравнения со второму частью

Будем опять рассуждать $\frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + X_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + X_n y = X_{n+1}$ (1) в которых коэффициенты $X_1, X_2, \dots$ и вторую часть будем считать вообще функциями x . Покажем теперь, что общий $\int$ -е этого уравнения можно получить, если предварительно найдем общий $\int$ -е линейного уравнения с той же самой частью, но у которого 2-я часть = 0, т.е. уравнение: $\frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + X_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + X_n y = 0$ (2). Далее будем предполагать, что для уравнения (2) мы имеем n частных решений $y_1, y_2, \dots, y_n$ и что все эти решения нам известны, тогда общий $\int$ -е уравнения (2) будет: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ (3), где $C_1, C_2, \dots, C_n$ суть произвольные постоянные. Для получения общего $\int$ -а уравнения (1) применим, так же называемый, способ изменения произвольных постоянных,

имеем называемый способом Лагранжа. Идея этого способа заключается в следующем. Функция Z удовлетворяет ур-ню (2), при тех множителях $C_1, C_2, \dots$ суть произвольные постоянные. Произведем удовлетворит ур-ню 1 того же самого функцией Z , как только, тогда в этой функции множителями $C_1, C_2, \dots$ считать уже не произвольными постоянными, но некоторые функции x и y функции x и функции y определены из условия, что функция Z удовлетворяет ур-ню 1. Но неизвестных функций в функции (Z) n , а условия для их определения одно. Одно условие даст нам одно ур-е с неизвестными $C_1, C_2, \dots$. Вследствие этого, кроме этого условия мы можем еще $(n-1)$ условий выбрать совершенно произвольно, так что найдем неизвестные функции x и функции y удовлетворяют сверх того $(n-1)$ ур-ий произвольных и тогда только будем иметь n условий ур-ий, достаточных для определения n неизвестных функций $C_1, C_2, \dots$. Тогда получим все условия ур-ия поступают так. Находим по известному производной, то функции Z получим: $\frac{dZ}{dx} = C_1 \frac{dy_1}{dx} + C_2 \frac{dy_2}{dx} + \dots + C_n \frac{dy_n}{dx} + y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} + \dots + y_n \frac{dC_n}{dx}$. Для упрощения этого выражения применим условие, что функции $C_1, C_2, \dots$ должны удовлетворять такому выражению: $y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} + \dots + y_n \frac{dC_n}{dx} = 0$ (1). Тогда будем иметь $\frac{dZ}{dx} = C_1 \frac{dy_1}{dx} + C_2 \frac{dy_2}{dx} + \dots + C_n \frac{dy_n}{dx}$ или напишем коротко эти равенства так: $y = \sum C_i y_i$, тогда $\frac{dy}{dx} = \sum C_i \frac{dy_i}{dx}$, давая, для еще раз, находим: $\frac{d^2 y}{dx^2} = \sum C_i \frac{d^2 y_i}{dx^2} + \sum \frac{dy_i}{dx} \frac{dC_i}{dx}$. Для упрощения введем еще новое условие, или применим, что $\sum \frac{dy_i}{dx} \frac{dC_i}{dx} = 0 \dots$ (2) 3 условие, тогда $\frac{d^2 y}{dx^2} = \sum C_i \frac{d^2 y_i}{dx^2}$. Далее, $d^3 y$ еще, найдем: $\frac{d^3 y}{dx^3} = \sum C_i \frac{d^3 y_i}{dx^3}$ и условие

$\sum \frac{dy_i}{dx} \cdot \frac{dC_i}{dx} = 0$ (3). Продолжая таким образом d -е слагаемое, получим $\frac{d^m y}{dx^{m+1}} = \sum C_i \frac{d^{m-1} y_i}{dx^{m-1}}$ и условие $\sum \frac{d^m y_i}{dx^{m-2}} \cdot \frac{dC_i}{dx} = 0$ $(n-1)$. Будет $(n-1)$ условий покажем мы не можем, потому что n^2 условий получается от вставки всех этих выражений в ур-е (1): $\frac{d^m y}{dx^m} = \sum C_i \frac{d^m y_i}{dx^m} + \sum \frac{d^{m-1} y_i}{dx^{m-1}} \cdot \frac{dC_i}{dx}$. Вставим выражения всех этих производных вставим в выражения (1), чтобы получить n^2 условий: $\sum C_i (\frac{d^m y_i}{dx^m} + \chi_1 \frac{d^{m-1} y_i}{dx^{m-1}} + \dots + \chi_{m-1} \frac{dy_i}{dx} + \chi_m y_i) + \sum \frac{d^{m-1} y_i}{dx^{m-1}} \cdot \frac{dC_i}{dx} = X$. Это ур-е упростится, потому что y_i удовлетворяет ур-ю (2). Благодаря этому количеству, слагаемое в скобках равно нулю. Поэтому n^2 условий будет следующее: $\sum \frac{d^{m-1} y_i}{dx^{m-1}} \cdot \frac{dC_i}{dx} = X$. (n) условий. Теперь для опрощения неизвестных функций $C_1, C_2, \dots, C_n$ мы можем всего n ур-ий. Разматривая эти ур-ия, мы увидим, что они содержат производные: $\frac{dC_1}{dx}, \frac{dC_2}{dx}, \dots, \frac{dC_n}{dx}$. Эти ур-ия входят в первую степень; коэффициенты при них суть известные функции x . Вторых частей равно нулю, а в последнем ур-ии $= X$. Эти n ур-ий 1-й степени всегда можно решить. Общим видом решения будет: $\frac{dC_i}{dx} = v_i$, где v_i будет известная функция x , откуда $dC_i = v_i dx$ и, интегрируя, получим: $C_i = C_i^0 + \int v_i dx$. Здесь C_i^0 может быть равно $1, 2, 3, \dots, n$ и мы получим таким образом $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$. Вставив все эти выражения в функцию (3) будем иметь: $y = (C^0 + \int v_1 dx) y_1 + (C^0 + \int v_2 dx) y_2 + \dots + (C^0 + \int v_n dx) y_n$. Эта формула есть общий интеграл ур-я (1). В ней $C^0, C_1^0, \dots$ суть произвольные постоянные. Этот способ всегда можно превратить к обыкновенному ур-ю с постоянными коэффициентами и с 2-й частью, т. е. к ур-ю:

$\frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + A_n y = X$, где коэффициенты $A_1, A_2, \dots$ суть частные коэффициенты, а X др-ца одного x , потому что это такое ур-е без второй части мы уже интегрировали.

В заключение отмечаем несколько замечаний о том, как иногда можно поискать общий $\int$ -е ур-я (1) если общий $\int$ -е ур-я (2) известен. Можно доказать, что если для ур-я (1) будет найдено одно частное решение, то его $\int$ -е приведет к $\int$ -ю ур-я 2-го

Следовательно, пусть это частное решение будет $y = z$. Тогда покажем, что общий $\int$ -е ур-я (1). $y = z + u$, где u - неизвестно.

Вставив это выражение в ур-е (1), получим: $\frac{d^n z}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \dots + X_n z + \frac{d^n u}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \dots + X_n u = X$, но так как z удовлетворяет ур-ю 1-му, то будем иметь $\frac{d^n z}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \dots + X_n z = X$, вследствие этого, сократив предыдущее ур-е получим: $\frac{d^n u}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \dots + X_n u = 0$

И это есть ур-е 2-е. Следовательно, есть общий $\int$ -е ур-я (2). Когда мы найдем u , то общий $\int$ -е ур-я 1-го будет $y = z + u$. Таким образом можно пользоваться в некоторых частных случаях.

1-й случай. Ищем линейное ур-е с постоянными коэффициентами во второй части которого есть целые др-цы X , именно $\frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + A_n y = ax^p + bx^{p-1} + cx^{p-2} + \dots + r$.

Чтобы найти частное решение этого ур-я можно предположить удовлетворит ему, полагая $y = \alpha x^p + \beta x^{p-1} + \gamma x^{p-2} + \dots$, где $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ суть неопределенные пока постоянные коэф-ты. Вставив это в ур-е и произведя д-ние, мы получим в первой части, как и во 2-й целую др-цу степени p , в которой коэффициентами

вводить неизвестные коэффициенты. В общем случае $p+1$ уравнений с $p+1$ неизвестными. Если же будут первой степени и из них можно будет найти все коэффициенты. Таким образом будет найдено частное решение, а затем полагая $y = u$ и обобщая $\int -x$.

Дано уравнение с постоянными коэффициентами, вторая часть которого содержит $\sin mx$ и $\cos mx$ в $1^{\text{ей}}$ степени. Это уравнение: $\frac{d^m y}{dx^m} + A_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + A_n y = a \cos mx + b \sin mx$. Попробуем удовлетворить этому уравнению полагая $y = \alpha \cos mx + \beta \sin mx$, где α и β неопределенные пока коэффициенты. Вставив это выражение в уравнение вместо y , и произведя d -ние, мы получим d -ние всегда будет полагать или $\cos mx$ или $\sin mx$ в $1^{\text{ей}}$ степени при этом коэффициенты α и β останутся такими же во всех степенях. Соединив члены с $\cos mx$ и члены с $\sin mx$, мы получим равенство такого вида:

$$(A\alpha + B\beta) \cos mx + (A'\alpha + B'\beta) \sin mx = a \cos mx + b \sin mx$$

Чтобы отбросить это уравнение тождественно, надо положить:

$$A\alpha + B\beta = a \text{ и } A'\alpha + B'\beta = b \text{ и мы будем иметь два уравнения 1-ей степени,}$$

из которых можно будет определить α и β .

Если α и β неопределенны конечными, то мы будем иметь согласно частное решение этого уравнения и затем можно будет найти общий $\int -x$

Конец.

е., где коэффициенты $A_1, A_2, \dots, A_n$

Уравнения однородные одного x , потому что

1) $(y + \sqrt{y^2 + x^2})dx - xdy = 0$, решение $y = Cx + C^2$

2) $(x + \sqrt{xy} - y)dx + \sqrt{xy}dy = 0$, решение $\frac{x^{1/2}}{x^{1/2} - y^{1/2}} \ln(x^{1/2} - y^{1/2}) + 1/2 \ln(x - y) = C$

3) $(x - y \cos \frac{y}{x})dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0$, решение $x = Ce^{-\sin \frac{y}{x}}$

4) $(3y - 7x + 7)dx + (y - 3x + 3)dy = 0$ решение $(y - x + 1)^2(y + x - 1)^3 = C$

Уравнения линейные

5) $\frac{dy}{dx} - \frac{my}{x+1} = e^x(x+1)^m$, решение $y = (x+1)^m e^x C$

6) $x(1-x^2)\frac{dy}{dx} + (2x^2-1)y = ax^3$ решение $y = ax + C \sqrt{1-x^2}$

7) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{(1-x^2)^{1/2}} = \frac{x + \sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^{3/2}}$, решение $y = Ce^{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Уравнения Бернулли

8) $(1-x^2)\frac{dy}{dx} - xy = axy^2$, решение $y = (C\sqrt{1-x^2} - a)^{-1}$

9) $x\frac{dy}{dx} + y = y^2 \ln x$, решение $y(Cx + 2x + 1) = 1$

Полные дифференциальные уравнения

10) $\frac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + (1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}})\frac{dy}{y} = 0$, решение $y^2 = C^2 - 2Cx$

11) $\frac{2x dx}{y^3} + (\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4})dy = 0$ решение $x^2 - y^2 = Cy^3$

12) $e^x(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ye^x dy = 0$, решение $e^x(x^2 + y^2) = C$

Примечание. Ур-я 10 и 11 можно также рассматривать как ур-я однородные.

13) Доказать, что ур-е $\frac{dy}{dx} + Py = Q$, где P, Q ф-ции одного x , можно решить, вводя в него фактор $w = e^{\int P dx}$

Уравнения 1^{го} порядка и высшей степени

14) $(\frac{dy}{dx})^2 - 5\frac{dy}{dx} + 6 = 0$. Решение $(y - 2x - C)(y - 3x - C) = 0$.

15) $(\frac{dy}{dx})^2 - \frac{y^2}{x^2} = 0$. Решение $(y - ax - C)(y + ax - C) = 0$

16) $x = 1 + r + r^3$, где $r = \frac{dy}{dx}$, решение $y = \frac{r^2}{2} + \frac{3r^4}{4} + C$ и исключить r .

$$17) y = p^2 + 2p^3, \text{ где } p = \frac{dy}{dx}$$

$$18) x + yp = ap^2, \text{ где } p = \frac{dy}{dx}. \text{ Реш.}$$

$$19) y = x \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2. \text{ Применение}$$

20) Найти кривую, для каждой точки которой, доты касательной, зависящая между осями x и y была бы постоянной и равна 2. Применение особые $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Линейные дифференциальные уравнения.

$$1) \frac{d^2y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 0. \text{ Реш. } C_1 e^x + C_2 e^{2x}. \quad 2) \frac{d^4y}{dx^4} - 4 \frac{dy}{dx} + 13y = 0. \text{ Реш. } y = A e^{\cos 3x} + B e^{\sin 3x}$$

$$3) \frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + y = 0. \text{ Реш. } y = C e^{-x} + (A + Bx) e^x. \quad 4) \frac{d^4y}{dx^4} - 2n^2 \frac{d^2y}{dx^2} + n^4 y = 0. \text{ Реш.}$$

$$\text{Решение } y = (A + A_2 x) \cos nx + (B_1 + B_2 x) \sin nx \quad 5) \frac{d^4y}{dx^4} - 4 \frac{d^3y}{dx^3} + 6 \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\text{Решение } y = e^x (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3). \quad 6) \frac{d^4y}{dx^4} - 2 \frac{d^3y}{dx^3} + 2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\text{Решение } y = e^x (C_1 + C_2 x) + C_3 \cos x + C_4 \sin x \quad 7) \frac{d^2y}{dx^2} - 7 \frac{dy}{dx} + 12y = x.$$

$$\text{Решение } y = \frac{x+7}{12} + C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}. \quad 8) \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + y = a \cos^2 x.$$

$$\text{Решение } y = a(x^3 - 6x^2 + 18x - 24)(C_1 + C_2 x) e^{-x}.$$

$$9) \frac{d^2y}{dx^2} - 2k \frac{dy}{dx} + k^2 y = e^x. \text{ Решение } y = \frac{e^x}{(k-1)^2} + (C_1 + C_2 x) e^x$$

$$10) \frac{d^2y}{dx^2} + n^2 y = \cos ax. \text{ Решение } y = \frac{\cos ax}{n^2 - a^2} + C_1 \cos nx + C_2 \sin nx.$$

$$\text{при } n=a \text{ particular решение } y = \frac{x \sin nx}{2n} + C_1 \cos nx + C_2 \sin nx$$

Порядок, которому должно следовать при чтении лекций и добавления: — 1) о множителе λ ; 2) о движении свободной точки (принцип Д'Аламбера).

Углубление в поверхность уровня (в конце 2-й части)

Об интегралах площадей или теоремах площадей.

Обратная теорема площадей.

Формулы Binet'a.

Движение планеты.

Метод возможных перемещений

Теорема Лагранжа (помещена в 2-й части)

Задача I, потом задачи II и III (помещены в 1-й части).

[Возвращение о множителе λ .]

Имеем уравнения: —

$$x + \lambda \frac{dt}{dx} = 0$$

$$y + \lambda \frac{dt}{dy} = 0$$

$$z + \lambda \frac{dt}{dz} = 0$$

Напишем эти уравнения в аннотированном виде:

$$x + \lambda \Delta \frac{dt}{dx} = 0$$

$$y + \lambda \Delta \frac{dt}{dy} = 0$$

$$z + \lambda \Delta \frac{dt}{dz} = 0$$

$$\text{где } \Delta = \sqrt{\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dt}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dt}{dz}\right)^2}$$

Если через α, β и γ казавшие углы, которые нормали к поверхности образуют с осями координат, то найдем: — $\cos \alpha = \frac{\frac{dt}{dx}}{\Delta}$; $\cos \beta = \frac{\frac{dt}{dy}}{\Delta}$; $\cos \gamma = \frac{\frac{dt}{dz}}{\Delta}$

Свободными этими формулами будут:

$$\left. \begin{aligned} X + \lambda \Delta \cos \alpha &= 0 \\ Y + \lambda \Delta \cos \beta &= 0 \\ Z + \lambda \Delta \cos \gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (a)$$

Если будем считать $\lambda \Delta$ за некоторую силу N , так что $\lambda \Delta = N$, при этом эта сила направлена по нормали, то формулы (a) выражают, что эта сила N уравновешивается силой P , составленной из сил X, Y и Z . Итак что эта сила N будет не что иное, как сопротивление поверхности, оказываемое материальной точкой извне написанной формулы имеем: —

$$\lambda = \frac{N}{\Delta}$$

т.е. коэффициент множитель находится, разделив силу сопротивления поверхности на известную величину, составленную по формуле: —

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dt}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dt}{dz}\right)^2}$$

Далее: — стр 184.

Ситуа, когда не свободная точка имеем: —

ствъ одностороннее и двустороннее перемещение).

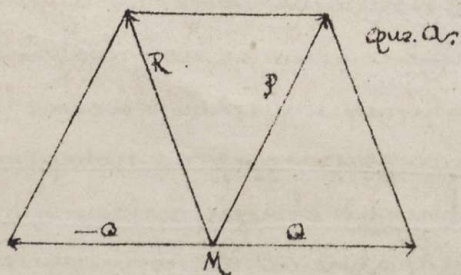
Задача I. Равновесие точки на поверхности, которую она можетъ покинуть въ определенномъ направлении (В: 23^м имеетъ въ конце и въ начале 24°)

Задача 2^я. —

Примеръ. —

[Добавление о движении несвободной точки].

Вопросы о движении несвободной материальной точки решаются также с помощью закона возможных перемещений, пользуется принципом Д'Аламбера, который позволяет всякую задачу о движении привести къ вопросу о равновесии. Этотъ принципъ выражается такъ: —



Если въ какой нибудь моментъ движения остановить материальную точку и прибавить къ ней действующей силе иерзіи, что разсматривается —

го момента, то эти двѣ силы уравновѣ-
сятся на данной несвободной точкѣ.

Доказательство. Пусть P (фиг. а) будетъ сила,
двищущая несвободную материальную точку M .
Такъ какъ точка несвободна, то ея полное ускореніе
не будетъ направлено по P и не будетъ $= \frac{P}{m}$. Оно будетъ
имѣть къ которому другое направленіе, напр. направ-
леніе Q и будетъ равно по модулю $\frac{Q}{m}$. Тогда сила Q
есть такая, которая, действуя на свободную
точку M и сообщая ей такое ускореніе, какъе сила
 P сообщаетъ несвободной точкѣ M . Разлагаемъ силу
 P на двѣ составляющія Q и R . Д'Аламберъ называ-
етъ силу Q — дѣйствительной силой, а силу R — по-
теранной. Такъ какъ движеніе материальной
точки происходитъ такъ, какъ будто она была сво-
бодна и на нее дѣйствовала сила Q , то все дѣйствіе
силы R идетъ на уничтоженіе сопротивленій, разди-
раемыхъ связями, стѣснѣющими свободу движенія
точки и будучи одна приложена къ покоящейся
точкѣ M она уравновѣсится на этой точкѣ.

Если бы точка и стала двигаться по поверхно-
сти, то сила сопротивленій связи, стѣснѣю-
щихъ точку была бы направлена по нормали къ
поверхности, сила P разложилась бы на двѣ силы

V

Q и R , при этом сила R пошла бы на уничтожение
 нормальной силы сопротивления поверхности, а
 сила Q двинула бы точку, как свободную. Сила R ,
 уничтожая силу корыстную сопротивления по-
 верхности, сама была бы нормальна к поверхно-
 сти и потому постоянно, это она во всякий момент
 уравновешивалась бы на свободной точке.

Рассмотрев изъ это сила есть сила потерян-
 ная. Дополнив сердцею съ иной стороны до па-
 раллелограмма, найдемъ, что сила R есть R
 P и $-Q$. Сила $-Q = Q$, ко направлена въ противоположе-
 ную сторону, т.е. она $= m\dot{v}$, где $\dot{v}$ полное ускорение
 точки M , и направлена въ сторону, противоположе-
 ную $\dot{v}$. Поэтому сила $-Q$ есть киста икое какъ сила
 инерции. Такимъ образомъ потерянная сила есть
 есть изъ силы движущей и силы инерции. Такъ
 какъ по сказанному выше потерянная сила во
 всякий моментъ движения уравновешивается на
 свободной материальной точке, то на ней урав-
 новешиваются и сила движущая и сила инерции,
 это и требовало доказать.

Пользуясь это остановивъ точку въ какой ни-
 будь моментъ времени, мы находимъ что, какъ рядъ
 возможныхъ перемещений, прокизи которыхъ на оси

VI

координаты суть $\delta x, \delta y, \delta z$. Пусть проекции силы P на оси будут: $-X, Y, Z$, а проекции силы инерции $-m \frac{d^2x}{dt^2}; -m \frac{d^2y}{dt^2}; -m \frac{d^2z}{dt^2}$.

Присоединим к силе инерции кр силу движущей, по-существу силу R , проекции которой будут: —

$$X - m \frac{d^2x}{dt^2}; Y - m \frac{d^2y}{dt^2} \text{ и } Z - m \frac{d^2z}{dt^2}$$

Так как эта сила должна быть в равновесии с точкой, то во всяком возможном перемещении силы должны уничтожиться: —

$$(X - m \frac{d^2x}{dt^2})\delta x + (Y - m \frac{d^2y}{dt^2})\delta y + (Z - m \frac{d^2z}{dt^2})\delta z = 0 \dots (1)$$

Дальнейший разбор последствий, вытекающих из этого уравнения для различных случаев ^{движения} свободной точки, мы уже видели, как и в теории равновесия *в конце 18 и начале 19*.

Далее: — 147

Теорема ускорения сил для несвободной точки.

Сила нормального давления при движении точки по поверхности.

Теория маятника.

Объяснительное движение маятника Фуко.

Механика систем.

Объясним перед доказательством

Третій закон, прина-
ющий пропорціональну
свою квадратичну періоди-
чеську вартість і кубичну серед-
ню відстань тіла, всіх
распространив на сферичні
і на косі; по ньому
середня швидкість обертового
тіла, пропорційна
середній швидкості
всередині матеріалу

(Небесний зв'язок)
Між ними