

Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана

О. В. Михайлова, Т. В. Облакова, Д. А. Приказчиков

Дополнительные вопросы курса теории вероятностей

*Методические указания
к выполнению домашнего задания*

Москва
Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана
2011

УДК 519.92
ББК 22.171
М69

Михайлова О. В.

М69 Дополнительные вопросы курса теории вероятностей : методические указания к выполнению домашнего задания / О. В. Михайлова, Т. В. Облакова, Д. А. Приказчиков. — М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2011. — 73, [3] с. : ил.

Кратко изложены основные определения и теоремы курса теории вероятностей. Подробно рассмотрены многомерные распределения, в том числе нормальный закон и его свойства. Изложены примеры на вычисление плотности вероятностей функции от случайной величины (случайного вектора), включая нахождение композиции законов распределения. Приведено 30 вариантов типового расчета.

Для студентов II и III курсов машиностроительных и приборостроительных специальностей, изучающих теорию вероятностей.

Рекомендовано Учебно-методической комиссией НУК «ФН» МГТУ им. Н. Э. Баумана.

УДК 519.92
ББК 22.171

1. Общие вопросы

§ 1. Вероятностная модель

Вероятностной моделью, или вероятностным пространством, называют совокупность трех объектов $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

I. Множество (пространство) элементарных событий Ω — совокупность элементов, представляющих собой элементарные исходы опыта (элементарные события).

Пример 1:

1) при однократном подбрасывании игральной кости элементарным исходом считают выпадение на верхней грани определенного числа очков;

2) при работе датчика случайных чисел элементарный исход — выпавшее число;

3) контролер готовой продукции измеряет некоторые параметры изделия, при этом результат (совокупность нескольких чисел) также можно считать элементарным исходом.

II. Совокупность подмножеств $\mathcal{A}$ множества Ω удовлетворяет ряду условий. Элементы $\mathcal{A}$ называют *событиями* и обозначают большими латинскими буквами. Таким образом, события — это множества, и с ними можно проводить обычные действия, такие, как пересечение, объединение, дополнение и др. Это накладывает на совокупность подмножеств $\mathcal{A}$ дополнительные условия, которые превращают его в объект, называемый **σ -алгеброй событий**. Приведем эти условия:

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$, $\Omega \in \mathcal{A}$ (пустое множество $\emptyset$, или *невозможное событие*, должно принадлежать $\mathcal{A}$, все множество Ω , или *достоверное событие*, также должно принадлежать $\mathcal{A}$);

2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$ (наряду с A его дополнение $\bar{A} = \Omega \setminus A$, или *противоположное событие*, также должно быть элементом $\mathcal{A}$);

3) если $A_i \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots$, то $\bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$ и $\bigcap_i A_i \in \mathcal{A}$.

Пересечение конечного или счетного числа множеств $\bigcap_i A_i$ либо *произведение событий* $\prod_i A_i$, а также их объединение $\bigcup_i A_i$ или *сумма событий* $\sum_i A_i$ должны быть элементами $\mathcal{A}$.

Приведем еще несколько определений:

1) если $\omega \in A$, то говорят, что элементарный исход *благоприятствует событию* A ;

2) A и B называются *несовместными событиями*, если $A \cap B = \emptyset$;

3) определим *разность событий* A и B как разность соответствующих множеств $A \setminus B \equiv A \cap \overline{B}$; согласно условиям 2 и 3 разность событий является событием;

4) говорят также, что *событие* A *влечет событие* B (наступление события A влечет наступление события B), если $A \subseteq B$.

В случае конечного вероятностного пространства в качестве алгебры событий $\mathcal{A}$ обычно рассматривают систему всех подмножеств множества Ω .

Если же Ω совпадает с множеством всех действительных чисел или его подмножеством, то рассматривают так называемую *борелевскую σ -алгебру*, порожденную полуинтервалами вида $(-\infty, a)$ с помощью операций их конечного и бесконечного пересечения и объединения. Эта σ -алгебра включает все виды интервалов и полуинтервалов, отдельные точки и другие «обычные» множества.

III. Функция множества P , определенная на $\mathcal{A}$, т. е. ставящая в соответствие каждому $A \in \mathcal{A}$ действительное число $P(A)$, называемое **вероятностью события** A . Эта функция должна удовлетворять аксиомам Колмогорова:

1) $\forall A \in \mathcal{A} \quad P(A) \geq 0$ — *аксиома неотрицательности вероятности*;

2) $P(\Omega) = 1$ — *аксиома нормировки*;

3) $P\left(\sum_i A_i\right) = \sum_i P(A_i)$, если $A_i A_j = \emptyset$ — *аксиома аддитивности*.

Из аксиом легко устанавливаются следующие свойства вероятности:

1) если $A \subseteq B$, то $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$;

2) если $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$ (свойство монотонности);

3) $\forall A \in \mathcal{A} \quad 0 \leq P(A) \leq 1$;

4) $\forall A \in \mathcal{A} \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

5) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ (теорема сложения);

6) если $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots$ так, что $\prod_i B_i = \emptyset$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = 0$ (свойство непрерывности).

Ниже приведены примеры вероятностных моделей.

Классическая вероятностная модель. Множество элементарных исходов Ω конечно, и все исходы считаются равновероятными, т.е. каждому элементарному исходу приписывается вероятность $\frac{1}{n}$, где $n = |\Omega|$. При этом $\mathcal{A}$ содержит все подмножества Ω . Тогда

$$P(A) = \sum_{i \in A} P(\omega_i) = \frac{1}{n} |A| = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

и получаем классическое определение вероятности как отношения мощностей множеств A и Ω , или числа благоприятных исходов к общему числу исходов.

Пример 2. Рассмотрим опыт, заключающийся в двукратном подбрасывании игральной кости. Если кость правильная, т.е. грани выпадают одинаково часто, то пары (i, j) , где i — число очков, выпавшее в первый раз, а j — число очков, выпавшее во второй раз, можно считать равновероятными. Число таких пар составляет 36, так что вероятность каждого элементарного исхода будет $\frac{1}{36}$.

Вычислим вероятность события

$$A = \{\text{сумма выпавших очков меньше 6}\}.$$

Для этого перечислим все исходы, благоприятствующие этому событию: $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)$. Тогда, согласно классическому определению вероятности,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

Геометрические вероятности. Пусть Ω — какая-либо геометрическая фигура, имеющая меру, т.е. длину, площадь или объем. В качестве $\mathcal{A}$ выступает совокупность измеримых подмножеств Ω . Вероятностью события $A \in \mathcal{A}$ в этой модели полагают отношение мер множеств A и Ω , т.е. $P(A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{mes } A}{\text{mes } \Omega}$.

Пример 3 (игла Бюффона). На плоскость, разлинованную прямыми, параллельными оси Ox и отстоящими одна от другой на расстоянии L , наудачу бросается игла длиной l ($l < L$) (рис. 1). С какой вероятностью игла пересечет какую-либо линию?

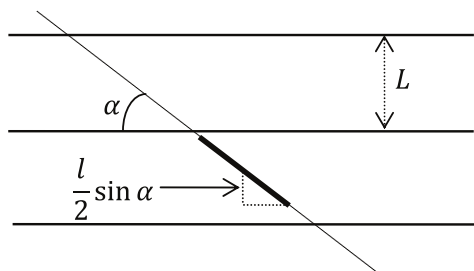


Рис. 1

Решение. Пусть p — расстояние от центра иглы до ближайшей прямой, а α — угол между иглой и прямыми. Тогда $p \in \left[0, \frac{L}{2}\right]$, $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, причем считаем, что все эти значения равновозможны. Множеством элементарных исходов Ω здесь будет прямоугольник, изображенный на рис. 2. Выделим теперь благоприятные исходы A , т. е. такие значения p и α , при которых игла пересечет одну из прямых.

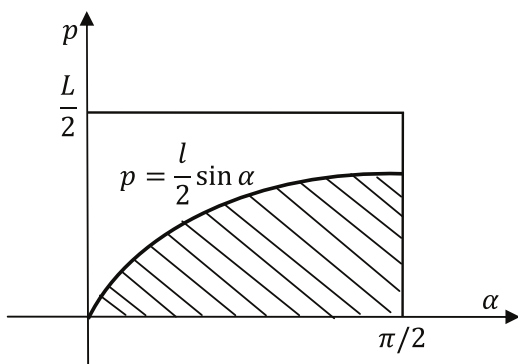


Рис. 2

Это произойдет, если $\frac{l}{2} \sin \alpha \geq p$ (см. заштрихованное множество на рис. 2). Тогда искомая вероятность равна отношению площадей, т. е.

$$P(A) = \frac{4}{L} \int_0^{\pi/2} \frac{l}{2} \sin \alpha \, d\alpha = \frac{2l}{L}.$$

Пример 4. Три раза запускается датчик случайных чисел, выбирающий числа из интервала $[0, 1]$. Результатом этого опыта (элементарным исходом) можно считать тройку чисел (x, y, z) — точку в кубе со стороной 1. Вероятность выбора точки из какой-либо части куба, очевидно, пропорциональна объему этой части. Поэтому применяем модель геометрических вероятностей. Рассмотрим события $A = \{z < x + y\}$ и $B = \{x > y > z\}$ и вычислим их вероятности (на рис. 3 и 4 изображены соответствующие части куба). Так как $\text{mes } \Omega = 1$, то

$$\begin{aligned}
 P(A) &= \text{mes } A = \iiint_A dx \, dy \, dz = \\
 &= \iint_{x+y \leq 1} \left(\int_0^{x+y} dz \right) dx \, dy + \iint_{x+y > 1} \left(\int_0^1 dz \right) dx \, dy = \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} dz + \int_0^1 dx \int_{1-x}^1 dy \int_0^1 dz = \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y) dy + \int_0^1 dx \int_{1-x}^1 dy = \\
 &= \int_0^1 \left[x(1-x) + \frac{1}{2}(1-x)^2 \right] dx + \int_0^1 x dx = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)(x+1) dx + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(B) &= \text{mes } B = \iiint_B dx \, dy \, dz = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz = \int_0^1 dx \int_0^x y dy = \\
 &= \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^3}{6} \Big|_0^1 = \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

Абсолютно непрерывная вероятностная модель. В качестве множества элементарных исходов Ω рассматривается действительная прямая $\mathbb{R}$, событиями считаем борелевские подмножества $\mathbb{R}$. Вероятность событий в этой модели задается с помощью функции *плотности вероятностей* $p(x)$, т. е. неотрицательной