

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Ю.И. Виноградов

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ
КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ
В ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТАХ
КОНСТРУКЦИЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

*Рекомендовано Научно-методическим советом МГТУ им. Н.Э. Баумана
в качестве учебного пособия по курсам
«Прочность летательных аппаратов», «Строительная механика»*

Москва
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
2011

УДК 539.3
ББК 34.41
В48

Рецензенты: *Б.В. Нерубайло, Б.Г. Повов*

Виноградов Ю. И.

В48

Методы исследования концентрации напряжений в тонкостенных элементах конструкций аэрокосмических систем : учеб. пособие по курсам «Прочность летательных аппаратов», «Строительная механика» / Ю.И. Виноградов. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. – 88, [4] с.

Приведены математические модели механики деформирования оболочек – тонкостенных элементов аэрокосмических систем, на основании которых исследуется концентрация напряжений. Рассмотрены научные основы методов анализа математических моделей и обоснован выбор тех, которые соответствуют задаче исследования напряжений в местах концентрации с контролируемой погрешностью. Даны формулы решения дифференциальных уравнений математических моделей, эффективные алгоритмы методов исследования напряжений в тонкостенных элементах аэрокосмических систем, в местах их концентрации: краевые задачи приведены к начальным, напряжения определены решением задачи Коши мультипликативным методом по рекуррентным соотношениям.

Для студентов старших курсов машиностроительных специальностей. Пособие может быть полезно аспирантам, научным работникам и преподавателям.

УДК 539.3
ББК 34.41

ВВЕДЕНИЕ

Механика деформирования тонкостенных конструкций, в основании которой находится теория оболочек, пластин, тонкостенных шпангоутов и стрингеров, сформировалась как наука в трудах многих ученых, в нашей стране, главным образом, в трудах В.Э. Власова.

Проблемы прочности по напряженно-деформированному состоянию, устойчивости и определению собственных частот колебаний тонкостенных конструкций постоянно возникают при проектировании, например, летательных аппаратов. Критические нагрузки устойчивости и собственные частоты – интегральные характеристики тонкостенных конструкций. Определяются они в задачах на собственные значения.

Проблемы прочности тонкостенных конструкций по напряженно-деформированному состоянию имеют ярко выраженную специфику. Массовое совершенство конструкций может быть достигнуто только при равнопрочности всех элементов. Однако задача совершенствования не может иметь окончательного решения ввиду бесконечного многообразия возможных конструкций одного целевого назначения, условий изготовления, эксплуатации и возможных, порой непредсказуемых, внешних воздействий.

Физическая постановка задачи

Практика эксплуатации тонкостенных конструкций показывает, что разрушение начинается в местах концентрации напряжений в элементах с образования и катастрофического развития трещин. Явление это не интегральное и носит ярко выраженный локальный характер для каждой конкретной конструкции. Из опыта испытаний и эксплуатации места концентрации напряжений, как правило, известны. Они обусловлены скачками жесткости, изломами геометрии тонкостенных элементов, локальными внешними воздействиями и передачей усилий в конструкциях. Избежать локальных воздействий и передачи нагрузок на тонкостенные элементы не удастся. В таких случаях мы сталкиваемся с проблемой concentra-

ции напряжений и их определение становится неизбежным. Задача расчета сводится к определению размеров мест концентрации напряжений, характера распределения напряжений и, самое главное, максимальных значений напряжений в этих местах.

Российские ученые А.М. Доценко, В.А. Коргопольцев, М.Н. Коган, А.Б. Корнилов, А.А. Орлов, В.Н. Семенов, Л.Л. Теперин, М.В. Устинов в ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского экспериментально показали, что использование нанотехнологий в местах концентрации напряжений для предотвращения появления и развития трещин в три раза увеличивает прочностной ресурс тонкостенных конструкций.

Концентрация напряжений как физическое явление требует математического моделирования и анализа моделей в виде дифференциальных уравнений. Если в качестве математических моделей использовать линейные дифференциальные уравнения механики деформирования оболочек, то актуальным остается построение эффективной методики их исследования в местах концентрации напряжений с априори задаваемой погрешностью.

Математические модели

Ограничимся исследованием замкнутых в окружном направлении оболочек, которые находят широкое применение в качестве элементов тонкостенных конструкций, сооружений, машин и аппаратов. Это позволит нам использовать метод Фурье разделения переменных в дифференциальных уравнениях с частными производными механики деформирования оболочек и свести математическую модель к линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. Разработка метода исследования такой математической модели упрощается.

В качестве математической модели механики деформирования оболочек используем дифференциальные уравнения, полученные для анизотропных слоистых оболочек Я.М. Григоренко и А.Т. Василенко [19]. Они позволяют в отличие от других известных уравнений исследовать концентрацию напряжений в анизотропных, ортотропных и изотропных оболочках классических форм. Кроме того, эти уравнения уточнены Ю.А. Гусевым. Им обнаружено и исправлено более 10 существенных опечаток.

Нами использованы также математические модели механики деформирования для изотропных оболочек в канонической форме В.Л. Бидермана [6], а также полученные нами на ЭВМ с помощью

символьной математики для изотропных оболочек в канонической форме на основе уравнений В.З. Власова [15]. Сравнение математических моделей, например, механики деформирования изотропных цилиндрических оболочек, показывает, что они различаются. Для избежания громоздкости ограничимся сопоставлением их характеристических уравнений

$$\lambda^8 + a_3\lambda^6 + a_2\lambda^4 + a_1\lambda^2 + a_0 = 0,$$

разрешающих обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных методом Фурье разделения переменных для цилиндрических оболочек:

– у В.З. Власова

$$a_0 = n^4(n^2 - 1)^2, \quad a_1 = -4n^6 + 8n^4 - 2\mu n^4 - 2n^2, \\ a_2 = 6n^2(n^2 - 1) + (1 + 4k^4), \quad a_3 = -4n^2 + \mu;$$

– у Б.Г. Галеркина

$$a_0 = n^6(n^2 - 1), \quad a_1 = -4n^6 + (5 - 3\mu)n^4 - (1 - 2\mu)n^2, \\ a_2 = 6n^4 - (4 - \mu)n^2 + 4k^4, \quad a_3 = -4n^2 + 2\mu;$$

– у А.Л. Гольденвейзера

$$a_0 = n^4(n^2 - 1)^2, \quad a_1 = -4n^2(n^2 - 1)^2, \\ a_2 = 6n^4 - 8n^2 + 2n^2\mu^2 + 4k^4, \quad a_3 = -4n^2;$$

– у В.М. Даревского

$$a_0 = n^4(n^2 - 1)^2, \quad a_1 = -4n^2(n^2 - 1)^2, \\ a_2 = 6n^4 - 7n^2 + n^2\mu^2 + 4k^4, \quad a_3 = -4n^2;$$

– у В. Флюгге

$$a_0 = n^4(n^2 - 1)^2, \quad a_1 = -2n^2[2n^4 - (4 - \mu)n^2 + (2 - \mu)], \\ a_2 = 6n^2(n^2 - 1) + 4k^4, \quad a_3 = -2(2n^2 - \mu),$$

где $k = \sqrt[4]{3(1 - \mu^2)} \sqrt{\frac{R}{h}}$; μ – коэффициент Пуассона; n – номер гармоники в методе Фурье разделения переменных.

На различие математических моделей и, следовательно, коэффициентов в соответствующих характеристических уравнениях в 1964 г. обратил внимание Д.А. Рояк. Однако анализ различных математических моделей с целью установления наиболее совершенной, адекватной реальному объекту, нам представляется непродуктивным. Более результативным и менее трудоемким считаем сравнительный количественный вычислительный эксперимент. Ожидается, что количественные параметрические исследования, обязательно с контролируемой погрешностью, дадут малоотличающиеся результаты. Отличия, как показали наши некоторые решения для цилиндрической оболочки, не превышали 5 %, что и предсказывал В.З. Власов. Очевидно, вычислительный эксперимент зависит от контроля погрешностей в результатах.

Одна из задач математического моделирования связана с правомерностью использования теории оболочек для исследования концентрации напряжений при локальном воздействии на них. В.И. Леонов и Х.С. Хазанов показали, что математические модели теории оболочек могут применяться при изучении в них напряжений, если радиус круглой площадки внешнего воздействия более половины толщины оболочки. Если площадка воздействия меньше, то концентрацию напряжений под ней и в малой окрестности, не превышающей толщины оболочки, необходимо исследовать, решая трехмерную задачу.

Следует установить также пригодность математических моделей для исследования концентрации напряжений у мест крепления, скачков жесткости или изломов поверхностей оболочек. Если учесть, что определению напряжений у мест заделки края оболочки или сопряжения цилиндрической оболочки со сферическим днищем посредством дифференциальных уравнений механики деформирования оболочек студентов уже учат, то становится ясно – вопрос решен давно и положительно.

Справедливости ради необходимо вспомнить принцип Сен-Венана. Согласно указанному принципу, проблемным является пограничный слой оболочки, размер которого не превышает ее толщины, а напряженное состояние трехмерно. Однако известно, что место концентрации напряжений, где есть опасность возникновения микротрещин и развития магистральных, часто превышает десятки толщин оболочки. Поэтому пограничными слоями справедливо пренебрегаем.

Математические модели названных выше авторов взяты без каких либо изменений.

Необходимо обратить внимание на то, что в пособии использовано понятие «концентрация напряжений», а не их локализация или краевой эффект (*концентрироваться* – собираться, скапливаться в каком-нибудь месте; *локализоваться* – сосредоточиваться где-либо, не выходя за пределы). Очевидно, что эти понятия синонимичны. Однако понятие «концентрироваться» у механиков ассоциируется не только с ограничением места, но и с определенными по значению напряжениями, значительно превышающими находящиеся за пределами этих мест. По этой причине мы используем понятие «концентрироваться», включая в него знание не только места, но и значений больших напряжений.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Физическая постановка задачи	3
Математические модели	4
Глава 1. Математические модели механики деформирования оболочек и методы анализа	8
1. Математическая модель механики деформирования слоистых оболочек Я.М. Григоренко и А.Т. Василенко	8
1.1. Матричная каноническая форма представления дифференциальных уравнений для слоистых оболочек	21
1.2. Матричная каноническая форма представления дифференциальных уравнений для изотропных оболочек	23
2. Математическая модель механики деформирования изотропных оболочек В.З. Власова	29
2.1. Разрешающая система уравнений общей моментной технической теории В.З. Власова	29
2.2. Матричная форма уравнений механики деформирования цилиндрических, конических и сферических оболочек	33
3. Приведение разрешающей системы дифференциальных уравнений к канонической форме	37
4. Методы анализа математических моделей	45
Глава 2. Решение линейных обыкновенных дифференциальных уравнений в матричной форме	56
1. Матричный ряд Тейлора	56
2. Мультипликативный интеграл Вольтерра и матричный бином Ньютона	57
3. Частное решение	58
Глава 3. Простейшие алгоритмы исследования концентрации напряжений в оболочках мультипликативным методом	60
1. Приведение краевых задач к начальным до счета	60
2. Приведение краевых задач к начальным с помощью ЭВМ	64
3. Математическое моделирование локальной нагрузки	69

4. Идеализация локальной нагрузки сосредоточенной.....	72
5. Вычислительные эксперименты	73
5.1. Определение относительной критической длины оболочки	74
5.2. Удвоение относительной критической длины оболочки.....	76
5.3. Параметрические исследования концентрации напряжений в цилиндрических и сферических оболочках	78
Литература.....	86