

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Ю.Н. Разумный, Д.О. Школьников

ОСНОВНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ
НЕВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ
И УРАВНЕНИЕ КЕПЛЕРА

*Рекомендовано Научно-методическим советом
МГТУ им. Н.Э. Баумана в качестве учебного пособия
по курсу «Теория космического полета»*

Москва
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
2011

УДК 629.783
ББК 39.68
Р17

Рецензенты: *В.В. Малышев, В.П. Казаковцев*

Разумный Ю.Н.

Р17 Основные интегралы невозмущенного движения и уравнение Кеплера: учеб. пособие по курсу «Теория космического полета» / Ю.Н. Разумный, Д.О. Школьников. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. — 38, [2] с. : ил.

Рассмотрены вопросы получения основных интегралов дифференциальных уравнений невозмущенного движения космических аппаратов, проведен анализ уравнения Кеплера для различных типов орбит космических аппаратов, даны описания численных методов решения уравнения Кеплера и их сравнительный анализ.

Для студентов старших курсов технических вузов, обучающихся по специальности «Динамика полета и управление движением ракет и космических аппаратов».

УДК 629.783
ББК 39.68

ВВЕДЕНИЕ

При решении ряда задач космической баллистики рассматривается невозмущенное движение космического аппарата (КА), происходящее в центральном поле тяготения одного притягивающего тела (планеты, Солнца и т. д.). В учебном пособии получены основные интегралы дифференциальных уравнений невозмущенного движения КА, проведен анализ уравнения Кеплера для различных типов орбит КА, описаны различные численные методы решения уравнения Кеплера, выполнен сравнительный анализ этих методов. Учебное пособие предназначено для самостоятельной проработки части теоретического материала и выполнения домашних заданий по дисциплине «Теория космического полета» студентами старших курсов технических вузов, обучающихся по специальности «Динамика полета и управление движением ракет и космических аппаратов».

1. ОСНОВНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ НЕВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Пусть центр масс КА движется в центральном поле притягивающего тела, массу которого полагаем сосредоточенной в точке M (рис. 1.1). Уравнение движения центра масс КА в центральном гравитационном поле притягивающего тела в абсолютной геоцентрической экваториальной системе координат (АГЭСК) имеет вид

$$\vec{j}_{\text{гр}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r}, \quad (1.1)$$

где $\vec{j}_{\text{гр}}$ — вектор ускорения движения центра масс КА как тела

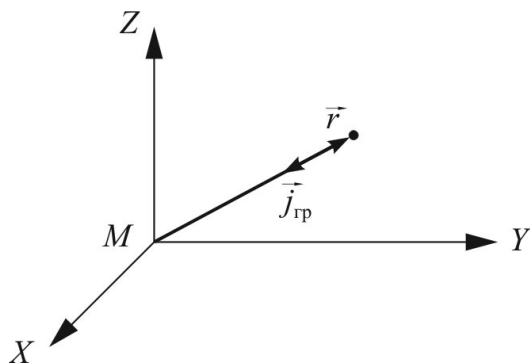


Рис. 1.1. К определению уравнения движения центра масс КА

единичной массы; μ — гравитационная постоянная притягивающего тела.

Выражения для круговой и параболической скоростей записывают через гравитационную постоянную μ притягивающего тела:

$$V_{\text{кр}} = \overline{r_0 j_{\text{гр}}} = \overline{r_0 \frac{\mu}{r_0^2}} = \overline{\frac{\mu}{r_0}}; \quad (1.2)$$

$$V_{\text{пар}} = 2\sqrt{V_{\text{кр}}} = \frac{\sqrt{2\mu}}{r_0}. \quad (1.3)$$

Спроектировав уравнение (1.1) на оси координат АГЭСК, получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{\mu}{r^3} x &= 0; \\ \ddot{y} + \frac{\mu}{r^3} y &= 0; \\ \ddot{z} + \frac{\mu}{r^3} z &= 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Умножим третье уравнение системы (1.4) на y и вычтем из него второе уравнение, умноженное на z :

$$\ddot{z}y + \frac{\mu}{r^3} zy - \ddot{y}z - \frac{\mu}{r^3} yz = 0.$$

Отсюда получим, что $\ddot{z}y - \ddot{y}z = 0$, $\frac{d}{dt}(yz - zy) = 0$.

Проинтегрируем последнее выражение:

$$y\dot{z} - z\dot{y} = C_1. \quad (1.5)$$

Умножим первое уравнение системы (1.4) на z и вычтем из него третье уравнение, умноженное на x :

$$\ddot{x}z + \frac{\mu}{r^3} xz - \ddot{z}x - \frac{\mu}{r^3} zx = 0.$$

Отсюда аналогично получим $\ddot{x}z - \ddot{z}x = 0, \frac{d}{dt}(z\dot{x} - x\dot{z}) = 0$ и

$$z\dot{x} - x\dot{z} = C_2. \quad (1.6)$$

Умножим второе уравнение системы (1.4) на x и вычтем из него первое уравнение, умноженное на y :

$$\ddot{y}x + \frac{\mu}{r^3}yx - \ddot{x}y - \frac{\mu}{r^3}xy = 0.$$

Отсюда также аналогично получим: $\ddot{y}x - \ddot{x}y = 0, \frac{d}{dt}(\dot{y}x - \dot{x}y) = 0$ и

$$\dot{y}x - \dot{x}y = C_3. \quad (1.7)$$

Интегралы C_1, C_2, C_3 называют интегралами площадей.

Умножим уравнения (1.5), (1.6), (1.7) соответственно на x, y, z и сложим полученные произведения:

$$y\dot{z}x - z\dot{y}x + z\dot{x}y - x\dot{z}y + x\dot{y}z - y\dot{x}z = C_1x + C_2y + C_3z.$$

После сокращения компонентов левой части полученного уравнения имеем

$$C_1x + C_2y + C_3z = 0. \quad (1.8)$$

Уравнение (1.8) представляет собой уравнение плоскости, проходящей через начало координат, а вектор $\vec{C} = \{C_1, C_2, C_3\}$ перпендикулярен к этой плоскости.

Покажем физический смысл интегралов площадей. Из курса теоретической механики известно, что секториальная скорость (скорость ометания радиус-вектором площади) определяется как вектор $\vec{q} = \frac{1}{2}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})$ (рис. 1.2).

Раскроем векторное произведение в правой части последнего выражения:

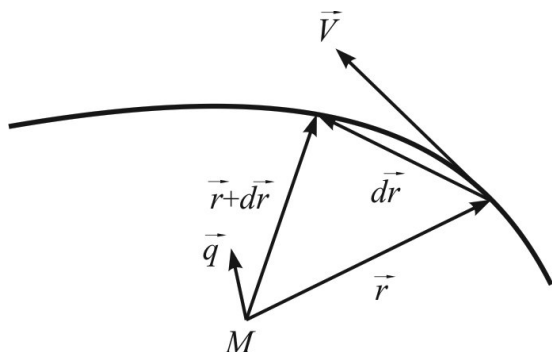


Рис. 1.2. К определению вектора секториальной скорости

$$\begin{aligned}\vec{q} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [(y\dot{z} - \dot{y}z)\vec{i} - (x\dot{z} - \dot{x}z)\vec{j} + (x\dot{y} - \dot{x}y)\vec{k}] = \\ &= \frac{1}{2} (C_1\vec{i} + C_2\vec{j} + C_3\vec{k}) = \frac{1}{2} \vec{C}.\end{aligned}$$

Таким образом, интегралы площадей представляют собой проекции удвоенной секториальной скорости на оси АГЭСК.

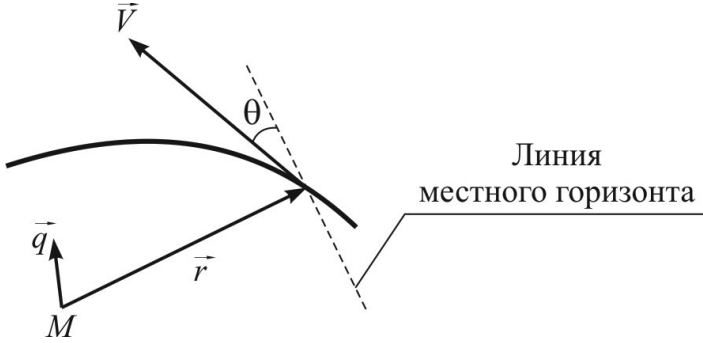


Рис. 1.3. К определению вектора $\vec{q}$ через кинематические элементы движения КА

Модуль вектора $\vec{q}$ определяется через кинематические элементы центра масс КА (радиус r , скорость V и угол θ наклона вектора скорости к местному горизонту) следующим образом:

$$q = \frac{1}{2} r V \sin(90^\circ + \theta) = \frac{1}{2} r V \cos \theta. \quad (1.9)$$

Получим еще один интеграл системы дифференциальных уравнений (1.4), для чего первое из этих уравнений умножим на $\dot{x}$, второе – на $\dot{y}$, третье – на $\dot{z}$ и сложим полученные произведения:

$$\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + \ddot{z}\dot{z} + \frac{\mu}{r^3} (x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}) = 0. \quad (1.10)$$

Проинтегрировав уравнение (1.10) по частям, получим

$$\frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{\mu}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = H. \quad (1.11)$$

Выражение (1.11) называется интегралом энергии.

Приняв во внимание, что $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = V^2$ и $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, получим:

$$\frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = H. \quad (1.12)$$

Для пояснения физического смысла интеграла энергии примем, что потенциальная энергия Π отсчитывается от центра масс Земли. Тогда имеем

$$\Pi = -\mu \int_r^0 \frac{dr}{r^2} = \mu \frac{1}{r} \Big|_r^0 = -\frac{\mu}{r}.$$

С учетом вышеизложенного уравнение (1.12) представляет собой полную механическую энергию материальной точки при условии, что потенциальная энергия отсчитывается от центра масс Земли.

Запишем выражение для вектора скорости в полярных координатах (рис. 1.4):

$$V_r = \dot{r}; \quad V_\tau = r\dot{\phi}; \quad V^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2, \quad (1.13)$$

где V_r и V_τ — соответственно радиальная и тангенциальная составляющие вектора скорости КА; ϕ — угол смещения радиус-вектора КА в плоскости орбиты.

Тогда выражение (1.9) для секториальной скорости в полярных координатах примет вид

$$q = \frac{1}{2} r V \cos \theta = \frac{1}{2} r V_\tau = \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi} = \frac{1}{2} C, \quad (1.14)$$

а интеграл энергии (1.12) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{r^2\dot{\phi}^2}{2} - \frac{\mu}{r} = H. \quad (1.15)$$

Преобразовав в соответствии с выражением

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{dt}$$

и приняв во внимание, что из выражения (1.14) следует равенство

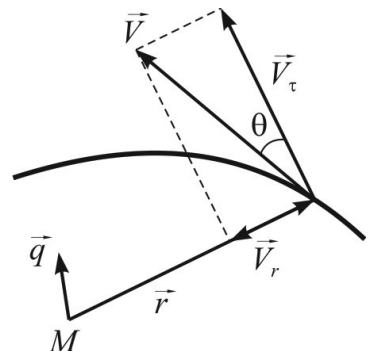


Рис. 1.4. К определению составляющих вектора скорости в полярных координатах