

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

А.В. Котович, И.В. Станкевич

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Рекомендовано

*Научно-методическим советом МГТУ им. Н.Э. Баумана
в качестве учебного пособия*

Москва
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
2012

УДК 519.3(075.8)

ББК 22.161.8

К73

Рецензенты: *С.А. Агафонов, Ю.М. Темис*

Котович А.В.

К73 Решение задач теории упругости методом конечных элементов : учеб. пособие / А.В. Котович, И.В. Станкевич. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 106, [6] с. : ил.

ISBN 978-5-7038-3567-8

Приведены формулировки квазистационарных краевых задач теории упругости. Рассмотрены основные особенности построения численного решения этих задач с помощью метода конечных элементов.

Для студентов 4-го курса факультета ФН МГТУ им. Н.Э. Баумана, изучающих курс «Основы сеточных методов» и выполняющих курсовой проект по дисциплине «Математические модели технических систем». Может быть полезным студентам старших курсов других факультетов, изучающим численные методы решения краевых задач.

Работа выполнена по гранту поддержки ведущих научных школ № НШ-4046.2010.8.

УДК 519.3(075.8)

ББК 22.161.8

ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование в настоящее время интенсивно развивается. Строятся усовершенствованные модели сложных физических явлений и процессов, конструируются новые численные алгоритмы, проводятся разнообразные вычислительные эксперименты: поисковые, диагностические, оптимизационные. Дальнейшее интенсивное развитие методов математического моделирования как эффективного средства исследования сложных процессов деформирования является одной из актуальных проблем прикладной математики, поскольку открывает новые возможности развития всех основных разделов в такой важнейшей предметной области, как механика деформируемого твердого тела, значительно расширяет перспективы создания и практического использования систем автоматизированного проектирования.

Велика роль математического моделирования и при решении прикладных задач теории упругости. Это особенно важно, поскольку математические построения и алгоритмические особенности, лежащие в основе решения задач теории упругости, при соответствующей модификации могут быть положены в основу решения сложных нелинейных задач деформирования, открывающих перспективы для проведения более полного и тонкого анализа напряженно-деформированного состояния ответственных узлов и элементов конструкций, подверженных сложному термосиловому нагружению, и, таким образом, при получении данных для существенного уточнения оценки их реального ресурса и эксплуатационно-функциональных возможностей конструкций в целом. Указанные обстоятельства являются важнейшими для модификации существующей техники и технологии и создания их новейших образцов.

Одним из основных инструментов математического моделирования, используемых для решения широкого круга разнообразных прикладных задач теории упругости, является метод конечных элементов (МКЭ) [1–5]. Широкому и успешному применению МКЭ способствовали его основные конструктивные свойства,

например, такие, как естественность, простота, доступность, универсальность и высокая технологичность. Этот метод позволяет проводить численный анализ напряженно-деформированного состояния конструкций, имеющих сложную геометрическую форму, учитывать особенности граничных условий, теплофизических и физико-механических свойств материалов расчетных схем. Характерной особенностью МКЭ является прозрачность основных вычислительных процедур, что дает возможность эффективно контролировать обработку данных. Кроме того, МКЭ алгоритмически и программно весьма удобен для его объединения с современными методами и средствами компьютерной графики.

В данном учебном пособии приведены основные формулировки одномерных, двумерных, осесимметричных и трехмерных задач теории упругости и рассмотрены особенности построения матричных выражений при решении указанных задач с помощью МКЭ. Материал учебного пособия изложен на примере использования линейных конечных элементов.

В учебном пособии наряду с обычным обозначением векторов и матриц полужирным шрифтом использовано и матричное. Фигурными скобками обозначены вектор-столбцы, например

$$\mathbf{P} = \{P\} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix};$$

квадратными скобками — вектор-строки, например

$$\mathbf{N} = [N] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3],$$

и матрицы размером $m \times n$, например

$$\mathbf{H} = [H] = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \end{bmatrix};$$

символом $(\)^T$ — операция транспонирования матричного выражения, стоящего в скобках.

При этом известно, что каждому симметричному тензору 2-го ранга $T = t_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ (рассматривается декартова прямоугольная система координат; по повторяющимся латинским индексам прово-

дится суммирование от 1 до 3, а по греческим — нет) можно поставить в соответствие шестимерный вектор $\mathbf{P} = p_i \mathbf{e}_i$. Такое соответствие можно установить с помощью замены пар индексов ij ($i, j = \overline{1, 3}$) одним индексом α ($\alpha = \overline{1, 6}$) согласно следующему правилу:

$$p_1 = t_{11}, \quad p_2 = t_{22}, \quad p_3 = t_{33}, \quad p_4 = t_{12}, \quad p_5 = t_{13}, \quad p_6 = t_{23}.$$

1. ПОНЯТИЕ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

Прежде всего определим понятие конечного элемента. Под конечным элементом будем понимать объект (e) , характеризуемый занимаемой им в евклидовом пространстве E замкнутой областью $\bar{V}^{(e)}$, координатами узлов $\mathbf{x}_p^{(e)} \in \bar{V}^{(e)}$ и интерполяционными функциями вида

$$\varphi^{(e)}(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^{M^{(e)}} N_p^{(e)}(\mathbf{x}) \varphi_p^{(e)} = [N^{(e)}] \{ \varphi^{(e)} \}, \quad (1.1)$$

где $\varphi^{(e)}(\mathbf{x})$ — интерполируемая в замкнутой области $\bar{V}^{(e)} \subset E$ функция; (e) — идентификационная метка конечного элемента; $M^{(e)}$ — число узлов конечного элемента (e) ; p — номер (локальный) узла конечного элемента (e) ; $N_p^{(e)}(\mathbf{x})$ — достаточно гладкие линейно независимые функции, везде далее называемые функциями формы конечного элемента (e) ; $\varphi_p^{(e)}$ — значения функции в узлах конечного элемента (e) ,

$$\varphi_p^{(e)} = \varphi^{(e)}(\mathbf{x}_p^{(e)}); \{ \varphi^{(e)} \} = \left\{ \begin{array}{c} \varphi_1^{(e)} \\ \varphi_2^{(e)} \\ \vdots \\ \varphi_{M^{(e)}}^{(e)} \end{array} \right\}$$

— вектор-столбец, составленный из узловых значений $\varphi_p^{(e)}$; $[N^{(e)}]$ — матрица (строка), составленная из значений функций формы $N_p^{(e)}(\mathbf{x}^{(e)})$.

Из формулы (1.1) следуют очевидные свойства функций формы:

$$1) N_p^{(e)}(\mathbf{x}_q^{(e)}) = \begin{cases} 1, & q = p; \\ 0, & q \neq p, \end{cases}$$

$$\forall p, q = \overline{1, M^{(e)}}; \mathbf{x}_q^{(e)} \in \bar{V}^{(e)};$$

$$2) \sum_{p=1}^{M^{(e)}} N_p^{(e)}(\mathbf{x}) = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \bar{V}^{(e)}.$$

Из свойства 2 следует, что $\forall i = \overline{1, r_E}$ и $\forall \mathbf{x} \in \bar{V}^{(e)}$

$$\sum_{p=1}^{M^{(e)}} (N_p^{(e)}(\mathbf{x}))_{,i} = 0, \text{ где } r_E \text{ — размерность пространства } E; \text{ запя-$$

той с индексом обозначена операция дифференцирования по пространственным координатам x_i .

Аналитическая конструкция функций формы $N_p^{(e)}(\mathbf{x})$ зависит от геометрии замкнутой области $\bar{V}^{(e)}$, числа узлов $M^{(e)}$ и их расположения, т. е. от координат $\mathbf{x}_p^{(e)}$. Конструкции функций формы некоторых простейших конечных элементов, которые часто используют для решения задач теории упругости, рассмотрены в разд. 2.

В зависимости от решаемой задачи в качестве евклидова пространства E могут рассматриваться пространства $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$.

Замкнутые области $\bar{V}^{(e)}$, на которых определяются конечные элементы, представляют собой, как правило, простейшие геометрические фигуры и тела: отрезки линий, треугольники, четырехугольники, тетраэдры, пирамиды, призмы, параллелепипеды и т. п. с прямыми или криволинейными сторонами (ребрами), а также тороидальные тела, образованные вращением вокруг заданной оси простейших геометрических фигур: треугольников, четырехугольников с прямыми или криволинейными сторонами.

В литературе очень часто замкнутые области $\bar{V}^{(e)}$ называют конечными элементами, при этом учитываются и расположение узлов в замкнутых областях $\bar{V}^{(e)}$, и тип заданных на них интерполяционных функций. Далее будем отождествлять замкнутую область $\bar{V}^{(e)}$ и определенный на ней конечный элемент (e) , если это не

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
1. Понятие конечного элемента	6
2. Простейшие конечные элементы	12
2.1. Одномерные задачи	12
2.2. Двухмерные задачи	17
2.3. Трехмерные задачи	23
3. Решение одномерных задач теории упругости	29
4. Решение двухмерных задач теории упругости	45
5. Решение осесимметричных задач теории упругости	63
6. Решение трехмерных задач теории упругости	83
7. Учет кинематических граничных условий	101
Литература	108