

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
Серия методического обеспечения учебного процесса
студентов с ограниченными возможностями здоровья

З.Ф. Столярова

ТЕХНИКА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

*Методические указания к проведению самостоятельной работы
по курсу «Математический анализ»*

Под редакцией *А.Г. Станевского*

Москва
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
2012

УДК 517.3(075)
ББК 22.161.1я7
С81

Рецензент *В.В. Феоктистов*

Столярова З. Ф.

С81 Техника интегрирования: метод. указания к проведению самостоятельной работы по курсу «Математический анализ»; под ред. А.Г. Станевского – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 78, [2] с. : ил.

Рассмотрены различные методы интегрирования функции одной переменной. Даны методические указания к дополнительной самостоятельной работе студентов по технике интегрирования.

Для студентов 1-го курса с ограниченными возможностями по слуху.

Рекомендованы кафедрой «Реабилитация инвалидов» факультета ГУИМЦ МГТУ им. Н.Э. Баумана.

УДК 517.3(075)
ББК 22.161.1я7

ПРЕДИСЛОВИЕ

Одним из наиболее сложных разделов высшей математики является раздел «Техника интегрирования».

Приступая к изучению интегрального исчисления, необходимо знать таблицу производных, дифференцирование сложных функций, свойства производных и дифференциалов. Поскольку и дифференциальное и интегральное исчисления являются главным математическим аппаратом физико-математических и технических наук, то следует освоить технику интегрирования (как и технику дифференцирования) почти как таблицу умножения. (Справочники помогают знающему!) Данные методические указания предназначены в первую очередь студентам ГУИМЦ.

Цель указаний – усиленная тренировка студентов в технике интегрирования, помощь в самостоятельной работе. Теорию же следует изучать по лекциям и учебникам.

1. ВВОДНЫЕ ПОНЯТИЯ

Пусть производная некоторой функции $F(x)$ (нам пока неизвестной) равна данной функции $f(x)$, то есть: $F'(x) = f(x)$. Тогда отыскание так называемой **первообразной функции** $F(x)$ по известной функции $f(x)$ называется интегрированием функции $f(x)$. Действие интегрирования обозначается так:

$\int f(x) dx$, где $\int$ – знак интеграла; $f(x)$ – подынтегральная функция; $f(x)dx$ – подынтегральное выражение.

Обратите внимание на то, что дифференцирование даёт однозначный результат: $F'(x) = f(x)$, а обратное действие – интегрирование (взятие интеграла или отыскание первообразной) – неод-

нозначный результат: $\int f(x) dx = F(x) + C$, где C – любое число (так называемая произвольная постоянная). Значит, для функции $f(x)$ мы имеем бесчисленное множество первообразных: $F(x) + C$. Это множество называется **неопределённым интегралом** от функции $f(x)$:

$$\int f(x) dx = F(x) + C. \quad (1)$$

Соотношение (1) эквивалентно соотношению $F'(x) = f(x)$, а также эквивалентно следующим соотношениям:

$$dF(x) = f(x)dx;$$

$$\int dF(x) = F(x) + C;$$

$$d \int f(x) dx = f(x) dx;$$

$$(\int f(x) dx)' = f(x).$$

(Продумайте, не торопитесь).

Зная таблицу производных, можно составить **таблицу интегралов**. Таблицу интегралов постепенно, по мере изучения темы «Техника интегрирования», надо выучить наизусть. Перепишите таблицу из задачника и прикрепите на видном месте. Ещё одну таблицу вложите в тетрадь для практических занятий. Таблицу каждый раз переписывайте собственноручно, это принесёт гораздо больше пользы, чем фотографирование или ксерокопирование. Возможности интегрирования с помощью одной только таблицы ограничены. Расширим эти возможности.

2. ПОДВЕДЕНИЕ ПОД ЗНАК ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Вспомните свойство **инвариантности** (неизменяемости) формы дифференциала первого порядка (или, как говорят, первого дифференциала): форма первого дифференциала функции не зависит от того, является аргумент этой функции независимым или сложным.

Если $dF(x) = F'(x)dx$, то и $dF(u) = F'(u)du$, где u – дифференцируемая функция какого-либо аргумента. Отсюда, если

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x) + C,$$

то и

$$\int dF(u) = \int F'(u)du = F(u) + C.$$

Мы получили свойство **инвариантности интеграла** относительно того, каким является аргумент: простым x или сложным u . Это замечательное свойство позволит нам значительно расширить возможности отыскания первообразных по сравнению с табличным интегрированием.

3. ИНТЕГРАЛ ОТ КОСИНУСА

Найдите первообразную: $\int \cos x \, dx$; $\int \cos t \, dt$; $\int \cos u \, du$. Не пропускайте задания! Представьте себе, что вместо t или u будет x^2 . Тогда тот же самый интеграл имеет вид

$$\int \cos(x^2)(2x dx) = \int \cos(x^2) dx^2 = \sin(x^2) + C. \quad (2)$$

Переход под знаком интеграла от $2x dx$ к dx^2 называется «подведение $2x$ под знак дифференциала». (Как еще можно назвать это преобразование? Обратите внимание: $(x^2)' = 2x$, значит, x^2 – это первообразная для $2x$; нахождение первообразной – это интегрирование, значит, подведение под знак дифференциала – это интегрирование того, что подводится под знак дифференциала.)

Интеграл $\int \cos(x^2)(x dx)$ почти такой же, как в формуле (2). Чего в нём не хватает по сравнению с интегралом в формуле (2)? Множителя 2 в подынтегральной функции. Добьёмся полного сходства, для этого подынтегральное выражение умножим на 2, а чтобы равенство сохранилось, разделим на 2:

$$\int \cos(x^2)(x dx) = \int \frac{1}{2} \cos(x^2)(2x dx).$$

Теперь «мешает» множитель $\frac{1}{2}$. На помощь приходит правило интегрирования: $\int A f(x) dx = A \int f(x) dx$, то есть **константу (постоянный множитель) можно выносить за знак интеграла**. (Правило надо выучить.) Полезно знать это правило и в «обратную сторону»: **постоянный множитель можно внести под знак интеграла**.

Итак,

$$\begin{aligned} \int \cos(x^2)(x dx) &= \int \frac{1}{2} \cos(x^2)(2x dx) = \left| u = x^2, du = 2x dx \right| = \\ &= \frac{1}{2} \int \cos(x^2)(2x dx) = \frac{1}{2} \int \cos(x^2)(dx^2) = \frac{1}{2} \sin(x^2) + C. \end{aligned}$$

(Так подробно мы выполняем действия только вначале, в будущем вы сможете по данному выше условию сразу дать ответ.)

Найдите первообразную:

$$\begin{aligned} &\int \cos(x^3)(3x^2 dx); \int \cos(x^3)(x^2 dx); \int \cos(x^4)(4x^3 dx); \\ &\int \cos(x^4)(x^3 dx); \int \cos(x^3)(5x^2 dx); \int \cos(x^4)(2x^3 dx). \end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл

$$\int \cos(x^2 + 5)(2x dx).$$

Сравните его с интегралом в формуле (2). В чём отличие? В сложном аргументе появилось слагаемое 5. Но

$$d(x^2 + 5) = dx^2 + d5 = dx^2 + 0 = 2x dx,$$

то есть $2x dx = d(x^2 + 5)$.

Здесь действует правило дифференцирования: **под знаком дифференциала можно добавить константу, от этого результат не изменится**.

Найдите первообразную:

$$\int \cos(x^2 + 5)x dx; \int \cos(x^3 + 1)(x^2 dx); \int \cos(2x^3 - 1)(x^2 dx).$$

Теперь подчеркнём то общее, что есть во всех предложенных выше интегралах:

- косинус зависит от сложного аргумента;
- в подынтегральном выражении или содержится дифференциал сложного аргумента, или, если не содержится, то дифференциал сложного аргумента можно сконструировать. Как это сделать? Используя свойства интеграла и дифференциала: константу можно внести под знак интеграла и дифференциала и вынести за знак интеграла; под знаком дифференциала можно добавить константу.

Все эти интегралы находят по формуле

$$\int \cos(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int \cos(\varphi(x)) d(\varphi(x)) = \sin(\varphi(x)) + C.$$

Продолжайте интегрировать косинус сложного аргумента (таблица интегралов должна быть на виду):

$$\int \cos \sqrt{x} \frac{dx}{2\sqrt{x}}; \int \cos(\ln x) \frac{dx}{x}; \int \cos \operatorname{arctg} x \frac{dx}{1+x^2};$$
$$\int \cos(e^x) e^x dx; \int \cos(e^{-x}) \frac{dx}{e^x}; \int \cos\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x^2}.$$

4. ИНТЕГРАЛ ОТ СИНУСА

Интеграл от синуса аргумента x равен минус косинусу аргумента x плюс константа:

$$\int \sin x dx = -\cos x + C.$$

Приведённые в конце этого параграфа примеры на нахождение первообразных выполняйте по формуле

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
1. Вводные понятия	3
2. Подведение под знак дифференциала	4
3. Интеграл от косинуса	5
4. Интеграл от синуса	7
5. Первообразная – арктангенс	8
6. Первообразная – арксинус или арккосинус	11
7. Первообразная – показательная функция	14
8. Первообразная функция – логарифм	14
9. Интеграл от степенной функции	16
10. Первообразная – длинный логарифм	21
11. Интегрирование дробно-рациональных функций	22
11.1. Простейшие рациональные дроби	23
11.2. Правильные и неправильные рациональные дроби	24
11.3. Интегрирование правильных дробно-рациональных функций	27
11.4. Случай действительных кратных корней знаменателя	31
11.5. «Любимая» ошибка студентов	32
11.6. Правило для кратных корней знаменателя	33
11.7. Комплексные корни многочленов	34
11.8. Разложение правильной рациональной дроби в случае комплексных корней знаменателя	35
11.9. Интегрирование простейшей дроби вида $\frac{bx+c}{x^2+px+q}$ в случае комплексных корней знаменателя (дискриминант отрицательный)	39
11.10. Интегрирование простейшей дроби вида $\frac{bx+c}{(x^2+px+q)^2}$ в случае комплексных корней знаменателя (дискриминант отрицательный)	40
12. Метод подстановки в неопределённом интеграле	41
12.1. Подстановка «чтобы все корни извлекались»	42
12.2. Подстановка «уничтожение трансцендентности»	47

12.3. Подстановка для упрощения многочленов	49
12.4. Обратная подстановка	50
13. Метод интегрирования по частям	52
14. Интегрирование тригонометрических выражений	55
14.1. Преобразование подынтегрального тригонометрического выражения к виду, удобному для интегрирования	55
14.2. Универсальная тригонометрическая подстановка $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$	59
14.3. Подстановка $z = \operatorname{tg} x$	60
14.4. Интегрирование функций вида $\frac{1}{\cos^m x \sin^n x}$	63
15. Рекуррентная формула для вычисления интеграла $J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$	70
16. Решение уравнения относительно искомого интеграла	72
17. Тригонометрические подстановки при интегрировании некоторых иррациональных функций	74
Заключение	77