

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

В.А. Иванов, М.А. Голованов

ТЕОРИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Часть 2

*Рекомендовано Научно-методическим советом
МГТУ им. Н.Э. Баумана в качестве учебного пособия
по курсу «Теория автоматического управления»*

Москва
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
2012

УДК 517(075.8)

ББК 22.176

И20

Рецензенты: *В.Л. Афонин, Б.И. Шахтарин*

Иванов В. А.

И20 Теория дискретных систем автоматического управления : учеб. пособие : в 2 ч. – Ч. 2 / В.А. Иванов, М.А. Голованов. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. — 98, [2] с. : ил.

Исследована устойчивость линейных дискретных систем автоматического управления (САУ), рассмотрены алгебраические и частотные критерии устойчивости, а также метод синтеза дискретных САУ с использованием логарифмических частотных характеристик (построение желаемых частотных характеристик, реализация последовательных и параллельных корректирующих устройств). Достаточно подробно изложен метод пространства состояний для дискретных САУ. Приведены способы определения уравнений состояний дискретных САУ с одним входом и одним выходом, критерии управляемости и наблюдаемости как для нестационарных, так и для стационарных линейных дискретных систем. Описана процедура синтеза модального управления и рассмотрено построение наблюдающих устройств полного и неполного порядка.

Для студентов, изучающих курс «Теория автоматического управления».

УДК 517(075.8)

ББК 22.176

1. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

1.1. Устойчивость движения по Ляпунову

1.1.1. Основные понятия и определения

Предположим, что дискретная система автоматического управления (САУ) описывается системой разностных уравнений

$$x_i[n+1] = f_i(n, x_1[n], \dots, x_k[n]) \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (1.1)$$

Правые части уравнений (1.1) полагаются однозначными непрерывными функциями переменных $n, x_1, \dots, x_k$. Тогда для любых заданных начальных условий

$$x_1[n_0] = x_{10}, \dots, x_k[n_0] = x_{k0} \quad (1.2)$$

существует и притом единственное решение системы разностных уравнений (1.1), удовлетворяющее этим начальным условиям. Систему уравнений (1.1) можно записать в векторной форме:

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{f}(n, \mathbf{x}[n]),$$

$$\text{где } \mathbf{x}[n] = \begin{bmatrix} x_1[n] \\ \dots \\ x_k[n] \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f}(n, \mathbf{x}[n]) = \begin{bmatrix} f_1(n, x_1[n], \dots, x_k[n]) \\ \dots \\ f_k(n, x_1[n], \dots, x_k[n]) \end{bmatrix}.$$

Начальные условия (1.2) примут вид $\mathbf{x}[n_0] = \mathbf{x}^0$. Пусть

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}[n] \quad (1.3)$$

— некоторое решение системы (1.1), удовлетворяющее начальным условиям в векторной форме

$$\boldsymbol{\xi}[n_0] = \mathbf{x}^0. \quad (1.4)$$

Решение называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, зависящее от ε , что для любого другого решения $x = \Phi[n]$, удовлетворяющего в начальный момент времени n_0 неравенству $\|x^0 - \Phi[n_0]\| < \delta$, будет справедливо неравенство $\|\xi[n] - \Phi[n]\| < \varepsilon$ для всех $n \geq n_0$.

Решение (1.3) называется *неустойчивым по Ляпунову*, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любого числа $\delta > 0$ найдется такой момент времени $n_1 > n_0$, что будет справедливо неравенство $\|\xi[n_1] - \Phi[n_1]\| \geq \varepsilon$, несмотря на то что имело место неравенство $\|x^0 - \Phi[n_0]\| < \delta$.

Решение (1.3) называется *асимптотически устойчивым*, если:

- 1) это решение устойчиво;
- 2) существует такое число $A > 0$, что для любого решения $x = \Phi[n]$, удовлетворяющего при $n = n_0$ неравенству $\|x^0 - \Phi[n_0]\| < A$, будет справедливо равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\xi[n] - \Phi[n]\| = 0$.

Движение, соответствующее решению (1.3), обычно называют *невозмущенным движением*. Другие решения ($x = \Phi[n]$), которые могут быть получены при изменении начальных условий (1.2), соответствуют *возмущенным движениям*. С помощью замены переменных

$$y = x - \xi[n] \quad (1.5)$$

исследование устойчивости решения (1.3) можно свести к исследованию устойчивости тривиального решения. При замене (1.5) система уравнений (1.1) примет вид

$$\begin{aligned} y[n+1] &= f(n, y[n] + \xi[n]) - f(n, \xi[n]), \\ \text{или } y[n+1] &= g(n, y[n]), \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $g(n, y[n]) = f(n, y[n] + \xi[n]) - f(n, \xi[n])$.

Очевидно, что $g(n, 0) = 0$, т. е. система уравнений (1.6) имеет тривиальное решение $y[n] = 0$. Если решение $x = \xi[n]$ системы уравнений (1.1) устойчиво или асимптотически устойчиво, то будет соответственно устойчивым или асимптотически устойчивым и тривиальное решение системы уравнений (1.6). Дадим определения устойчивости, неустойчивости и асимптотической устойчи-

ности тривиального решения. Пусть система уравнений

$$x[n+1] = f(n, x[n])$$

имеет тривиальное решение $x[n] = 0$, т. е. $f(n, 0) = 0$. Правильное решение называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, зависящее от ε , что для любого другого решения $x = \varphi[n]$, удовлетворяющего в начальный момент времени n_0 неравенству $\|\varphi[n_0]\| < \delta$, будет справедливо неравенство $\|\varphi[n]\| < \varepsilon$ для всех $n \geq n_0$.

Тривиальное решение называется *неустойчивым по Ляпунову*, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любого числа $\delta > 0$ найдется такой момент времени $n_1 > n_0$, что будет справедливо неравенство $\|\varphi[n_1]\| \geq \varepsilon$, несмотря на то что имело место неравенство $\|\varphi[n_0]\| < \delta$.

Тривиальное решение называется *асимптотически устойчивым*, если:

- 1) это решение устойчиво;
- 2) существует такое число $A > 0$, что для любого решения $x = \varphi[n]$, удовлетворяющего при $n = n_0$ неравенству $\|\varphi[n_0]\| < A$, будет справедливо $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi[n]\| = 0$.

Далее будем рассматривать устойчивость тривиального решения автономной системы разностных уравнений

$$x[n+1] = f(x[n]). \quad (1.7)$$

1.1.2. Теоремы Ляпунова об устойчивости и неустойчивости

Введем некоторые новые понятия. Функция $V(x_1, \dots, x_k)$ называется *знакоположительной* (*знакоотрицательной*) в некоторой области G фазового пространства X , если эта функция удовлетворяет неравенству $V(x_1, \dots, x_k) \geq 0$ ($V(x_1, \dots, x_k) \leq 0$) для всех точек этой области.

Функция $V(x_1, \dots, x_k)$ называется *определенно положительной* (*определенно отрицательной*) в области G , если для всех точек области, кроме начала координат, функция $V(x_1, \dots, x_k) > 0$ ($V(x_1, \dots, x_k) < 0$), а в начале координат, т. е. при $x_1 = \dots = x_k = 0$, функция $V(x_1, \dots, x_k) = 0$. Функции первого типа называются

также *знакопостоянными*, а функции второго типа — *знакоопределенными*.

Первой разностью функции $V(x_1, \dots, x_k)$, взятой в силу системы уравнений (1.7), называется функция

$$\begin{aligned}\Delta V(x_1, \dots, x_k) &= V(x_1[n+1], \dots, x_k[n+1]) - V(x_1[n], \dots, x_k[n]) = \\ &= V(f_1(x_1[n], \dots, x_k[n]), \dots, f_k(x_1[n], \dots, x_k[n])) - \\ &\quad - V(x_1[n], \dots, x_k[n]).\end{aligned}$$

Следующая теорема определяет условия устойчивости тривиального решения системы разностных уравнений (1.7).

Теорема 1.1. Если в некоторой окрестности начала координат существует знакоопределенная функция $V(x_1, \dots, x_k)$, такая, что ее первая разность в силу системы уравнений (1.7) является знакопостоянной функцией противоположного знака, то тривиальное решение системы (1.7) устойчиво.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть область G существования знакоопределенной функции $V(x_1, \dots, x_k)$, удовлетворяющей условию теоремы, определяется неравенством $\|\mathbf{x}\| \leq H$. Обозначим $l = \inf_{\|\mathbf{x}\|=\varepsilon} V(\mathbf{x})$. Таким образом, для всех точек сферы $\|\mathbf{x}\| = \varepsilon$

функция $V(\mathbf{x}) \geq l$. Выберем теперь такое число $\delta > 0$, чтобы сфера $\|\mathbf{x}\| = \delta$ целиком лежала внутри области G_1 , для которой $V(\mathbf{x}) < l$. В силу свойств функции $V(\mathbf{x})$ такое число δ всегда существует. Далее выберем начальное значение $\mathbf{x}[n_0] = \mathbf{x}_0$ таким образом, чтобы выполнялось неравенство $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$. Тогда для любого $n > n_0$ будет иметь место неравенство $\|\mathbf{x}[n]\| < \varepsilon$, что и означает устойчивость тривиального решения. В самом деле, первая разность функции $V(\mathbf{x}[n])$ будет иметь вид

$$\Delta V(\mathbf{x}[n]) = V(\mathbf{x}[n+1]) - V(\mathbf{x}[n]) = -W(\mathbf{x}[n]),$$

причем функция $W(\mathbf{x})$ знакоположительная. Тогда

$$V(\mathbf{x}[n]) - V(\mathbf{x}[n_0]) = - \sum_{i=n_0}^{n-1} W(\mathbf{x}[i]) \leq 0.$$

Отсюда следует, что

$$V(\mathbf{x}[n]) \leq V(\mathbf{x}[n_0]) < l$$

и траектория не достигает границы овала $V(\mathbf{x}) = l$, а значит, и границы сферы $\|\mathbf{x}\| = \varepsilon$. Это свидетельствует о том, что тривиальное решение $\mathbf{x}[n] = \mathbf{0}$ устойчиво. ■

Рассмотрим теорему об асимптотической устойчивости.

Теорема 1.2. Если в некоторой окрестности начала координат существует знакоопределенная функция $V(x_1, \dots, x_k)$, первая разность которой в силу системы уравнений (1.7) является знакоопределенной функцией противоположного знака, то тривиальное решение системы (1.7) асимптотически устойчиво.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего отметим, что в силу теоремы (1.1) тривиальное решение системы уравнений (1.7) будет устойчивым. Пусть функция $V(\mathbf{x})$ положительно определенная. Тогда согласно условию теоремы ее первая разность в силу системы уравнений (1.7) будет отрицательно определенной функцией, т. е.

$$\Delta V(\mathbf{x}[n]) = V(\mathbf{x}[n+1]) - V(\mathbf{x}[n]) = -W(\mathbf{x}[n]),$$

причем функция $W(\mathbf{x})$ положительно определенная. Поэтому имеют место неравенства

$$V(\mathbf{x}[n+1]) < V(\mathbf{x}[n]) < \dots < V(\mathbf{x}[n_0]).$$

Отсюда следует, что функция $V(\mathbf{x}[n])$ при $n \rightarrow \infty$ образует монотонно убывающую последовательность, ограниченную снизу, ибо $V(\mathbf{x}[n]) \geq 0$.

Всякая монотонно убывающая ограниченная снизу последовательность имеет предел, поэтому существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(\mathbf{x}[n]) = \alpha.$$

Покажем, что этот предел равен нулю. В самом деле, пусть $\alpha > 0$. Тогда последовательность значений $\{\mathbf{x}[n]\}$ не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ и существует область $\|\mathbf{x}[n]\| \leq h$, куда изображающая точка не попадает. Отсюда следует, что

$$-W(\mathbf{x}[n]) \geq l' > 0$$

для всех $n > n_0$. Тогда

$$V(\mathbf{x}[n]) < V(\mathbf{x}[n_0]) - nl' < 0$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ.....	3
1.1. Устойчивость движения по Ляпунову	3
1.1.1. Основные понятия и определения	3
1.1.2. Теоремы Ляпунова об устойчивости и неустойчивости	5
1.1.3. Исследование устойчивости по уравнениям линейного приближения	9
1.2. Устойчивость линейных дискретных САУ.....	14
1.2.1. Устойчивость однородной системы.....	14
1.2.2. Устойчивость неоднородной системы.....	16
1.2.3. Устойчивость линейных систем с постоянными коэффициентами	17
1.2.4. Алгебраические критерии устойчивости	19
1.2.5. Частотные критерии устойчивости	23
2. ЧАСТОТНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ САУ.....	27
2.1. Анализ линейных дискретных САУ	27
2.1.1. Анализ устойчивости и точности с помощью ЛЧХ...	27
2.1.2. Коэффициенты ошибки	29
2.2. Синтез линейных дискретных САУ	33
2.2.1. Требования к синтезируемой системе	33
2.2.2. Построение желаемой ЛЧХ	38
2.2.3. Синтез корректирующих устройств.....	40
3. МЕТОД ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ В ТЕОРИИ ДИСКРЕТНЫХ САУ.....	51
3.1. Уравнения состояния.....	51

3.1.1. Основные понятия метода пространства состояний . .	51
3.1.2. Определение уравнений состояния для САУ с одним входом и одним выходом по разностному уравнению	52
3.1.3. Определение уравнений состояния дискретной САУ с одним входом и одним выходом по передаточной функции системы	57
3.2. Управляемость и наблюдаемость дискретных САУ	71
3.2.1. Управляемость линейных дискретных САУ. Критерии управляемости	71
3.2.2. Наблюдаемость линейных дискретных САУ. Критерии наблюдаемости	74
3.2.3. Двойственность управляемости и наблюдаемости . . .	81
3.3. Модальное управление в линейных дискретных САУ	83
3.3.1. Синтез модального управления для дискретных САУ	83
3.3.2. Уравнения наблюдающих устройств полного и неполного порядка	88
Литература	97