

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

А.А. Пожалостин, А.В. Паншина

ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕОРИЯ ГИРОСКОПА

*Методические указания к изучению раздела
«Сферическое движение твердого тела,
приближенная теория гироскопа»
курса «Теоретическая механика»*

М о с к в а

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана

2 0 0 9

УДК 531.38
ББК 22.213
П46

Рецензент *С.Н. Темнов*

Пожалостин А.А., Паншина А.В.

П46 Приближенная теория гироскопа: Метод. указания к изучению раздела «Сферическое движение твердого тела, приближенная теория гироскопа» курса «Теоретическая механика». — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. — 28 с.: ил.

Подробно и наглядно изложена приближенная теория гироскопа.

Для преподавателей, ведущих практические занятия, и студентов приборостроительных и машиностроительных специальностей МГТУ им. Н.Э. Баумана и других технических университетов.

УДК 531.38
ББК 22.213

Учебное издание

**Пожалостин Алексей Алексеевич
Паншина Алла Викторовна**

ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕОРИЯ ГИРОСКОПА

Редактор *С.А. Серебрякова*
Компьютерная верстка *С.А. Серебряковой*

Подписано в печать 21.12.2008. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 1,63. Уч.-изд. л. 1,15.

Тираж 100 экз. Заказ .

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
Типография МГТУ им. Н.Э. Баумана
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5

© Пожалостин А.А., Паншина А.В., 2009

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009

ВВЕДЕНИЕ

В работе изложена методика изучения движения гироскопа, основанная на идее Б.В. Булгакова и курсе лекций, прочитанных в 1974–1975 гг. профессором Г.Д. Блюминым на факультете повышения квалификации преподавателям теории гироскопов. Основная идея этой методики заключается в разложении угловой скорости гироскопа и действующего на него момента пары сил на две составляющие — осевую (собственную) и экваториальную.

Показано, что результаты, полученные по приближенной теории гироскопа, в некоторых случаях совпадают с результатами решения уравнений Эйлера. На примере гироскопа Лагранжа проиллюстрировано применение общих теорем динамики и указано на различие гироскопического момента и главного момента сил инерции гироскопа. Рассмотрен также редко затрагиваемый в учебниках случай подвижного основания гироскопа.

1. ГИРОСКОП. ДОПУЩЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННОЙ ТЕОРИИ ГИРОСКОПА

Известно [1 – 6], что при сферическом движении твердого тела его кинетический момент относительно неподвижного центра O представляет собой пространственный вектор $\vec{K}_O$ с компонентами K_{Ox}, K_{Oy}, K_{Oz} (рис. 1):

$$\vec{K}_O = K_{Ox}\vec{i} + K_{Oy}\vec{j} + K_{Oz}\vec{k}, \quad (1)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орты некоторой системы координат $Oxyz$, начало которой находится в закрепленной точке O тела. Оси системы координат могут быть как неподвижными, так и подвижными, например связанными с вращающимся телом.

Проекции K_{Ox}, K_{Oy}, K_{Oz} в общем случае имеют вид [1]

$$\begin{cases} K_{Ox} = J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z, \\ K_{Oy} = -J_{yx} \omega_x + J_y \omega_y - J_{yz} \omega_z, \\ K_{Oz} = -J_{zx} \omega_x - J_{zy} \omega_y + J_z \omega_z. \end{cases} \quad (2)$$

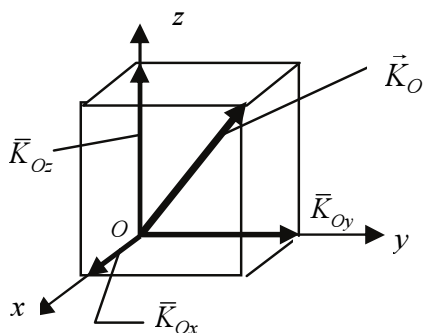


Рис. 1

Здесь J_x, J_y, J_z — осевые моменты инерции тела, например:

$$J_x = \sum m_k \rho_{kx}^2 = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2), \quad (3)$$

где m_k — масса k -й точки тела; ρ_{kx} — кратчайшее расстояние от k -й точки до оси Ox ; y_k, z_k — координаты k -й точки;

$$J_{xy} = J_{yx} = \sum_{k=1}^N m_k x_k y_k, \quad J_{yz} = J_{zy} = \sum_{k=1}^N m_k y_k z_k, \quad J_{xz} = J_{zx} = \sum_{k=1}^N m_k x_k z_k$$

— центробежные моменты инерции твердого тела. Эти величины могут иметь любой знак. В том случае, когда ось Oz является главной осью инерции тела, $J_{xz} = J_{yz} = 0$.

Вектор

$$\bar{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$$

представляет собой вектор угловой скорости тела. Из системы (2) следует, что если $\bar{\omega} = (0, 0, \omega)^T$, т. е. твердое тело вращается только вокруг оси Oz , то вектор $\bar{K}_O$ в общем случае не направлен по оси вращения Oz . Он имеет ненулевые компоненты по осям Ox , Oy , Oz (рис. 2):

$$K_{Ox} = -J_{xz}\omega, \quad K_{Oy} = -J_{yz}\omega, \quad K_{Oz} = J_z\omega.$$

Вектор $\bar{K}_O$ будет направлен по оси Oz только тогда, когда $J_{xz} = J_{yz} = 0$, а именно когда ось Oz будет осью динамической симметрии твердого тела (главной центральной осью инерции тела). Тогда $\bar{K}_O = J_z\omega \bar{k}$ (рис. 3).

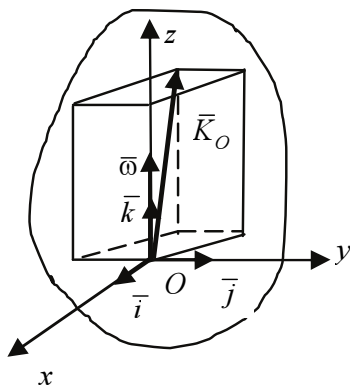


Рис. 2

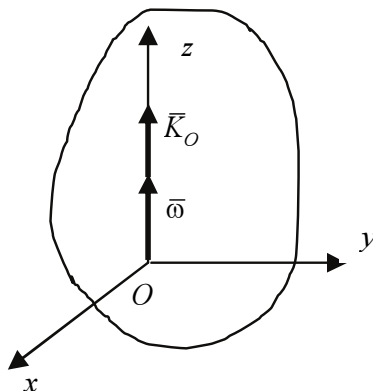


Рис. 3

Очевидно, что для того, чтобы оси координат могли быть главными осями инерции для неподвижной точки O в течение всего

времени вращения тела, они должны быть скреплены с самим телом. Поэтому здесь $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ — орты системы координат $Oxyz$, связанной с вращающимся телом.

Гирископом считается материальное тело, имеющее ось динамической симметрии и быстро вращающееся вокруг этой оси (рис. 4).

Точка O — неподвижная точка гироскопа. Ось Oz — ось фигуры гироскопа, при этом она является главной центральной осью инерции. Плоскость Oxy — экваториальная плоскость гироскопа.

Разложим вектор мгновенной угловой скорости гироскопа $\bar{\omega}$ на две составляющие: $\bar{\omega} = \bar{\omega}_c + \bar{\omega}_s$ (здесь $\bar{\omega}_c$ — собственная угловая скорость гироскопа; $\bar{\omega}_s$ — экваториальная составляющая угловой скорости).

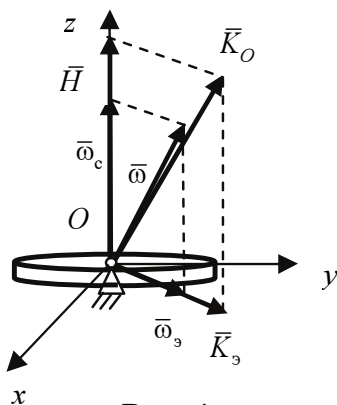


Рис. 4

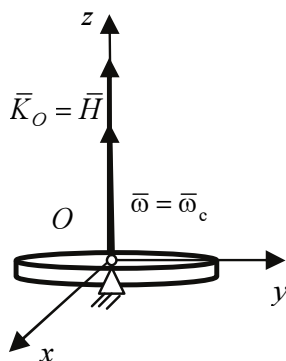


Рис. 5

Вычислим кинетический момент гироскопа $\bar{K}_O$ относительно неподвижной точки O . Пусть J — момент инерции относительно оси фигуры гироскопа Oz . Тогда $\bar{H} = J\bar{\omega}_c$ — **собственный кинетический момент** гироскопа. Кроме того, $\bar{K}_s = A\bar{\omega}_s$ — экваториальный кинетический момент гироскопа, так как в силу симметрии тела любая ось, проходящая через точку O и лежащая в экваториальной плоскости, является главной осью инерции гироскопа (здесь A — экваториальный момент инерции).

Тогда можно записать $\bar{K}_O = \bar{H} + \bar{K}_s$ или $\bar{K}_O = J\bar{\omega}_c + A\bar{\omega}_s$ (векторы $\bar{H}$ и $\bar{K}_s$ направлены по векторам $\bar{\omega}_c$ и $\bar{\omega}_s$ соответственно).

На основе изложенного выше можно заключить, что подвижная ось Oz и векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{K}_O$ лежат в одной плоскости (см. рис. 4).

Сформулируем *основные допущения приближенной теории гироскопа*.

1. Так как на практике $\omega_c \gg \omega_3$, примем, что $\omega \cong \omega_c$, т. е. пренебрежем ω_3 .

2. Поскольку $H = J\omega_c$, $K_3 = A\omega_3$ и $\omega_c \gg \omega_3$, то $H \gg K_3$, поэтому будем считать, что

$$K_O = H. \quad (4)$$

3. Окончательно примем, что вектор $\vec{K}_O = \vec{H}$ и направлен по оси фигуры гироскопа (рис. 5).

Итак, основные допущения приближенной теории гироскопа состоят в том, что угловая скорость гироскопа принята равной собственной угловой скорости; модуль кинетического момента гироскопа K_O равен собственному кинетическому моменту H ; вектор $\vec{K}_O$ равен $\vec{H}$ и направлен по оси фигуры гироскопа.

2. ГИРОСКОПИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ, НАБЛЮДАЕМЫЕ У БЫСТРОВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА

Для объяснения динамического поведения быстровращающегося тела применим теорему об изменении кинетического момента системы

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^{(e)}$$

и теорему Резаля

$$\vec{u}_B = \vec{M}_O^{(e)}, \quad (5)$$

где $\vec{u}_B$ — скорость конца B вектора кинетического момента $\vec{K}_O$; $\vec{M}_O^{(e)}$ — главный момент внешних сил относительно неподвижно-го центра O .

Представим в общем случае $\vec{M}_O^{(e)}$ в виде суммы:

$$\vec{M}_O^{(e)} = \vec{M}_1 + \vec{M}_3, \quad (6)$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
1. Гироскоп. Допущения приближенной теории гироскопа	4
2. Гироскопические эффекты, наблюдаемые у быстровращающегося тела	7
3. Гироскопический момент	10
4. Определение главного момента сил инерции гироскопа	21
5. Движение гироскопа с подвижной точкой опоры (подвеса)	24
6. Регулярная прецессия астатического гироскопа по инерции	25
Список литературы	27