

И.В. Меньшова, А.Н. Семакин

Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве

Учебно-методическое пособие



Москва

ИЗДАТЕЛЬСТВО

МГТУ им. Н.Э. Баумана

2025

УДК 514.74
ББК 22.151.5
М50

Издание доступно в электронном виде по адресу
<https://press.bmstu.ru/catalog/item/8415/>

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Высшая математика»

*Рекомендовано Научно-методическим советом
МГТУ им. Н.Э. Баумана в качестве учебно-методического пособия*

Рецензенты:

д-р пед. наук проф. *Т.А. Лавина*;
канд. физ.-мат. наук доц. *Г.П. Емгушева*

Меньшова, И. В.
М50 Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве : учебно-методическое пособие / И. В. Меньшова, А. Н. Семакин. — Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2025. — 155, [1] с. : ил.

ISBN 978-5-7038-6475-3

Изложены теоретические положения разделов «Прямые и плоскости», «Кривые и поверхности второго порядка» и «Комплексные числа и многочлены» дисциплины «Аналитическая геометрия», преподаваемой студентам 1-го курса. Приведены типовые примеры. Представлены методические указания к выполнению практических задач рубежного контроля и индивидуального домашнего задания.

Для студентов всех специальностей и направлений подготовки Головного учебно-исследовательского и методического центра профессиональной реабилитации лиц с ограниченными возможностями здоровья (инвалидов) по слуху (ГУИМЦ МГТУ им. Н.Э. Баумана).

УДК 514.74
ББК 22.151.5



Уважаемые читатели! Пожелания, предложения, а также сообщения о замеченных опечатках и неточностях Издательство просит направлять по электронной почте: press@bmstu.ru

ISBN 978-5-7038-6475-3

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2025
© Оформление. Издательство
МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2025

Предисловие

Учебно-методическое пособие предназначено для самостоятельного изучения разделов «Прямые и плоскости», «Кривые и поверхности второго порядка» и «Комплексные числа и многочлены» дисциплины «Аналитическая геометрия», преподаваемой студентам 1-го курса ГУИМЦ МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Цель пособия — ознакомить студентов с основными теоретическими положениями и способами решения типовых задач аналитической геометрии и выработать у них навыки работы с комплексными числами и многочленами.

Пособие включает в себя теоретическую (I) и практическую (II) части. Теоретическую часть составляют разделы I.1–I.7. Разделы I.1–I.3 посвящены алгебраическим способам описания таких простейших геометрических объектов, как прямые и плоскости, связям между их геометрическими свойствами и коэффициентами алгебраических уравнений первой степени.

В разделах I.4, I.5 рассматриваются более сложные геометрические объекты — кривые и поверхности второго порядка, задаваемые аналитически алгебраическими уравнениями второй степени. Их геометрические свойства приводятся в тесной связи с коэффициентами соответствующих алгебраических уравнений. Форма поверхностей исследуется методом параллельных сечений.

В разделах I.6, I.7 подробно изложены основы теории комплексных чисел и теории многочленов, необходимых для анализа мнимых кривых и поверхностей, а также при исследовании кривых и поверхностей высших порядков (третьего, четвертого и т. д.).

В практической части подробно рассмотрены индивидуальные домашние задания и приведены примеры решения задач рубежного контроля. В издание также включены вопросы и задания для самопроверки.

В тексте пособия используется цветовая дифференциация элементов формул для выделения одних и тех же математических объектов в разных выражениях; также цветом выделены элементы чертежей, что существенно упрощает восприятие учебного материала.

Изучив материал пособия, студенты будут:

знать

виды, свойства и способы аналитического описания простейших геометрических объектов (прямые и плоскости, кривые и поверхности второго порядка); основные понятия теории комплексных чисел и многочленов;

уметь

составлять уравнения простейших геометрических объектов по их заданным свойствам, выявлять свойства простейших геометрических объектов по их заданным уравнениям, оперировать комплексными числами и многочленами;

владеть

техникой исследования свойств простейших геометрических объектов.

Предлагаемое пособие может быть рекомендовано студентам всех технических специальностей и направлений подготовки, изучающих разделы «Прямые и плоскости», «Кривые и поверхности второго порядка» и «Комплексные числа и многочлены» в рамках тех или иных учебных дисциплин.

Введение

Аналитическая геометрия — раздел геометрии, который исследует простейшие геометрические объекты (точки, прямые, плоскости и т. п.) средствами элементарной алгебры на основе метода координат. Аналитическая геометрия предоставляет математический аппарат, позволяющий аналитически описывать геометрические объекты и решать задачи, связанные с их положением на плоскости и в пространстве.

Основоположники аналитической геометрии — два известных французских ученых XVII в. — Пьер де Ферма и Рене Декарт, представившие свои разработки в данной области научному сообществу практически одновременно и независимо друг от друга. В 1636 г. П. Ферма в частном порядке с помощью французского математика и физика Марена Мерсенна распространил рукописный трактат «Введение к теории плоских и пространственных мест», а в 1637 г. Р. Декарт в Лейдене (Нидерланды) издал трактат «Рассуждение о методе» с отдельным приложением «Геометрия». В обеих работах — «Введение к теории...» Ферма и «Геометрия» Декарта — была представлена идея описания геометрических линий с помощью алгебраических уравнений, рассматривалась возможность решения геометрических задач алгебраическими методами и излагалось мнение о существенной простоте и плодотворности нового подхода по сравнению с чисто геометрическим. Впоследствии «Геометрия» Декарта обрела заметную популярность, чем работа Ферма, став настольной книгой нескольких поколений математиков XVII–XVIII вв., что было обусловлено ее большей доступностью и введением новой, удобной и простой в обращении математической символики, которая с небольшими изменениями используется до сих пор.

В последующие годы развитием идей аналитической геометрии занимались такие ученые, как Флоримон де Бон, Франц ван Схотен, Габриэль Крамер и др. Опубликованный в 1748 г. второй том «Введения в анализ бесконечных» Леонарда Эйлера считается первым учебником по аналитической геометрии, хотя сам термин «аналитическая геометрия» в современном его понимании утвердился лишь в конце XVIII в.

В основе аналитической геометрии лежит метод координат, предполагающий введение на плоскости или в пространстве вспомогательного геометрического объекта — системы координат, которая позволяет каждой точке плоскости или пространства поставить в соответствие ряд вещественных чисел, называемых ее координатами. Далее всякий геометрический объект рассматривается как совокупность точек, удовлетворяющих тем или иным геометрическим свойствам. Например, все точки окружности удалены от ее

центра на одно и то же расстояние. Эти свойства позволяют связать координаты точек рассматриваемых геометрических объектов с помощью каких-либо алгебраических зависимостей (уравнений, неравенств). Применить метод координат — значит преобразовать геометрическую задачу в алгебраическую и тем самым свести изучение геометрических объектов к анализу определяющих их алгебраических зависимостей.

Со временем наряду с методом координат в аналитической геометрии важное значение приобрели методы векторной алгебры, с помощью которых можно описать некоторые свойства геометрических фигур и ввести основные понятия и формулы. Основоположниками векторного исчисления (середина XIX в.) признаны ирландский математик Уильям Роуэн Гамильтон и немецкий математик Герман Грассман.

Особенность методов аналитической геометрии состоит в том, что для их применения требуется минимально возможное использование чертежей, поскольку почти вся работа сводится к исследованию и решению уравнений. Это позволяет устанавливать различные свойства геометрических фигур путем последовательного проведения одних и тех же алгебраических преобразований, в отличие от традиционной геометрии, в которой необходимо разрабатывать методы доказательств для каждого случая.

Средствами аналитической геометрии можно решать различные геометрические задачи: вычислять расстояния между точками, определять точки пересечения линий, находить линии пересечения поверхностей и др.

В аналитической геометрии систематически исследуют так называемые алгебраические линии первого и второго порядков на плоскости: линии первого порядка — это прямые; важнейшие линии второго порядка — эллипс, гипербола, парабола, пара пересекающихся прямых. Эти линии в декартовых прямоугольных координатах определяются алгебраическими уравнениями соответственно первой и второй степени. Линии второго порядка появились как сечения конических поверхностей. Они встречаются во многих задачах естествознания и техники.

Например, камень или снаряд, выпущенный под острым углом к горизонту, летит по кривой, близкой к параболе (форма кривой немного искажается из-за сопротивления воздуха). Для устройства разнообразных прожекторов и антенн используются так называемые параболические зеркала. На производстве в некоторых механизмах применяются эллиптические зубчатки. Многие физические величины связаны между собой обратно пропорциональной зависимостью (например, давление и объем газа согласно закону Бойля — Мариотта). Графически такую функциональную зависимость выражает гипербола.

Важнейшее значение кривые второго порядка приобрели после открытий немецкого астронома Иоганна Кеплера и английского физика и математика Исаака Ньютона. Кеплер, наблюдая за видимыми перемещениями планет на небесной сфере, установил, что траектории движения планет Солнечной системы имеют форму эллипса, в одном из фокусов которого находится Солнце. Ньютон не только теоретически обосновал законы движения планет,

но и доказал, что каждое тело под действием притяжения другого тела может двигаться либо по эллипсу, либо по параболе, либо по гиперболе. В частности, по этим кривым происходит движение всех комет Солнечной системы.

В настоящее время по эллиптическим орбитам вращаются тысячи искусственных спутников Земли, десятки космических станций отправлены к Луне, Венере и Марсу, поэтому использование кривых второго порядка стало более интенсивным, чем прежде.

Значительная часть деталей в сфере машиностроения и приборостроения в поперечном сечении имеет форму эллипса, в связи с чем на различных этапах проектирования машин и приборов возникает вопрос построения эллипса с заданным эксцентриситетом.

С помощью методов аналитической геометрии проводятся исследования пространственных фигур — поверхностей. Плоскости являются единственными алгебраическими поверхностями первого порядка. К важнейшим алгебраическим поверхностям второго порядка относят эллипсоиды, гиперboloиды, параболоиды, конические и цилиндрические поверхности.

Поверхности второго порядка имеют прямое отношение к механике, физике твердого тела, теоретической физике и инженерному делу. Например, свойство параболоидов фокусировать параллельный пучок волн применяется при создании антенн и зеркалов телескопов. Изучая напряжения, возникающие в твердом теле, оперируют понятием «эллипсоид напряжений». Примером цилиндрических и конических поверхностей могут служить обычные бытовые светильники.

При строительстве мачт и телебашни (Шуховской башни) на Шаболовке (проект 1890-х годов, сдача в эксплуатацию 28 февраля 1922 г.) русский инженер, архитектор и изобретатель Владимир Григорьевич Шухов использовал возможность воссоздания формы однополосного гиперboloида, привлекая лишь прямые линии.

Аналогичную особенность имеет и седлообразная поверхность гиперболического параболоида, что позволяет легко строить крыши красивой формы из прямых балок, используя древесину, сталь или другие материалы. В частности, такую форму имеют крыши крытого катка в г. Коломне, Лондонского велопарка, железнодорожного вокзала г. Варшавы, арены Дортон в Северной Каролине (США) и др.

Методы аналитической геометрии легко поддаются обобщению и могут применяться при исследовании геометрических объектов в многомерных пространствах, которые используются, например, в аналитической механике Жозефа Луи Лагранжа и Уильяма Роуэна Гамильтона. Главы n -мерной аналитической геометрии были опубликованы Германом Грассманом и Артуром Кэли в 1843 г. К числу основателей многомерной геометрии относят и Августа Фердинанда Мебиуса.

Аналитическая геометрия служит математической основой для компьютерной графики, широко используемой при производстве фильмов, создании мультипликации, разработке компьютерных игр и т. д. Визуализация объектов

Оглавление

Предисловие	3
Введение	5
Латинский алфавит	9
I. Теоретическая часть	10
I.1. Прямая на плоскости	10
I.1.1. Декартова прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве	10
I.1.2. Приложения метода координат	11
I.1.3. Понятие об уравнении линии на плоскости	14
I.1.4. Различные виды уравнения прямой на плоскости	15
I.1.5. Расстояние от точки до прямой на плоскости	23
I.1.6. Взаимное расположение двух прямых на плоскости	26
I.2. Плоскость в пространстве	34
I.2.1. Понятие об уравнении поверхности в пространстве	34
I.2.2. Различные виды уравнения плоскости	35
I.2.3. Расстояние от точки до плоскости	43
I.2.4. Взаимное расположение двух плоскостей	45
I.3. Прямая в пространстве	48
I.3.1. Понятие об уравнении линии в пространстве	48
I.3.2. Различные виды уравнений прямой в пространстве	49
I.3.3. Расстояние от точки до прямой в пространстве	55
I.3.4. Взаимное расположение двух прямых в пространстве	56
I.3.5. Расстояние между двумя прямыми в пространстве	62
I.3.6. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве ..	63
I.4. Линии второго порядка	69
I.4.1. Понятие линии второго порядка	69
I.4.2. Окружность	70
I.4.3. Эллипс	75
I.4.4. Гипербола	81
I.4.5. Парабола	87
I.5. Поверхности второго порядка	93
I.5.1. Понятие поверхности второго порядка	94
I.5.2. Эллипсоид	95
I.5.3. Гиперболоид	96
I.5.4. Параболоид	98
I.5.5. Конические поверхности	101
I.5.6. Цилиндрические поверхности	102
I.6. Комплексные числа	111
I.6.1. Понятие комплексного числа	111
I.6.2. Алгебраическая форма записи комплексного числа	112
I.6.3. Геометрическое изображение комплексных чисел	114
I.6.4. Тригонометрическая форма записи комплексного числа	116

I.6.5. Показательная форма записи комплексного числа	118
I.6.6. Корень n -й степени	119
I.7. Многочлены в действительной и комплексной областях	122
I.7.1. Понятие многочлена	122
I.7.2. Разложение многочленов на неприводимые множители	123
I.7.3. Деление многочленов	126
Вопросы и задания для самопроверки	131
II. Практическая часть	135
II.1. Индивидуальное домашнее задание	135
II.1.1. Прямая линия и плоскость	135
II.1.2. Кривые второго порядка	145
II.2. Образцы заданий рубежного контроля	147
Литература	153