

1485748

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ, ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ
РОССИИ

Московский ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции и
ордена Трудового Красного Знамени государственный
технический университет им. Н. Э. Баумана

На правах рукописи

УДК: 517.518.533.6

Хрущ Виктор Кузьмич

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ И ГАЗА НА
ОСНОВЕ ПОСЕРЕЖЕННО-ТРЕУГОЛЬНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

05.13.18 - теоретические основы математического
моделирования, численные методы и комплексные программы

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ, ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ
РОССИИ

Московский ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции и
ордена Трудового Красного Знамени государственный
технический университет им. Н. Э. Баумана

На правах рукописи

УДК: 617.4.518+ 533.6

Хрущ Виктор Кузьмич

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ И ГАЗА НА
ОСНОВЕ ПОПЕРЕМЕННО-ТРЕУГОЛЬНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

05.13.18 - теоретические основы математического
моделирования, численные методы и комплексы программ.

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук

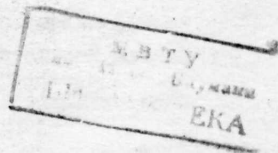
НТБ МГТУ им. Н. Э. Баумана



1085748

Хрущ В. К. Численное модел

Москва 1992



Работа выполнена в ордена Трудового Красного Знамени
Днепропетровском государственном университете имени 300-летия
воссоединения Украины с Россией

* Официальные оппоненты

доктор физико-математических наук, профессор В.В.Щенников
доктор физико-математических наук, профессор Г.А.Тирский
доктор физико-математических наук В.А.Полянский

Ведущее предприятие:

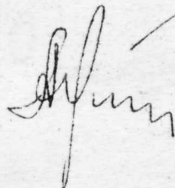
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша

Защита состоится 12 мая 1992 г. в II час 00 мин.
на заседании специализированного совета по защите докторских
диссертаций Д 053.15.12 при Московском государственном
техническом университете им. Н.Э. Баумана по адресу:
107005, Москва, 2-я Бауманская ул., 9.5

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке универси-
тета. Просим Ваши отзывы на автореферат в двух экземплярах,
заверенные печатью учреждения, направлять по указанному адресу.

Автореферат разослан "10" "апреля" 1992г.

Ученый секретарь
специализированного совета,
кандидат технических наук



А.Г. Цицин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Становление ЭВМ как основного инструмента исследования и решения задач механики жидкости и газа ставит проблему разработки высокоэффективных и теоретически обоснованных методов численного интегрирования уравнений Эйлера и Навье-Стокса. Создание новых разностных алгоритмов решения задач механики жидкости и газа стимулируется возрастающими требованиями к точности и обоснованности численных расчетов, и, с другой стороны, ограниченностью размеров используемой разностной сетки. Несмотря на явный прогресс роста мощности и быстродействия ЭВМ, требуемые в механике вязкого газа размеры сеток, обеспечивающие адекватность дискретной и физической модели, пока недоступны в полной мере существующим ЭВМ.

Использование неравномерных сеток с малыми пространственными шагами ставит проблему создания неявных разностных схем с большим запасом устойчивости и эффективной разрешимостью сопоставимой с явными алгоритмами. Новые разностные алгоритмы, полученные на базе дискретных моделей движущейся среды, должны минимально искажать решения недопустимыми схемными осцилляциями разностного решения, проявления схемной вязкости не должны затухивать влияние физической вязкости, причем эти требования должны быть реализуемы на реальных сетках. Противоречие этих требований определяет актуальность проблемы численного моделирования течений жидкости и газа.

Весьма важным для практики является разработка методов решения межграничных задач газовой динамики и теории упругости оболочек, гидрогазодинамики и теплообмена.

Выбранное направление численного моделирования задач механики жидкости и газа основано на построении алгебраических законов сохранения в форме уравнений с треугольными матрицами, соответствующих физическим процессам переноса с конечной скоростью. Актуальность общего направления исследования подтверждается успешным применением этой идеи в задачах теплопроводности, при решении эллиптических задач, откуда и было заимствовано название попеременно-треугольные разностные схемы.

Обзор состояния проблемы. В странах СНГ и за рубежом в настоящее время интенсивно работает ряд научных школ, разрабатывающих и использующих методы математического моделирования в механике жидкости и газа. Достижения в вычислительной математике

тике послужили основой введения новых концепций в механике жидкости и газа, направлений в науке, получивших название "математическое моделирование", "вычислительный эксперимент". В Советском Союзе эти направления возглавляли наиболее крупные ученые, академики Белоцерковский О.М., Дородницын А.А., Марчук Г.И., Самарский А.А., Струминский В.В., Яненко Н.Н., чл. корр. Бабенко К.И., Годунов С.К., Русанов В.В., Шокин Ю.И. и др.

Основными направлениями поиска эффективных методов численного моделирования являются:

- создание схем повышенного порядка точности / Русанов В.В., Толстых А.И., Липиницкий Ю.М., Пасконов В.М., MacCormack R.W. /
- расщепление задач на ряд простейших, эффективно решаемых на ЭВМ / Яненко Н.Н., Дьяконов Е.Г., Самарский А.А., Марчук Г.И., Ковеня В.М., Давыдов Ю.И., Harlow F.H. /
- обеспечение новых качественных свойств разностных решений: монотонность профиля решения при минимальных диссипативных погрешностях / Колган В.П., Фаворский А.П., Фурсенко А.А., Крайко А.Н., Иванов М.Я., Boris J.P., Book D.L., van Leer B. /
- ограниченность и невозрастание полной вариации сеточного решения при сохранении высокого ($P \geq 2$) порядка точности / Шенников В.В., Панарин А.И., Harten A., Yee H.C. /
- создание гибридных алгоритмов, обеспечивающих минимальное размазывание скачков уплотнения и контактных разрывов при сквозном счете / Колган В.П., Крайко А.Н., Копченков В.И., Тихкин В.Ф., Фаворский А.П., Жмакин А.И., Фурсенко А.А., Карпов В.Я., Chakravarthy S.R., Sod G.A., Steger J.L., Warming R.F. /
- организация и создание вычислительных алгоритмов, соответствующих физическим процессам переноса при течении газа, маршевые алгоритмы / Ковеня В.М., Тирский Г.А., Головачев Ю.П., Нейгин С.В., Черный С.Г., Davis R.T., Rubin S.G. /,
- характеристические алгоритмы / Холодов А.С., Карпов В.Я., Борисов В.М., Чушкин П.И. /
- создание более простых моделей течений вязкого теплопроводного газа, параболических приближений уравнений Навье-Стокса / Головачев Ю.П., Тирский Г.А., Лапин Ю.В., Стрелец М.Х., Ковеня В.М., Тарнавский Г.А., Черный С.Г. /
- расщепление процессов переноса в жидкости и газе по физическим факторам / Шенников В.В., Гушин В.А., Давыдов Ю.И., Полежаев В.И., Chorin A.J., Harlow F.H. /

Все эти направления посвящены созданию алгоритмов, обеспе-

чивающих соответствие разностных решений исследуемым физическим процессам на "реальных, грубых" сетках, и направлены на снижение затрат машинного времени при их реализации.

Цель работы. Целью работы является развитие нового направления численного моделирования задач механики жидкости и газа на основе применения попеременно-треугольных разностных схем, обладающих новыми качественными свойствами монотонности решения в сочетании с повышенным порядком точности, "равномерной" аппроксимацией по размеру сетки и числу Рейнольдса. Создание на этой базе комплекса универсальных программ расчета течений жидкости и газа.

Решение сопряженных задач теплообмена, "связанных" задач аэроупругости. Теоретическое обоснование, численное подтверждение достоверности и точности расчетов по предлагаемым разностным схемам и алгоритмам.

Научная новизна. В диссертации развито новое направление численного моделирования задач механики жидкости и газа, которое основано на применении методов расщепления к построению разностных схем интегрирования уравнений гиперболического типа, уравнений Эйлера. В основе расщепления лежит разбегание матриц при конвективных производных на сумму знакопостоянных матриц, ответственных за одно направление переноса возмущений.

Повышение точности аппроксимации основывается на использовании в качестве интерполянтов аналитических решений одномерных уравнений Эйлера с "замороженными" матрицами конвективного переноса, или интерполянтов, в среднем приближающих аналитическое решение.

Разработан новый метод построения широкого класса квазимонотонных разностных схем, обеспечивающих минимальное размазывание скачков уплотнения и контактных разрывов при сквозном счете.

Созданы попеременно-треугольные разностные схемы интегрирования уравнений Навье-Стокса, в которых используются в качестве интерполянтов характерные аналитические решения уравнений типа Навье-Стокса. Построенные разностные схемы "равномерно" по двум направлениям $\Delta x \rightarrow 0$, $Re \rightarrow \infty$ и $Re \rightarrow \infty$, $\Delta x \rightarrow 0$ аппроксимируют уравнения Навье-Стокса. Обеспечение "равномерных" свойств аппроксимации реализуется экспоненциальным возмущением матриц при диффузионных производных.

Определено предельное значение сеточного числа Рейнольдса, при котором в разностном алгоритме может быть выявлено влияние молекулярной вязкости.

Построен маршевый алгоритм, в котором учет передачи возмущений вверх против потока осуществляется разбиением матриц при конвективных производных на сумму знакопостоянных, а отбрасывание части этих слагаемых, определение этих слагаемых на предыдущей глобальной итерации позволяет проводить расчет течений вязкого сжимаемого газа с возвратно циркуляционными зонами без формальных регуляризующих процедур.

Создан комплекс программ моделирования течений газа и жидкости, и на его основе решены новые задачи аэроупругой деформации оболочек под воздействием потока газа. Выделен параметр относительной жесткости оболочки и его предельное значение, при достижении которого становится существенным влияние деформации на аэродинамические характеристики.

Попеременно-треугольные схемы для расчета течений несжимаемой жидкости в переменных завихренности, функция тока используют ряд отличительных особенностей. Решение уравнения Пуассона для функции тока проводится с граничными условиями Дирихле и Неймана, что позволяет одновременно вычислять завихренность в приграничных ячейках. Расчет течений жидкости в многосвязных областях однозначно строится из постулата о реализации наименьших значений максимумов скорости жидкости, наблюдаемых в ходе вычислений.

Построены новые алгоритмы сквозного расчета температур в сопряженных задачах нагревания или остывания тел в потоке.

Новым является применение вариационной формулировки к расчету давления в потоке несжимаемой жидкости.

Разработан новый способ построения неявных разностных схем расчета течений вязкой несжимаемой жидкости в естественных переменных скорости, давление, в котором выделяются знакопостоянные матрицы конвективного переноса, и в условие солёности явно включается градиент давления.

Практическая ценность. Построенные методы расчета течений жидкости и газа на основе попеременно-треугольных схем расщепления позволяют эффективно, с малыми затратами машинного времени, вести численное изучение течений жидкости и газа, исследовать взаимодействие потока с деформируемыми оболочками, исследовать вопросы сопряженного теплообмена между телами и потоком теплопроводной жидкости.

Использование на практике в НИИ, КБ этого направления чис-

ленного моделирования, наряду с существующими методами, позволит повысить точность численных расчетов, расширит класс изучаемых задач.

В настоящее время внедрение описанных разработок в КБ "Кинное" позволило получить экономический эффект 240 тыс. руб.

Обоснованность и достоверность основных результатов, полученных в диссертации, основывается на строгом математическом описании рассматриваемых разностных алгоритмов, тщательном методическом обосновании алгоритмов, программ на широко известных и рекомендуемых тестовых задачах, сопоставлении численных расчетов с результатами экспериментов и данными других авторов.

Автор защищает: 1) разработанную методику построения неявных попеременно-треугольных разностных схем расщепления для гиперболической системы уравнений Эйлера; 2) использование интерполантов, в среднем приближающих точные решения уравнений Эйлера, и построение на этой основе класса однопараметрических схем на минимальном шаблоне с переменным порядком точности; 3) разработку метода построения широкого класса квазимонотонных схем, обеспечивающих минимальную степень размазывания ударных волн и контактных разрывов; 4) новый способ построения неявных разностных схем расщепления с использованием интерполантов, в среднем приближающих точные решения уравнений Навье-Стокса, выбор в качестве интерполантов аналитических решений уравнений Навье-Стокса с "замороженными" матрицами переноса; 5) методы экспоненциального возмущения матриц при диффузионных производных, обеспечивающие "равномерную" сходимость разностного решения к точному по двум малым параметрам: шагу сетки и обратному числу Рейнольдса; 6) определение критических значений сеточных чисел Рейнольдса, $Re_h \leq 6$, позволяющих в разностных алгоритмах учитывать влияние молекулярной вязкости; 7) построение новых маршевых алгоритмов решения уравнений Навье-Стокса, основанных на выделении матриц конвективного и диффузионного переноса, ответственных за перенос возмущений вверх против потока; 8) построение попеременно-треугольных алгоритмов расчета течений вязкой несжимаемой жидкости в переменных ω, ψ с экспоненциальным возмущением коэффициентов диффузионного переноса; 9) использование аналитических решений модельных уравнений для построения дискретных законов сохранения, обеспечивающих "равномерную" точность аппроксимации по шагу сетки и числу Рейнольдса; 10) вариационную формулировку расчета давления по известно-

му поли скорости течения несжимаемой жидкости; II) построение разностных схем расчета течений несжимаемой жидкости в физических переменных с выделением и расщеплением на знакопостоянные матриц конвективного переноса с одновременным включением условия соленоидальности в алгоритм расчета давления; 12) решение "связанных" задач стационарной аэроупругости при больших деформациях оболочек; 13) разработку методики сквозного счета при решении сопряженных задач сстивания или натравивания тел в потоке жидкости; 14) создание комплекса программ расчета течений невязкого сжимаемого газа в каналах различной формы; 15) создание комплекса программ маршевого счета с глобальными итерациями течений вязкого сжимаемого газа в каналах сложной геометрической формы, включая области возвратно-циркуляционных течений; 16) создание комплекса программ расчета течений вязкой несжимаемой жидкости и сопряженного теплообмена в прямоугольных каналах с центральными телами различного местоположения.

Апробация работы. Материалы диссертационной работы докладывались на Минском международном форуме по теплообмену, 1988г., Школе-семинаре социалистических стран "Вычислительная аэрогидромеханика", Самарканд, 1985г., VIII Научных чтения по космонавтике, Москва, 1984г., VI Всесоюзном семинаре по комплексам программ математической физики, Днепропетровск, 1979г., I Всесоюзная школа-конференция "Математическое моделирование в машиностроении", Куйбышев, 1990г., IV совещании по моделированию сложных гидродинамических систем "Конструктивная турбулентность", Алушта, 1991г., VII Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике, Москва, 1991г., на конференциях "Современные проблемы механики жидкости и газа, Грозный, 1986г., "Математическое моделирование физико-химических явлений в сплошных средах", Канев, 1983г., "Экспериментальные исследования и математические модели физико-химических процессов в сплошных средах", Харьков, 1985г., на школах-семинарах "Теоретическая и прикладная гидродинамика", Алушта, 1984; 1986г.г., "Актуальные вопросы теплофизики и физической гидрогазодинамики", Алушта, 1985г., на научных семинарах в НИИ механики МГУ, рук. акад. Черный Г.Г., 1978г., проф. Тирский Г.А., 1984г., 1988г., на семинаре ВЦ АН СССР, рук. проф. Шмыглевский Ю.Л., 1988г., на семинаре ЛФТИ, рук. проф. Головачев Ю.П., 1989г., в ЦИАМе на семинаре проф. Крайко А.П., 1992г. и др.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 разделов, заключения, списка литературы и приложения. Работа изложена на 310 стр. машинописного текста, содержит 126 рисунков, 8 таблиц. Список использованной литературы содержит III наименований. В приложении помещены комплексы программ на языке ФОРТРАН вместе с описаниями и инструкциями к пользованию.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дана характеристика актуальности проблемы, составившей предмет исследования, и приводится краткая аннотация основных результатов работы.

В первом разделе диссертации разработана методика построения попеременно-треугольных разностных схем для решения уравнений Эйлера.

Исходная система дифференциальных уравнений в декартовой системе координат выбирается в дивергентной форме

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial Fx}{\partial x} + \frac{\partial Fy}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

где вектор искомых параметров $U^T = \| \rho, \rho u, \rho v, \rho E \|$.

Определяющим моментом в теории построения попеременно-треугольных схем является выделение матриц при конвективных производных, ответственных за передачу возмущений в потоке газа. Выделение этих матриц может быть проведено неоднозначно, поэтому использована методика "квазилинеаризации" уравнения (1) относительно приращения решения ΔU за временной шаг $\Delta t = t - t^n$.

Для идеального газа потоки Fx и Fy являются однородными первой степени функциями компонент вектора U , откуда $Fx = Ax \cdot U$, $Fy = Ay \cdot U$ и система уравнений (1) записывается в дивергентной форме

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Ax \cdot U) + \frac{\partial}{\partial y} (Ay \cdot U) = 0, \quad (2)$$

где матрицы Якоби $Ax = \frac{\partial Fx}{\partial U}$, $Ay = \frac{\partial Fy}{\partial U}$.

Матрицы простой структуры Ax , Ay в системе уравнений (2) преобразованием Q приводятся к диагональному виду

$$Q^{-1} Ax \cdot Q = Ax D, \quad Ax D = \begin{Bmatrix} u & & 0 \\ 0 & u+a & \\ & u-a & \end{Bmatrix}. \quad (3)$$

Диагональная матрица $Ax D$ может различными способами представлена в виде суммы знакопостоянных. Равностепенное разложение, в котором положительные собственные значения относятся к матрице $Ax^+ D$, а отрицательные - к матрице $Ax^- D$, является

наилучшим, так как при этом разбиения аппроксимация конвективных производных против потока имеет наименьшие диффузионные погрешности. Обратным преобразованием получено требуемое разбиение матриц Ax, Ay на сумму знакопостоянных: $Ax^{\pm} = Q \cdot A^{\pm} \cdot Q^{-1}$. (4)

Свернув знакопостоянные матрицы $Ax^{\pm}, Ay^{\pm}$ с вектором U , получено разбиение векторов потоков Fx, Fy на сумму двух слагаемых, ответственных за передачу возмущений по двум противоположным направлениям: $Fx = Fx^{+} + Fx^{-}$, $Fx^{\pm} = Ax^{\pm} \cdot U$. При свертке $Ax^{\pm}$ и U большое число слагаемых имеет противоположные знаки, что может служить причиной накопления арифметических погрешностей.

В работе предложено выделить из векторов $Fx^{\pm}$ знакопостоянные матрицы $\bar{Ax}^{+}, \bar{Ax}^{-}$ треугольной формы

$$\bar{Ax}^{\pm} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (5)$$

$$a_{11} = a \left(\frac{M}{2} \pm \frac{M-1}{2} \right) \pm \frac{11+M}{48} \pm \frac{11-M}{48}, \quad a_{22} = a_{11}, \quad a_{33} = a_{11}$$

$$a_{21} = \frac{a^2}{28} \left(1 \pm \frac{11+M}{2} \mp \frac{11-M}{2} \right), \quad a_{42} = a_{21}, \dots \quad M = \frac{U}{a},$$

что позволяет свести разностный алгоритм к последовательному решению скалярных уравнений.

При решении уравнений Эйлера (2) в области сложной геометрической формы используется отображение расчетной области G на квадрат $K = \{0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1\}$ в котором новые переменные ξ, η связаны с номерами узлов сетки области G :

$$\xi_i = (i-1)/(M-1), \quad \eta_j = (j-1)/(N-1).$$

В новых переменных ξ, η уравнения Эйлера (2) записываются так

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} (D_{\xi} \cdot U) + \frac{\partial}{\partial \eta} (D_{\eta} \cdot U) = 0 \quad (6)$$

где $\tau = t/d$, d - якобиан преобразования,

$$D_{\xi} = Ax \frac{\partial x}{\partial \xi} - Ay \frac{\partial x}{\partial \eta}, \quad D_{\eta} = Ay \frac{\partial x}{\partial \xi} - Ax \frac{\partial y}{\partial \eta}.$$

Разбиение матриц Ax, Ay вида (4) или (5) позволяет найти требуемое разбиение на сумму знакопостоянных новых конвективных матриц D_{ξ} и D_{η} :

$$D_{\xi}^{\pm} = (A^{\pm} \cdot (y_2 \pm 1, y_2 1) + A^{\mp} \cdot (y_2 \mp 1, y_2 1) - A^{\pm} \cdot (x_2 \pm 1, x_2 1) - A^{\mp} \cdot (x_2 \pm 1, x_2 1))/2,$$

$$D_{\eta}^{\pm} = (A^{\pm} \cdot (x_2 \pm 1, x_2 1) + A^{\mp} \cdot (x_2 \mp 1, x_2 1) - A^{\pm} \cdot (y_2 \pm 1, y_2 1) - A^{\mp} \cdot (y_2 \pm 1, y_2 1))/2.$$

По форме записи уравнения (2) и (6) эквивалентны, и описание разностных схем проводится для системы (2).

В параграфах I.I- I.II описан ряд расщеплений в разностной и дифференциальной формах исходной задачи на последовательность операторов, имеющих треугольный шаблон на верхнем расчетном слое.

Дифференциальная двуциклическая форма расщепления записывается так:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + L_{\kappa} \cdot \bar{U} = 0, \quad \kappa = \overline{1, 8}, \quad (7)$$

$$L_{1,3} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (A^+ X \cdot), \quad L_{2,7} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (A^+ Y \cdot),$$

$$L_{3,6} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (A^- Y \cdot), \quad L_{4,5} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (A^- X \cdot).$$

Начальные условия для каждого шага расщепления

$$\bar{U}(t^n) = \bar{U}^{k-1}(t^{n+1}), \quad \bar{U}(t^{n+1}) = U^{n+1}, \quad \bar{U}(t^n) = U^n.$$

Параметры течения газа определяются в центрах разностных ячеек, и при записи неявной разностной аппроксимации каждого уравнения системы 7 используется соотношение баланса

$$U_i^{n+1} - U_i^n + \frac{\Delta t}{2 \Delta x} (A^+ X_{i+\frac{1}{2}} \hat{U}_{i+\frac{1}{2}} - A^+ X_{i-\frac{1}{2}} \hat{U}_{i-\frac{1}{2}}) = 0. \quad (8)$$

В работе основной целью при построении новых разностных алгоритмов была формулировка дискретных законов сохранения, наиболее точно соответствующих дифференциальным законам.

Для определения параметров $\hat{U}_{i+\frac{1}{2}}$, $\hat{U}_{i-\frac{1}{2}}$ на вертикальных гранях разностных ячеек необходимо использовать некоторые формулы интерполирования. В отличие от традиционных полиномиальных интерполянтов в работе предложено использовать интерполянты, являющиеся частными решениями модельных уравнений, или интерполянты, в среднем приближающие точные решения уравнений Эйлера. При этом важное значение имеет учет направления переноса возмущений. Для соотношений баланса вида (8) при вычислении $\hat{U}_{i-\frac{1}{2}}$ строятся интерполянты трех типов

$$U_1(x, t) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 t,$$

$$U_2(x, t) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 t + \alpha_3 x t, \quad (9)$$

$$U_3(x, t) = \alpha_0 + \alpha_1 (x - A^+ t) + (x - A^+ t)^2 \cdot \alpha_2,$$

для которых узлы интерполирования выбираются по известному направлению переноса возмущений (Рис. I.I), а сами интерполянты

в среднем, в окрестности рассматриваемой грани, удовлетворяют исходному дифференциальному уравнению

$$\int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\frac{\partial U_e}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (A \bar{x} U_e) \right) dx dt = 0 \quad (10)$$

Условия интерполирования и соотношения (10) позволяют найти неизвестные коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, тем самым отыскать интерполант, в среднем приближающий точное решение.

Следует учесть, что за время Δt через вертикальную грань разностной ячейки переносятся возмущения, расположенные внутри характеристического треугольника (рис. 1.1), поэтому значения $\hat{U}_{i-\frac{1}{2}}$ вычисляются по формулам интерполирования в некоторой точке $(x_{i+0.5} - \beta \Delta x, t^n + \gamma \Delta t)$ этого характеристического треугольника.

В полученном двухпараметрическом γ, β классе разностных схем значениям $\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2}$ соответствует точка А вертикальной грани, а соответствующая схема имеет второй порядок точности. В этом классе разностных схем найдены значения параметров γ_m, β_m , которым соответствуют схемы с положительной аппроксимацией. В алгоритме с треугольными матрицами (5) — это условие монотонности однородной разностной схемы. Эти возможные значения параметров γ_m, β_m изображены на рис. 1.2.

Используя методологию А.С. Уолодова, для каждого интерполанта (9) существует наилучшая монотонная схема, для которой значения γ_m^*, β_m^* наиболее близко расположены к точке $\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2}$, т.е. к схеме второго порядка точности.

В § 1.15 построен однопараметрический класс разностных схем, в которых параметр Ψ располагается на прямой АВ (рис. 1.2), соединяющей схему второго порядка точности А ($\Psi=0$) и наилучшую монотонную схему В ($\Psi=1$):

$$\beta = \frac{1}{2} + \kappa(\zeta) \Psi, \quad \gamma = \frac{1}{2} + \kappa(\zeta) \zeta \Psi, \quad (11)$$

функциональные зависимости $\kappa(\zeta), \zeta = A \bar{x} \Delta t / (2 \Delta x)$ различны для каждого интерполанта (9). Проведенные численные расчеты по наилучшим монотонным схемам ($\Psi=1$) показали, что степень размазывания скачков уплотнения, контактных разрывов остается еще достаточно большой. Использование эмпирических зависимостей для выбора параметра Ψ , т.е. счета по схеме второго или первого порядков точности в зависимости от поведения решения существенно уменьшает степень размазывания разрывов, однако единой функциональной зависимости для всех типов решений найти не удалось.

Поэтому в § I.16 построена новая теория квазимоноотонных разностных схем и стратегия выбора параметра Ψ , основанная лишь на понятиях монотонности профиля решения, невозрастания вариации сеточного решения (Шенников В.В., Панарин А.И., Harten A.)

Балансовое соотношение общего вида записывается так

$$U_{i-1}^{n+1} - U_i^n + F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}} = 0 \quad (12)$$

Исходя из требования монотонности профиля решения на верхнем временном слое

$$\min(U_{i-1}^{n+1}, U_{i+1}^{n+1}) \leq U_i^{n+1} \leq \max(U_{i-1}^{n+1}, U_{i+1}^{n+1})$$

для возможных значений потока $F_{i+\frac{1}{2}}$ найден интервал $[d, D]$ монотонности:

$$d \leq F_{i+\frac{1}{2}} \leq D, \quad (13)$$

$$d = \max(\min(a_{10}, a_{20}), \min(a_{10}, a_{30})),$$

$$D = \min(\max(a_{10}, a_{20}), \max(a_{10}, a_{30})),$$

$$a_{10} = 0.5(F_{i-\frac{1}{2}} + F_{i+\frac{1}{2}}) - 0.5(U_{i+1}^n - U_i^n),$$

$$a_{20} = 2F_{i-\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{3}{2}} + U_i^n - U_{i-1}^n, \quad a_{30} = 2F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i+\frac{3}{2}} + U_{i+2}^n - U_{i+1}^n.$$

Разностное соотношение (12) с ограничениями (13) есть широкий класс возможных квазимоноотонных разностных схем.

Конкретная разностная схема строится на основе функционального определения потоков из однопараметрического класса операторов (9), (11) и следующей стратегии выбора параметра Ψ .

Расчет на каждом шаге расщепления ведется по одному направлению, в данном примере в положительном направлении оси ox . Поток $F_{i-\frac{1}{2}}$ известен из предыдущего определения вектора U_{i-1}^{n+1} , а поток $F_{i+\frac{1}{2}}$ определяется так, чтобы параметр $\Psi_{i+\frac{1}{2}}$ был минимален в области пересечения интервала монотонности $[d, D]$ и аппроксимации $[f, F]$, где

$$f = \min(F_{i+\frac{1}{2}}(\Psi=0), F_{i+\frac{1}{2}}(\Psi=1)), \quad (14)$$

$$F = \max(F_{i+\frac{1}{2}}(\Psi=0), F_{i+\frac{1}{2}}(\Psi=1)).$$

Это требование позволяет записать алгоритм определения, используемого в расчетах, значения потока $\hat{F}_{i+\frac{1}{2}}$:

Если $F_{i+\frac{1}{2}}(\Psi=0) < F_{i+\frac{1}{2}}(\Psi=1)$, то

$$\hat{F}_{i+\frac{1}{2}} = \min(\max(d, f), D),$$

иначе

$$\hat{F}_{i+\frac{1}{2}} = \max(\min(D, F), d).$$

Проведены методические расчеты по предложенным квазимоноотонным схемам для модельных уравнений переноса (Рис. I.3, 4), для тестовых задач распада произвольного разрыва (Рис. I.5), кото-

рые показали, что полученные профили решений соответствуют лучшим разностным схемам коррекции потоков и TVD.

Разработана новая теория разностных квазимонотонных неявных абсолютно устойчивых алгоритмов. По количеству арифметических операций, требуемых при пересчете с нижнего расчетного слоя на верхний, они сопоставимы с явными разностными схемами и поэтому при реализации на ЭВМ требуют небольших затрат машинного времени.

Если матрица при конвективных производных выбирается в форме (5), то разностные уравнения решаются на ЭВМ как система скалярных уравнений.

Высвободив определенную последовательность шагов расщепления строятся маршевые алгоритмы счета, что дополнительно уменьшает затраты машинного времени при решении стационарных задач.

Объединяя 2 последовательных шага схемы расщепления (7) получаем попеременно-треугольную схему, которая была базовой при создании комплекса программ.

На основе приведенных в первом разделе диссертации попеременно-треугольных разностных схем создан комплекс программ численного моделирования течений невязкого сжимаемого газа в плоских или осесимметричных каналах сложной геометрической формы.

Комплекс программ использовался для расчета распространения ударных волн в плоских каналах с препятствиями различной формы, изучалась степень снижения интенсивности ударных волн при прохождении препятствий.

Проводились расчеты течений газа в соплах с разрывом контура продольного сечения.

В третьем разделе этот комплекс программ использовался для решения задач "связанной" аэроупругости.

Во втором разделе диссертации построен класс попеременно-треугольных разностных схем для расчета течений вязкого сжимаемого газа.

Исходные уравнения Навье-Стокса в декартовой системе координат в дивергентной форме выглядят так

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (A_X \cdot U) + \frac{\partial}{\partial y} (A_Y \cdot U) = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(B_X \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(B_Y \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(S_X \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(S_Y \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right], \quad (1)$$

где явным образом выделены матрицы конвективного и диффузионного переноса. При расчете течений газа в области сложной

геометрической формы используется отображение физической области G на квадрат K . В новых переменных ξ, η система уравнений Навье-Стокса

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} (D_1 U) + \frac{\partial}{\partial \eta} (D_2 U) = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (C_{11} \frac{\partial U}{\partial \xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (C_{22} \frac{\partial U}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \xi} (E_{12} \frac{\partial U}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (E_{21} \frac{\partial U}{\partial \xi}) \right] \quad (2)$$

по форме не отличается от системы (1), и построение разностных схем ведется на примере системы (1).

Описан ряд алгоритмов попеременно-треугольных схем расщепления в разностной и дифференциальной формах. Исследованы вопросы аппроксимации и устойчивости этих алгоритмов.

Газовой системой является двуциклическая дифференциальная форма расщепления вида

$$\frac{\partial \bar{U}^K}{\partial \tau} + L_K \bar{U}^K = 0, \quad K = \overline{1, 2} \quad (3)$$

$$L_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} (D_1^+ \cdot) - \frac{1}{4Re} \frac{\partial}{\partial \xi} (C_{11} \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot),$$

$$L_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (D_2^+ \cdot) - \frac{1}{4Re} \frac{\partial}{\partial \eta} (C_{22} \frac{\partial}{\partial \eta} \cdot),$$

$$L_6 = -\frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial \xi} (E_{12} \frac{\partial}{\partial \eta} \cdot), \dots, L_{10} = -\frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial \eta} (E_{21} \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot), \dots,$$

где $\bar{U}^K(t^n) = \bar{U}^{K+1}(t^{n+1})$, $\bar{U}^2(t^{n+1}) = U^{n+1}$, $\bar{U}^1(t^n) = U^n$,

которая используется при построении возмущений матриц при диффузионных производных $\tilde{C}_{11}$, $\tilde{C}_{22}$ обеспечивающих "равномерную" аппроксимацию каждого шага расщепления. На примере первого уравнения системы (3) изложим основные идеи, использованные при построении попеременно-треугольных схем.

Параметры течения U определяются в центрах разностных ячеек, и для них записывается соотношение баланса

$$U_i^{n+1} - U_i^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (A X_{i+\frac{1}{2}} \hat{U}_{i+\frac{1}{2}} - A X_{i-\frac{1}{2}} \hat{U}_{i-\frac{1}{2}}) = \\ = \frac{\Delta t}{4Re \Delta x} (B X_{i+\frac{1}{2}} (\frac{\partial \hat{U}}{\partial x})_{i+\frac{1}{2}} - B X_{i-\frac{1}{2}} (\frac{\partial \hat{U}}{\partial x})_{i-\frac{1}{2}}) \quad (4)$$

Для определения вектора $\hat{U}_{i-\frac{1}{2}}$ и производной $(\frac{\partial \hat{U}}{\partial x})_{i-\frac{1}{2}}$ на вертикальной грани x_i разностной ячейки строится интерполяционный полином

$$\hat{U}(x, t) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 t + \alpha_3 x t + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 t^2, \quad (6)$$

проходящий через три узла U_{i-1}^{n+1} , U_{i-1}^n , U_i^n и в среднем, в

окрестности рассматриваемой грани, удовлетворяет исходному уравнению

$$\int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \Psi dx dt = 0, \quad \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \Psi x dx dt = 0, \quad \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \Psi t dx dt = 0, \quad (6)$$

где $\Psi = \frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (A^* \hat{U}) - \frac{1}{4Re} \frac{\partial}{\partial x} (Bx \frac{\partial \hat{U}}{\partial x}) -$ невязка исходного дифференциального уравнения. Выражения для вектора $\hat{U}_{i-\frac{1}{2}}$ и производной $(\frac{\partial \hat{U}}{\partial x})_{i-\frac{1}{2}}$ в момент времени t^{n+1} на боковой грани x_i записываются так:

$$\hat{U}_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} = U_{i-1}^n + R (U_i^n - U_{i-1}^n) + Q (U_{i+1}^{n+1} - U_{i-1}^n), \quad (7)$$

$$(\frac{\partial \hat{U}}{\partial x})_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \Delta x = G (U_i^n - U_{i-1}^n) + S (U_{i+1}^{n+1} - U_{i-1}^n).$$

Соотношения баланса (4) вместе с определением потоков (7) представляет собой дискретную форму законов сохранения массы, энергии, изменения количества движения, в среднем приближающие дифференциальные законы сохранения.

Система разностных уравнений (4) рассчитывается методом бегущего счета, что изначально закладывалось при построении интерполяционного полинома (5). Анализ устойчивости, проведенный для скалярного случая, показывает, что разностная схема (4) (7) абсолютно устойчива при $\xi > 0.5$ и условно устойчива, число Куранта $S \leq 1$, при $\xi = 0.5$.

Если в соотношениях баланса (4) использовать точные решения уравнений расщепления (3), то могут быть получены "точные", с учетом погрешностей квадратур, разностные соотношения, для которых узловые значения совпадают с аналитическим решением.

Для стационарных уравнений Навье-Стокса с замороженными матрицами коэффициентов найдены аналитические решения, которые использованы в качестве интерполянтов. Для уравнения расщепления

$$\frac{\partial}{\partial x} (Ax \cdot U) = \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x} (Bx \frac{\partial U}{\partial x}) \quad (8)$$

с замороженными матрицами Ax , Bx аналитическое решение содержит матричную экспоненту.

Учитывая, что практическое вычисление на ЭВМ матричной экспоненты требует значительных затрат машинного времени, в диссертации приведен ряд приближений матричной экспоненты.

Чтобы избежать вычисления матричных экспонент, в диссертации разработан другой путь решения. Система векторных уравнений (8) может быть сведена к последовательности скалярных уравнений, если использовать треугольную (1.5) форму представления знако-

постоянных матриц $A\bar{X}$, так как матрица $B\bar{X}$ всегда имеет треугольную форму. Аналитическое решение системы уравнений (8) вида

$$\begin{cases} a_{11} \frac{\partial U_1}{\partial x} = 0, \\ a_{21} \frac{\partial U_1}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial U_2}{\partial x} = \frac{1}{Re} b_{22} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}, \\ a_{31} \frac{\partial U_1}{\partial x} + a_{32} \frac{\partial U_2}{\partial x} + a_{33} \frac{\partial U_3}{\partial x} = \frac{1}{Re} (b_{33} \frac{\partial^2 U_3}{\partial x^2} + b_{32} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}), \\ a_{41} \frac{\partial U_1}{\partial x} + a_{42} \frac{\partial U_2}{\partial x} + a_{43} \frac{\partial U_3}{\partial x} + a_{44} \frac{\partial U_4}{\partial x} = \frac{1}{Re} (b_{44} \frac{\partial^2 U_4}{\partial x^2} + \dots b_{42} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}) \end{cases} \quad (9)$$

представлено в § 2.5 и использовано в качестве интерполанта при вычислении конвективного и диффузионного потоков на границах разностных ячеек.

Полученные этим путем балансные соотношения являются дискретной формой законов сохранения для модели вязкого газа:

$$\begin{aligned} A\bar{X}_{i+\frac{1}{2}} U_i - A\bar{X}_{i-\frac{1}{2}} U_{i-1} + A\bar{X}_{i+\frac{1}{2}} U_{i+1} - A\bar{X}_{i-\frac{1}{2}} U_i = \\ = \frac{1}{Re} (\tilde{B}\bar{X}_{i+\frac{1}{2}} (U_{i+1} - U_i) - \tilde{B}\bar{X}_{i-\frac{1}{2}} (U_i - U_{i-1}))/\Delta x, \end{aligned} \quad (10)$$

имеют вид разностной аппроксимации "против" потока" для системы (8) с возмущенной матрицей диффузионного переноса:

$$\begin{aligned} \tilde{B}\bar{X} = B\bar{X} \cdot \Pi - Re \Delta x A\bar{X}^+ \bar{D} - Re \Delta x A\bar{X}^- \bar{D}, \quad (11) \\ \Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_{32} & \pi_{33} & 0 \\ 0 & \pi_{42} & \pi_{43} & \pi_{44} \end{bmatrix}, \quad \bar{D}^{\pm} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22}^{\pm} & 0 & 0 \\ 0 & d_{32}^{\pm} & d_{33}^{\pm} & 0 \\ 0 & d_{42}^{\pm} & d_{43}^{\pm} & d_{44}^{\pm} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\pi_{kk} = \frac{Re_k}{\exp(\frac{Re_k}{2}) - \exp(-\frac{Re_k}{2})}, \quad Re_k = \frac{\alpha_{kk} Re \Delta x}{b_{kk}},$$

$$d_{kk}^{\pm} = (1 - \exp(\mp \frac{Re_k}{2})) / (\exp(\frac{Re_k}{2}) - \exp(-\frac{Re_k}{2})), \dots$$

Возмущенная матрица $\tilde{B}\bar{X}$ включает множители $\Pi, \bar{D}$ зависящие от сеточных чисел Рейнольдса $Re_k = \alpha_{kk} Re \Delta x / b_{kk}$ и которые по экспоненциальному закону стремятся к нулю при $Re_k \rightarrow \infty$. В частности при $Re_k > 6$ элементы возмущенной матрицы $\tilde{B}\bar{X}$ практически обращаются в нуль. Это соответствует тому, что при условии $Re_k > 6$ разностное соотношение баланса (10) не содержит слагаемых, учитывающих молекулярную вязкость газа, следовательно на "грубой" сетке ($Re_k > 6$) нельзя в разностном решении выявлять влияние молекулярной вязкости газа.

Уравнения баланса (10) при $Re_h \ll 1$ представляют собой аппроксимацию "против потока" уравнений Залера.

В § 2.6 приводятся сопоставления разностных схем типа (4), (7) и (10), (12) и широко известных схем: "против потока", "центрально-разностной", монотонной схемы А.А. Самарского на модельном уравнении Бургерса. Все эти схемы записываются в виде

$$\delta^+ (u_i - u_{i-1}) = \frac{\mu}{Re} \pi_e(Re_h) (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \quad (12)$$

где $\pi_e = Re_h / (\exp(Re_h) - 1)$ - "точная" разностная схема вида (II)

$$\pi_e = 1 - Re_h \left(0.5 - \frac{((7-3^2)\delta^2 + 58 + 0.25)Re_h - 2\delta^6}{2 + (1+\delta)Re_h} \right) -$$

схема с интерполантом (7)

$\pi_2 = 1 / (1 + 0.5 Re_h)$ - монотонная схема А.А. Самарского,

$\pi_3 = 1$ - схема "против потока",

$\pi_4 = 1 - 0.5 Re_h$ - "центрально-разностная" схема.

На рис. 2.1 представлены графики зависимостей π_e от сеточного числа Рейнольдса $Re_h = \frac{q^* Re \Delta x}{\mu}$, из которого следует подтверждение вывода о том, что учесть проявление молекулярной вязкости при $Re_h > 6$ нельзя.

Требование равномерной сходимости разностного решения u_i к точному u_h относительно двух малых параметров: шага сетки Δx и обратного числа Рейнольдса $\varepsilon = \frac{\mu}{Re}$ возможно лишь в разностных схемах равномерно на всем диапазоне

$0 \leq Re_h < \infty$, приближающих экспоненциальную зависимость $\pi_e(Re_h)$. В диссертации ставится более слабое требование "равномерности": для разностных схем вида (12) зависимость $\pi(Re_h)$ должна приближать функцию $\pi_e(Re_h)$ в окрестности точки $Re_h = 0$ и $\pi \rightarrow 0$ при $Re_h \rightarrow \infty$.

Условию "равномерной" аппроксимации удовлетворяет лишь схема А.А. Самарского, в то время как "центрально-разностная" схема лишена смысла при $Re_h > 2$. Заметим также, что схемы, построенные на базе полиномиальных интерполантов, не обладают свойством "равномерной" аппроксимации, так как полиномом нельзя на всем диапазоне $0 \leq Re_h < \infty$ приблизить экспоненту.

При использовании полиномов (5), обеспечить выдвинутое требование "равномерности" можно вводя дополнительные ограничения в зависимости (7)

$$0 \leq R \leq 0.5, \quad G \geq 0 \quad (13)$$

которые следует понимать в покомпонентном смысле.

При больших числах Рейнольдса Re обеспечить условие $Re_h < 6$ во всей расчетной области практически нельзя из-за ограниченной мощности ЭВМ. Естественным выходом является сгущение сетки до $Re_h < 6$ в части расчетной области, например, в пограничном слое, где существенно проявление молекулярной вязкости. В остальных зонах расчетной области, где $Re_h > 6$, разностные соотношения не должны содержать диффузионных слагаемых, так как они лишь вносят дополнительную диффузию, она незначительна, если малы вторые производные $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, однако в потоке встречаются области, например, поверхность скачка уплотнения, где включение вторых раздельных разностей в балансные соотношения Навье-Стокса лишь увеличивают схемную диффузию.

Заметим, что сгущая сетку к стенкам канала, вдоль канала размеры разностной сетки остаются достаточно большими, следовательно разностная схема должна автоматически исключать диффузионный перенос вдоль стенок, если $Re_h > 6$ в этом направлении.

Предложенные разностные схемы (I), (II) удовлетворяют условиям "равномерной" аппроксимации и имеют минимальную на используемой сетке погрешность дискретизации.

В § 2.8 исследовалась возможность экспоненциального

$$y = \frac{e^{\alpha^2} - 1}{e^{\alpha} - 1}, \quad z_i = (i-1)/(N-1)$$

распределения N узлов сетки y_i так, чтобы во всем пограничном слое толщиной $\delta = 1/\sqrt{Re}$ обеспечить выполнение условия $Re_h < 6$. В табл. представлены возможные значения параметра сгущения α в зависимости от количества N узлов и числа Рейнольдса Re . Для каждого числа Рейнольдса Re существует предельное число N^* узлов, которые могут быть перераспределены так, чтобы разностная сетка позволила описать влияние молекулярной вязкости на структуру течения во всем пограничном слое.

Во втором разделе разработаны маршевые алгоритмы интегрирования полных и параболизированных уравнений Навье-Стокса. Для маршевого счета вдоль основного направления течения газа выделена регулярная часть системы Навье-Стокса. В отличие от традиционного способа регуляризации за счет модификации градиента давления предлагается считать ответственными за передачу возмущений вверх против потока слагаемые $\frac{\partial}{\partial \xi} (D_{\xi}^+ U)$ и $\frac{\partial}{\partial \xi} (c_{\xi} \frac{\partial U}{\partial \xi})$, которые вычисляются на предыдущей глобальной итерации. Выделенная параболическая в направлении 0ξ часть

полной системы Навье-Стокса остается корректной при маршевом счете и в зонах возвратно-циркуляционных течений, что существенно расширяет возможности маршевого счета.

Отмечено, что для получения стационарных решений параболизованной системы Навье-Стокса требуется регуляризация. Наилучшим способом регуляризации процесса счета является включение нестационарных слагаемых $\alpha \frac{\partial U}{\partial t}$. (Головачев Ю.П.)

Таким образом, маршевый счет с глобальными итерациями строится для системы

$$\alpha \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau} (D_1^+ U) + \frac{\partial}{\partial z} (D_2 U) = \frac{1}{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} (C_{22}^{\sim} \frac{\partial U}{\partial z}) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} (E_{12} \frac{\partial U}{\partial z}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (E_{21} \frac{\partial U}{\partial \tau}) \right\} + F,$$

где

$$F = - \frac{\partial}{\partial \tau} (D_1^- U) + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} (C_{11}^{\sim} \frac{\partial U}{\partial \tau}) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} (E_{12} \frac{\partial U}{\partial z}) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (E_{21} \frac{\partial U}{\partial \tau}) \right]$$

в которой на первой глобальной итерации вектор F полагается равным нулю, установление по времени проводится для каждого маршевого слоя τ_i . На второй и последующих глобальных итерациях компоненты вектора F включаются в маршевый алгоритм и часть из них вычисляется по данным предыдущей глобальной итерации.

Матрицы $C_{11}^{\sim}$, $C_{22}^{\sim}$ изначально возмущены по формулам (II). Матрицы при смешанных производных E_{12} и E_{21} разбиваются на сумму матриц с знакопостоянными значениями диагональных элементов, это является обязательным при использовании преобразования координат. Аппроксимация смешанных производных $\frac{\partial}{\partial \tau} (E_{12}^{\pm} \frac{\partial U}{\partial z})$, $\frac{\partial}{\partial z} (E_{21}^{\pm} \frac{\partial U}{\partial \tau})$ проводится на шаблонах, обеспечивающих диагональное преобладание.

Система конечно-разностных уравнений по каждому направлению имеет вид (10), т.е. фактически для ее построения используются интерполанты, являющиеся точными решениями упрощенных уравнений Навье-Стокса (8). В той части расчетной области, где $Re k > 6$ по каждому числу Рейнольдса, имеет место вырождение конечно-разностной схемы в аппроксимацию "против потока" уравнений Эйлера. Поэтому требование минимального размазывания скачков уплотнения, контактных разрывов предполагает включение в этой части сетки алгоритмов квазимонотонных схем, описанных в разделе I.

Использование дискретного преобразования координат $x_{ij} = x(\tau_i, z_j)$, $y_{ij} = y(\tau_i, z_j)$ приводит в конечно-разностной схеме к погрешностям, которые вызваны приближенным вычислением

произвольных преобразования $x_1, x_2, y_1, y_2, x_{12}, \dots$. В § 2.12 описаны способы введения регуляризованных матриц, обеспечивающих существование однородных решений $U = \text{const}$.

Разработан комплекс программ для моделирования плоских и осесимметричных течений вязкого теплопроводного газа. Проведено тщательное тестирование алгоритмов и разностных схем.

Отметим высокую эффективность маршевых алгоритмов, которые за несколько (≈ 10) глобальных итераций позволяют получать результаты с точностью $\approx 10^{-3}$ в задачах без возвратных течений. Представленные маршевые методы позволяют проводить расчет течений с зонами возвратно-циркуляционных течений, например, за разного рода уступами. При установлении решения наблюдается рост числа глобальных итераций, до ≈ 100 . Однако, имеет место значительная экономия машинного времени по сравнению с методами установления по времени.

На рис. 2.2 представлены данные по расчету течения вязкого газа в проточной части канала ГПВРД, которые иллюстрируют возможности универсального комплекса программ, разработанного в диссертации.

Третий раздел диссертации посвящен применению разработанных алгоритмов расчета сверхзвуковых течений невязкого газа к решению "связанных" задач аэроупругости. Исследуются вопросы деформации оболочек, панелей под воздействием сверхзвукового потока, которые, в свою очередь, изменяют структуру течения.

Рассмотрены две геометрически нелинейные модели поведения оболочек: мембранная модель и модель Кирхгофа-Лява (Вольмир А.С.).

Ставилась задача об определении значений относительной жесткости оболочек

$$D = \frac{E h}{(1 - \nu^2) L \rho \infty \sqrt{\infty}},$$

где E - модуль Юнга, ν - коэффициент Пуассона, h - толщина оболочки, L - характерный размер оболочки, при которых деформации существенно влияют на аэродинамические характеристики элементов конструкции ЛА.

Решены новые стационарные задачи аэроупругости о сверхзвуковом обтекании деформируемой панели в форме клина, ромбовидного профиля. Для описания равновесной формы панели использовалась геометрически нелинейная мембранная модель. Решение "связанной" стационарной задачи строилось итерационным путем с попередным расчетом течения газа и равновесной формы панели.

Более точный учет поведения оболочек при нагружении внеш-

ним давлением возможен при использовании уравнений, полученных из гипотез Кирхгофа-Лява. Рассчитывалось поперечное обтекание цилиндра, деформируемого под воздействием сверхзвукового потока, параболических профилей с различными условиями закрепления. Изучалось влияние деформации на изменение аэродинамических характеристик, определялись значения относительной жесткости, при которых существенно влияние деформации на аэродинамические характеристики.

Проведенные расчеты показали, что при значении параметра $D \approx 10^3$ изменение коэффициента сопротивления менее $\approx 5\%$. При относительной жесткости оболочек $D < 10^3$ расчеты указывают на необходимость учета деформации элементов конструкции.

Влияние деформации оболочек при нестационарном воздействии набегающего потока изучалось на задаче движения ударной волны вдоль поверхности мембраны.

В третьем разделе разработаны методики и построены алгоритмы решения "связанных" задач аэроупругости, которые могут быть использованы в практических расчетах.

В четвертом разделе рассмотрены попеременно-треугольные разностные схемы для расчета течений вязкой, теплопроводной несжимаемой жидкости.

Двумерные течения несжимаемой жидкости рассчитывались в переменных: завихренность ω , функция тока Ψ , температура T . При построении разностных алгоритмов используется разнесенная сетка.

В связи с отсутствием физической постановки граничного условия для завихренности ω не используются разностные формулировки граничных условий для ω типа Тома, Вудса и их модификации, а следуя методике Полежаева В.И. завихренность ω в приграничных ячейках определяется при решении уравнения Пуассона для функции тока с двумя граничными условиями типа Дирихле и Неймана. В разработанном алгоритме отсутствуют элементы экстраполяции решения на границу, что обеспечивает в целом устойчивость численного алгоритма интегрирования.

Проведено подробное тестирование всего алгоритма численного решения уравнений Навье-Стокса на разного рода тестах (рис. 4.1), что указывает на высокую точность и надежность выбранного способа организации расчета.

Для построения поперечно-треугольных схем распределения для уравнений переноса затухренности и тепла используются балансные соотношения с интерполантами вида (2.11), являющиеся точными решениями модельных уравнений типа Навье-Стокса (2.8). Возмущенные коэффициенты диффузии содержат экспоненциальные множители, что обеспечивает "равномерную" аппроксимацию уравнений конвекции и диффузии ω и T на конкретной разностной сетке.

Создан комплекс программ расчета течений жидкости в двувязных областях, каналах с центральным телом различного местоположения.

В § 4.4 описаны алгоритмы решения сопряженных задач остывания, нагревания тел в потоке жидкости. Используется метод сквозного счета температур T в потоке жидкости и твердом теле по единым балансным соотношениям, где существенным моментом является реализация условий идеального теплового контакта на границе раздела сред, где теплофизические свойства веществ могут различаться по величине на несколько порядков.

Предложен алгоритм, обеспечивающий точное балансное соответствие тепловых потоков при моделировании сопряженных задач остывания для пар: медь-воздух, керамика-масло, в которых отношение коэффициентов теплопроводности и чисел Пекле составляет

$$\lambda_T / \lambda_w = 10 \div 10^4, \quad \text{Pe}_T / \text{Pe}_w = 10^{-3} \div 10.$$

Проведены многочисленные расчеты и выделены задачи, где сопряженная формулировка и решение являются единственно возможными. Разработанный комплекс программ позволяет с небольшими ≈ 30 мин. затратами машинного времени рассчитывать сопряженные задачи остывания тел на сетке 50×50 узлов.

Проблеме расчета давления P по известному полю скорости посвящен § 4.8. Использование уравнения Пуассона для расчета давления P обладает рядом недостатков: нулевое собственное значение в спектре задачи Неймана; повышение порядка производных от компонент скорости по сравнению с начальной формулировкой. Избежать этих особенностей можно определяя давление из уравнения изменения количества движения, однако их разностная аппроксимация, в общем случае, не согласована с условием независимости давления от пути интегрирования.

В работе предложено рассчитывать значения производных

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \varphi_x(u, v), \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \varphi_y(u, v)$$

скорректировать так, чтобы выполнялись условия

$$\frac{\partial}{\partial y} (\varphi x + \varepsilon x) = \frac{\partial}{\partial x} (\varphi y + \varepsilon y) \quad (1)$$

при минимальных значениях поправок $\varepsilon x, \varepsilon y$ т.е. находит-ся минимум функционала

$$i = \iint_G (\varepsilon x^2 + \varepsilon y^2) dx dy \quad (2)$$

с ограничением (1). Используя метод множителей Лагранжа, задача определения поправок $\varepsilon x, \varepsilon y$ сводена к решению уравнения Пуассона для множителей λ :

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} = 2g, \quad g = \frac{\partial \varphi y}{\partial x} - \frac{\partial \varphi x}{\partial y} \quad (3)$$

с граничным условием Дирихле $\lambda|_r = 0$.

Разностное решение уравнения (3) проводится попеременно-треугольным методом, а сами поправки $\varepsilon x = \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial y}$, $\varepsilon y = -\frac{1}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial x}$. Последующий расчет поля давления сводится к простому интегрированию откорректированного градиента давления.

Разработанный численный алгоритм значительно эффективнее по затратам машинного времени, чем известные способы (Рочу П.) и требует ≈ 50 итераций для точности $\varepsilon \approx 10^{-3}$.

В § 4.9 описаны попеременно-треугольные алгоритмы интегрирования уравнений Навье-Стокса в физических переменных P, V .

Чтобы избежать особенности решения системы Навье-Стокса для несжимаемой жидкости, вызванной отсутствием явной связи условия соленоидальности с градиентом давления, записывается система уравнений в векторной форме: $U = \|u, v, p\|$,

$$c \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (AX \cdot U) + \frac{\partial}{\partial y} (AY \cdot U) = \frac{1}{Re} c \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

с матрицами

$$AX = \begin{vmatrix} u & 0 & 1 \\ 0 & u & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad AY = \begin{vmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & v & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{vmatrix}$$

Представление матриц AX, AY в виде суммы знакопостоянных: $AX = AX^+ + AX^-$, $K = \sqrt{1 + u^2/4}$

$$AX^+ = \begin{vmatrix} u/2 + K & 0 & u/2 + K \\ 0 & u & 0 \\ u/2 + K & 0 & 1/K \end{vmatrix}, \quad AX^- = \begin{vmatrix} -u/2 - K & 0 & -u/2 - K \\ 0 & u & 0 \\ -u/2 - K & 0 & -1/K \end{vmatrix}$$

позволяет перенести разработанную методику решения уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа на решение системы (4). Отличие для несжимаемой жидкости состоит в том, что система (4) решается как эллиптическая задача, несмотря на наличие неста-

дионарного члена с $\frac{\partial U}{\partial t}$. Возмущение матриц $\tilde{C}X$, $\tilde{C}Y$ проводится аналогично методике, описанной в разделе 2.

В разностную аппроксимацию уравнения неразрывности явным образом включается градиент давления, так как диагональные элементы $Ax_{33}^{\pm}$, $Ay_{33}^{\pm}$ в знакопостоянных матрицах $Ax^{\pm}$, $Ay^{\pm}$ не равны нулю. Это позволяет избежать искусственных способов включения давления в условие соленоидальности.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Теоретически обосновано и исследовано направление численного моделирования течений жидкости и газа, которое опирается на сведение дифференциальных задач к эффективно решаемым на ЭВМ системам алгебраических уравнений с треугольными матрицами.
2. Созданы методы получения дискретных законов сохранения массы, энергии, изменения количества движения на основе балансных соотношений и использовании в качестве интерполянтов аналитических решений уравнений Эйлера и Навье-Стокса с замороженными матрицами коэффициентов.
3. Создан новый метод построения неявных квазимоноотонных разностных схем для уравнений Эйлера, обеспечивающих минимальное размазывание скачков уплотнения и контактных разрывов.
4. Построены разностные схемы решения уравнений Навье-Стокса, обладающие "равномерной" /по двум направлениям/ сходимостью разностных решений к точным аналитическим. Определены способы и формулы возмущения матриц при диффузионных производных, позволяющих "равномерно" компенсировать погрешности односторонней аппроксимации конвективных производных.
5. Найдено граничное значение сеточного числа Рейнольдса, определены размеры "грубой" сетки, при которых величина физической вязкости не влияет на разностное решение.
6. Создан новый маршевый способ и разработаны алгоритмы численного интегрирования полных, параболизированных уравнений Навье-Стокса. Создан универсальный комплекс программ расчета двумерных течений вязкого газа при внешнем обтекании и внутренних течениях в каналах сложной геометрической формы.
7. Разработаны методики и решен класс задач "связанной" аэроупругости. Выделен характерный параметр относительной жесткости оболочки и его граничное значение, при котором существенно влияние деформации на аэродинамические характеристики.
8. Предложены и изучены новые попеременно-треугольные

разностные схемы расчета течений вязкой несжимаемой жидкости в переменных: завихренность, функция тока.

9. Создан новый алгоритм сквозного счета температур в жидкости и твердом теле для решения сопряженных задач остывания или нагревания тел в потоке и разработан универсальный комплекс программ.

10. Предложены новые решения проблемы расчета давления в потоках несжимаемой жидкости по рассчитанному полю скорости, основанные на использовании вариационной формулировки коррекции градиента давления.

11. Разработан новый неявный метод численного расчета течений вязкой несжимаемой жидкости в физических переменных.

12. На основе теоретических построений создан и успешно применен для решения важных практических задач комплекс программ численного моделирования течений жидкости и газа. Экономический эффект от внедрения результатов диссертационной работы составил 224 тыс. руб.

13. Материалы работы включены в учебные пособия: "Численный расчет сверхзвуковых течений газа" /соавтор Н.М.Беляев/- Киев: Вища школа, 1984г./Допущено Мивузсом СССР в качестве учебного пособия для студентов вузов/ ; "Сверхзвуковые течения газа. Методы численного решения" /соавтор Н.М.Беляев / - Днепропетровский ДГУ, 1977г.; "Численные методы газовой динамики" -Днепропетровский ДГУ, 1981г.; "Комплекс программ для расчета двумерных течений невязкого газа" /соавтор Н.Н.Беляев/- Днепропетровский ДГУ, 1984г.; "Разностные схемы и программы расчета сжимаемых течений газа" /соавтор Н.Н.Беляев/- Днепропетровский ДГУ, 1986г.; "Численный расчет распространения аэрозольных загрязнений" /соавтор Н.Н.Беляев/ - Днепропетровский ДГУ, 1990г., которые используются в учебном процессе в Днепропетровском госуниверситете и др. вузах.

Опубликованные работы по теме диссертации:

1. Беляев Н.М., Хрущ В.К. Деформация оболочки под воздействием сверхзвукового потока газа // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.-1979.-№ 3.- С. 54-59.

2. Беляев Н.М., Хрущ В.К. Численный расчет сверхзвуковых течений газа.- Киев: Вища школа, 1984.- 224с.

3. Беляев Н.Н., Хрущ В.К. Дифракция ударных волн в плоских каналах и на препятствиях треугольной формы // Гидромеханика (Киев).- 1986.- Вып. 54.- С. 8-11.

4. Беляев Н.Н., Хрущ В.К. Численное исследование движения ударных волн в плоских поворотных каналах // Прикладные вопросы аэродинамики летательных аппаратов. - Киев, 1984. - С.17-20.

5. Беляев Н.Н., Хрущ В.К. Обтекание цилиндрической оболочки, деформирующейся под воздействием сверхзвукового потока газа // Труды VIII научных чтений по космонавтике. - М., 1986. - С. 62-69.

6. Беляев Н.Н., Хрущ В.К. Расчет сверхзвукового обтекания цилиндрической оболочки с учетом аэроупругой деформации // Гидромеханика (Киев). - 1983. - Вып. 57. - С. 16-19.

7. Беляев Н.Н., Хрущ В.К. Распространение скачка уплотнения в канале с центральным телом прямоугольной формы // Гидроаэромеханика и теория упругости. - Днепропетровск: ДГУ, 1987. - С. 13-15.

8. Беляев Н.Н., Хрущ В.К. Численный расчет взаимодействия вдуваемой звуковой струи с основным сверхзвуковым потоком газа // Математические методы механики жидкости и газа. - Днепропетровск: ДГУ, 1981. - С.14-18.

9. Беляев Н.Н., Хрущ В.К. Движение плоской ударной волны над препятствиями в виде выемки и насыпи // Математические методы механики жидкости и газа. - Днепропетровск: ДГУ, 1982. - С. 21-25.

10. Беляев Н.Н., Хрущ В.К. Движение ударной волны над гибкой панелью // Гидроаэромеханика и теория упругости. - Днепропетровск: ДГУ, 1985. - С. 18-21.

11. Беляев Н.Н., Хрущ В.К. Треугольная схема первого порядка аппроксимации для решения уравнений Навье-Стокса // Математические методы механики жидкости и газа. - Днепропетровск: ДГУ, 1982. - С. 20-27.

12. Беляев Н.Н., Хрущ В.К. Расчет трансзвукового течения в поворотных каналах // Гидроаэромеханика и теория упругости. - Днепропетровск: ДГУ, 1986. - С. 27-32.

13. Беляев Н.Н., Хрущ В.К. Расчет взаимодействия скачка уплотнения с пластиной // Неосесимметричные задачи гидроаэродинамики и теории упругости. - Днепропетровск: ДГУ, 1988. - С.22-27.

14. Беляев Н.Н., Хрущ В.К. Попеременно-треугольная разностная схема решения уравнений Навье-Стокса // Гидромеханика (Киев). - 1983. - Вып. 48. - С. 43-51.

15. Библиенко Ю.Е., Просвирнин В.Л., Хрущ В.К. Расчет дви-

жения ударных волн в плоских каналах // Гидроаэромеханика и теория упругости.- Днепропетровск: ДГУ, 1984.- С. 28-32.

16. Беляев Н.Н., Макаренко А.В., Хрущ В.К. Сверхзвуковое течение вязкого газа над прямоугольной выемкой / Энергоперенос в нелинейных, неоднородных и неравновесных средах.- Минск: ИГМО АН БССР, 1986.- С. 22-26.

17. Ковалев С.А., Хрущ В.К. Расчет равновесного положения надутых оболочечных конструкций // Математические методы механики жидкости и газа.- Днепропетровск: ДГУ, 1986.- С. 36-41.

18. Ковалев С.А., Хрущ В.К. Расчет поперечного обтекания полуцилиндра вязкой несжимаемой жидкостью // Математические методы расчетов гидрогазодинамических течений.- Днепропетровск: ДГУ, 1990.- С. 49-54.

19. Ковура А.Б., Хрущ В.К. Численное моделирование распада вихревой пелены // Гидроаэромеханика и теория упругости.- Днепропетровск: ДГУ, 1985.- С. 33-37.

20. Хрущ В.К. Численный расчет течений вязкой теплопроводной жидкости на основе попеременно-треугольной разностной схемы // Математические методы теплопереноса.- Днепропетровск: ДГУ, 1987.- С. 62-70.

21. Хрущ В.К. Попеременно-треугольная разностная схема для расчета течений вязкой несжимаемой жидкости и решения сопряженных задач теплообмена // Математические методы механики жидкости и газа.- Днепропетровск: ДГУ, 1988.- С. 9-19.

22. Хрущ В.К. Маршевые способы численного интегрирования уравнений Навье-Стокса // Численное решение задач механики жидкости и газа.- Днепропетровск: ДГУ, 1988.- С. 9-19.

23. Хрущ В.К. Сверхзвуковое обтекание оболочек, деформирующихся под воздействием потока газа // Математические методы механики жидкости и газа.- Днепропетровск: ДГУ, 1984.- С. 13-19.

24. Хрущ В.К. Расчет поля давления при течении несжимаемой жидкости // Расчет течений жидкостей и газов.- Днепропетровск: ДГУ, 1989.- С. 11-16.

25. Хрущ В.К. Использование частных решений уравнений Навье-Стокса при построении разностных схем // Гидроаэромеханика и теория упругости.- Днепропетровск: ДГУ, 1989.- С. 33-40.

26. Хрущ В.К. Моделирование течений вязкой теплопроводной жидкости на основе попеременно-треугольных разностных схем // Моделирование и методы расчета процессов теплопереноса.- Днепропетровск: ДГУ, 1990.- С. 18-40.

27. Хрущ В.К. Попеременно-треугольные разностные схемы для решения уравнений Навье-Стокса // Математические методы механики жидкости и газа.-Днепропетровск: ДГУ, 1982.-С.15-20.

28. Хрущ В.К. Расщепление уравнений Эйлера в дифференциальной форме и построение разностных схем второго порядка точности // Гидроаэромеханика и теория упругости.-Днепропетровск: ДГУ, 1988.- С. 55-64.

29. Хрущ В.К. Численные методы газовой динамики.- Днепропетровск: ДГУ, 1981.- 80 с.

30. Хрущ В.К., Шевелев А.Г. Расчет течения вязкой жидкости при обтекании прямого угла // Математические методы тепло-массопереноса.- Днепропетровск: ДГУ, 1986.- С. 7-12.

31. Хрущ В.К., Шевелев А.Г. Разностная схема бегущего счета для решения уравнений Эйлера // Численные решения задач механики жидкости и газа.-Днепропетровск: ДГУ, 1988.-С.13-19.

32. Хрущ В.К., Шевелев А.Г. Неявная квазимонотонная схема бегущего счета для решения уравнений Эйлера // Гидроаэромеханика и теория упругости.-Днепропетровск: ДГУ, 1991.-С.17-28.

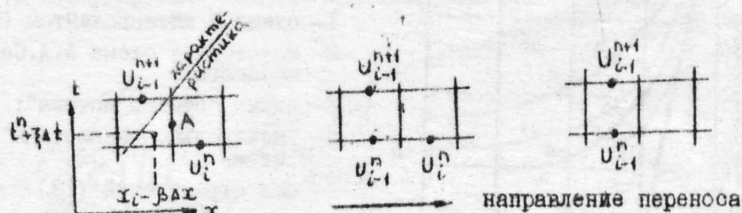


Рис. 1.1. Узлы интерполирования при построении интерполантов, в среднем приближающих точные решения уравнений Эйлера

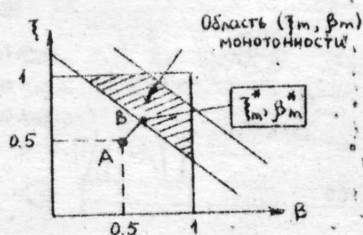


Рис. 1.2. Множество значений параметров \$(\beta_m, \beta_m^*)\$, обеспечивающих монотонность разностной схемы

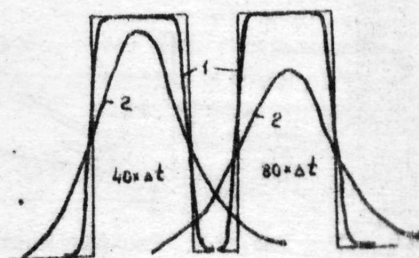


Рис.1.3. Распространение разрыва для линейного уравнения переноса: 1- квазимонотонная, 2- неявная схема "против потока"

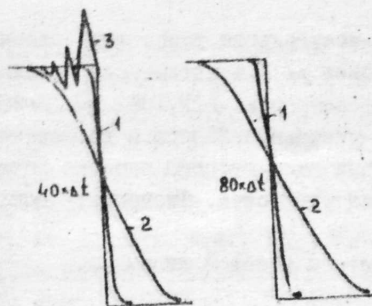


Рис. 1.4. Размазывание скачка уплотнения: 1-квазимоноотонная схема; 2- неявная схема против потока; 3- схема 2-го порядка аппроксимации

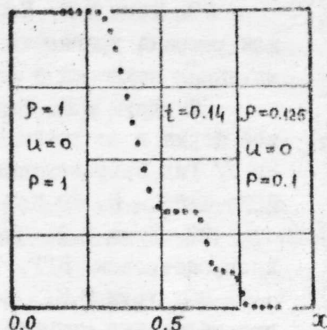


Рис. 1.5. Распределение давления в задаче распада разрыва

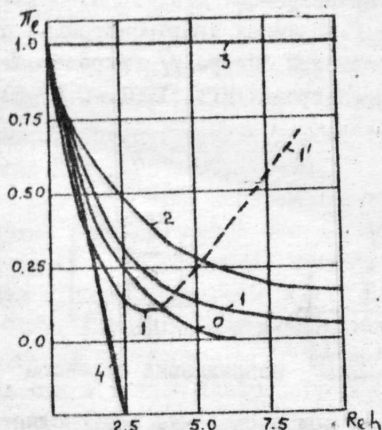


Рис. 2.1. Зависимость коэффициентов при второй разделенной разности от сеточного числа Рейнольдса :

- 0- "точная" разностная схема
- 1- схема с интерполянтном (5)
- 2- моноотонная схема А.А.Самарского;
- 3- схема "против потока";
- 4- "центрально-разностная" схема;
- 1- без ограничений (13)

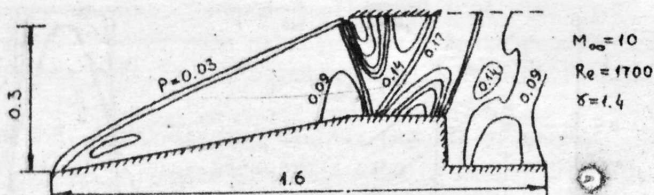


Рис. 2.2. Распределение давления P в проточной части канала ПВРД. Расчет проводился маршевым способом с глобальными итерациями

Таблица. Значение коэффициента α экспоненциального сгущения сетки в зависимости от числа Рейнольдса Re и числа узлов сетки N , $Re_{\Delta} = Re/N$

$Re \backslash Re_{\Delta}$	12	60	120	180	6000
100	$\alpha = 2.1$	-	-	-	-
10^4	$\alpha = 1.3$	4.4	-	-	-
10^6	$\alpha = 1.3$	3.7	5.4	-	-
10^8	$\alpha = 1.2$	3.6	5.2	6.5	11.8

В части таблицы, отмеченной -, нельзя выбрать коэффициент сгущения α , обеспечивающий заданные условия

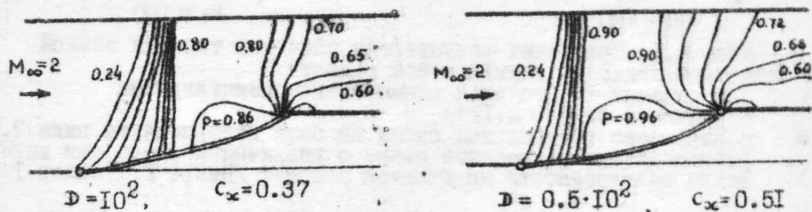


Рис. 3.1. Изменение структуры течения в плоском канале с деформируемой панелью при изменении жесткости D

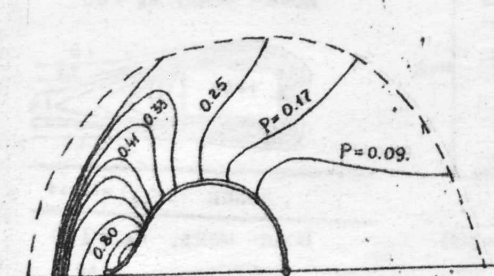


Рис. 3.2. Распределение давления P и форма деформируемого полуцилиндра в сверхзвуковом потоке: $M_{\infty} = 4$, $D = 0.3 \cdot 10^3$

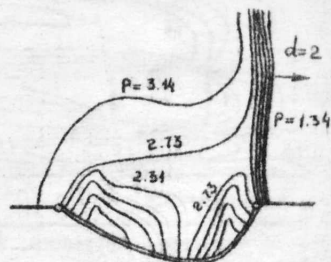


Рис. 3.3. Распределение давления и форма прогиба мембраны в момент прохождения ударной волны: $D = 3.12$

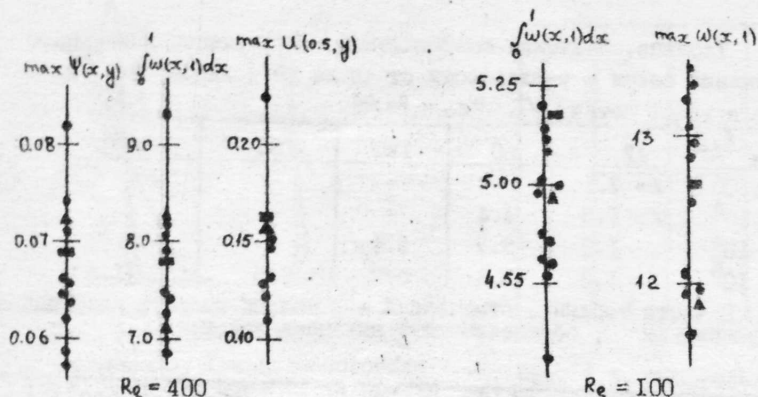


Рис. 4.1. Сравнение результатов расчетов течения вязкой несжимаемой жидкости в квадратной полости:

- ▲ - поперечно-треугольная схема с экспоненциальными поправками вида (2.11);
- - поперечно-треугольная схема на базе интерполанта вида (2.5);
- - разнообразные разностные схемы с различными способами вычисления завихренности на стенках полости /Пейре Р., Тейлор Т./

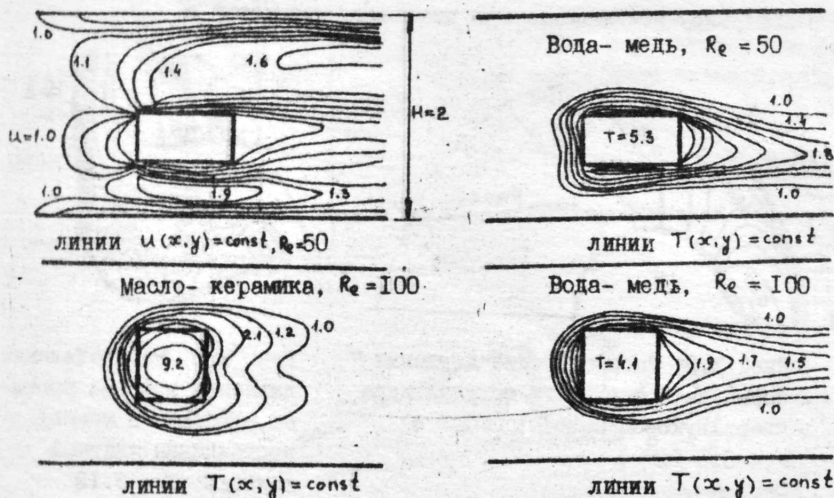


Рис. 4.2. Результаты решения сопряженных задач остывания тел в потоке несжимаемой жидкости.

Автореферат

Подписано к печати 10.03.92. Формат 60x84 1/16. Бумага
писчая. Печать плоская. Уч.-изд. л. 2, 0. Усл. печ. л. 2, 0.
Тираж 100. Заказ 92. Бесплатно.
Участок оперативной полиграфии ДХТИ.
320094, г. Днепропетровск, Набережная Победы, 40