

4-130415

Министерство высшего и среднего специального образования СССР

Московское
ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени
высшее техническое училище имени Н. Э. Баумана

НА ДОМ
НЕ ВЫДАЕТСЯ

В. И. УСЮКИН

ТЕХНИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МЯГКИХ ОБОЛОЧЕК

(Специальность 05.025 — Динамика и прочность машин)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора технических наук

2013

Исследования напряженно-деформированного состояния весьма тонких оболочек последнее время становятся все более актуальными. Новые задачи возникают при создании современных конструкций из пленок, тканей, композитных материалов, работающих при действии распределенных составляющих внешних нагрузок. При расчёте необходимо рассматривать схему, так называемой, мягкой или мембранной оболочки. Особенность её состоит в том, что оболочка считается безмоментной и не способной воспринимать усилия сжатия.

В рамках этой схемы не удастся использовать линейную теорию, так как она, в большинстве случаев, не позволяет определить деформированную форму оболочки и учесть влияние изменения геометрии на напряженное состояние.

Наиболее полной является общая нелинейная постановка. Вопросы нелинейной теории мягких оболочек, в различных вариантах, разрабатывались С.А.Алексеевым, А.С.Григорьевым, Я.Оркишем, Д.Адкинсом, Г.Фостером. Нелинейный подход, однако, оказывается, в большинстве случаев, весьма сложным. В настоящее время полученные для мягких оболочек нелинейные решения ограни-
ются лишь классом осесимметричных задач.

После того как была опубликована работа Ю.Н.Работнова, в которой исследовалась деформация безмоментной оболочки в краевой зоне, открылись возможности для построения приближенных теорий. Эти теории, справедливые при малых деформациях, основываются преимущественно на, так называемых, линеаризованных соотношениях. Отдельные аспекты теории мягких оболочек с использованием такого подхода рассматривались в трудах Э.Рейснера, С.А.Алексеева.

Метод расчленения деформированного состояния мягкой оболочки на основное и дополнительное, рассматривавшийся Л.И.Бабухом и в наших работах, позволил разработать приближенные теории и получить новые практически важные результаты.

Данная диссертация посвящена построению приближенной теории мягких оболочек вращения, которая названа нами технической теорией. Основное внимание в ней уделяется разработке и обоснованию упрощенных схем расчёта. Значительное место отведено выявлению общих закономерностей, свойственных дефор-

мированию различных мягких оболочек.

Метод расчленения является одним из наиболее важных приёмов приближенного решения статических и динамических задач теории оболочек. Он заключается в том, что деформированное состояние оболочки разделяется на основное и дополнительное, каждое из которых описывается своей системой уравнений. Наиболее простое основное состояние корректируется дополнительным на отдельных участках оболочки. Важные результаты в разработке этого метода, применительно к теории моментных оболочек, принадлежат А.Л.Гольденвейзеру.

При построении технической теории мягких оболочек в работе используются варианты подобного подхода. Все усилия и параметры, характеризующие геометрию деформированного состояния оболочки, представляются в виде суммы компонент основного состояния и дополнительных слагаемых. Геометрия оболочки в основном состоянии считается известной. В качестве такой геометрии может быть принята начальная (раскройная) форма оболочки, или некоторая промежуточная, близкая к окончательной и определенная при упрощенном нагружении или при более простых граничных условиях (например, без учёта стеснения перемещений). Усилия в основном состоянии предлагается находить для заданной геометрии по линейной теории.

Линеаризованная относительно основного состояния система уравнений соответствует дополнительному состоянию. Она, дополняя линейную теорию, позволяет уточнить все компоненты усилий и определить окончательную геометрию оболочки.

Предлагаемую последовательность определения деформированного состояния мягких оболочек можно трактовать несколько иначе. Можно её рассматривать как некоторый итерационный процесс. Первое приближение этого процесса соответствует выбору геометрии основного состояния и использованию уравнений равновесия линейной теории. Второе приближение определяется линеаризованной системой уравнений, выраженной через дополнительные усилия и перемещения. Это, второе приближение, по существу, строится для того, чтобы корректировать линейную теорию. Введение некоторых дополнительных упрощений позволяет описать его с помощью асимптотических решений.

Диссертация состоит из введения, восьми глав и заключения. Во введении дается обзор работ, посвященных исследованиям мягких оболочек. Рассматриваются различные пути определения деформированного состояния оболочек. Формулируется подход, основанный на методе расчленения.

Обоснованию предлагаемой последовательности расчёта оболочек и выводу общей системы уравнений технической теории посвящена первая глава.

Вначале рассматривается мягкая оболочка, не имеющая участков складок. Основное состояние соответствует осесимметричному нагружению, для которого меридиональное и окружное усилия T_0 и T_2 определяются из уравнений равновесия при известной геометрии оболочки. Дополнительному состоянию соответствуют усилия T_1 , T_2 , S . Дополнительные нелинейные деформации выражаются через перемещения.

$$\begin{aligned}\varepsilon_1^* &= \varepsilon_1 + \frac{1}{2} (\varepsilon_1^2 + \gamma_1^2 + \vartheta_1^2) \\ \varepsilon_2^* &= \varepsilon_2 + \frac{1}{2} (\varepsilon_2^2 + \gamma_2^2 + \vartheta_2^2) \\ \gamma^* &= \gamma_1 + \gamma_2 + \varepsilon_1 \gamma_2 + \varepsilon_2 \gamma_1 + \vartheta_1 \vartheta_2\end{aligned}\quad (1)$$

где

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{R_1 \partial \theta} - \frac{w}{R_1} & \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{r \partial \beta} + \frac{u}{r} \cos \theta - \frac{w}{r} \sin \theta \\ \gamma_1 &= \frac{\partial v}{R_1 \partial \theta} & \gamma_2 &= \frac{\partial u}{r \partial \beta} - \frac{v}{r} \cos \theta \\ \vartheta_1 &= \frac{\partial w}{R_1 \partial \theta} + \frac{u}{R_1} & \vartheta_2 &= \frac{\partial w}{r \partial \beta} + \frac{v}{r} \sin \theta\end{aligned}\quad (2)$$

Вводятся обобщенные усилия в форме

$$\begin{aligned}T_1^* &= \frac{1 + \varepsilon_2}{1 + \varepsilon_1} (T_0 + T_1) \\ T_2^* &= \frac{1 + \varepsilon_1}{1 + \varepsilon_2} (T_0 + T_2) \\ S^* &= S\end{aligned}\quad (8)$$

Учитывая эти обозначения, условие равновесия, соответствующее принципу возможных перемещений, принимает вид

$$\iint [T_1^* \delta \varepsilon_1^* + T_2^* \delta \varepsilon_2^* + S^* \delta \gamma^*] R_1 z d\theta d\beta + \\ + \iint \{ p_n [(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \delta w - \gamma_1 \delta u - \gamma_2 \delta v] - \rho_1 \delta u - \rho_2 \delta v \} R_1 z d\theta d\beta = 0 \quad (4)$$

Нормальная составляющая нагрузки p_n имеет характер гидростатического давления, следящего за нормалью к поверхности, а тангенциальные составляющие ρ_1 , ρ_2 существенно меньше нормальной p_n , в которую входит давление p_0 , учитываемое в уравнениях основного состояния ($p_n = p_0 + p$).

Использование условия (4), уравнений основного состояния, а также соотношений (1) и (3) позволяет после линеаризации получить уравнения равновесия дополнительного состояния оболочки.

$$\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} + \frac{\partial(T_1 z \gamma_1)}{2 R_1 \partial \theta} + T_{20} \frac{\partial \gamma_2}{2 \partial \beta} - T_{10} \frac{\varepsilon_1}{R_1} - T_{20} \frac{\varepsilon_2}{R_2} = p \quad (5)$$

$$\frac{\partial(T_1 z)}{2 R_1 \partial \theta} - T_2 \frac{\cos \theta}{2} + \frac{\partial S}{2 \partial \beta} + T_{20} \frac{\gamma_1}{R_2} + T_{30} \frac{\partial \gamma_2}{2 \partial \beta} - T_{20} \frac{\cos \theta}{2} \varepsilon_1 + \frac{\partial(T_{20} z \varepsilon_2)}{2 R_1 \partial \theta} = -p_1 \quad (6)$$

$$\frac{\partial T_2}{2 \partial \beta} + \frac{\partial(S z)}{2 R_1 \partial \theta} + S \frac{\cos \theta}{2} + T_{10} \frac{\gamma_1}{R_1} + \frac{\partial(T_{10} z \gamma_1)}{2 R_1 \partial \theta} + T_{20} \frac{\cos \theta}{2} \gamma_2 + T_{20} \frac{\partial \varepsilon_1}{2 \partial \beta} = -p_2 \quad (7)$$

Физические соотношения, связывающие усилия T_1 , T_2 , S с деформациями принимаются в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_{10} + a_{11} T_1 + a_{12} T_2 \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_{20} + a_{12} T_1 + a_{22} T_2 \\ \gamma &= a_{\gamma\gamma} S \end{aligned} \quad (8)$$

Деформации ε_{10} , ε_{20} соответствуют усилиям основного состояния. Они могут, в частности, определяться из нелинейных физических уравнений. В этом случае коэффициенты a_{11} , a_{12} , a_{22} , $a_{\gamma\gamma}$ могут быть получены путем линеаризации физических законов в точке, соответствующей усилиям T_{10} ; T_{20} .

Уравнения (2), (5)–(8) представляют собой полную систему линейаризованных уравнений, описывающих деформированное состояние оболочки на участках, где отсутствуют складки. Они соответствуют малым, относительно основного состояния, деформациям оболочки. Это значит, что уравнения справедливы при малых значениях компонентов деформаций и при малых дополнительных деформациях, когда расчёт ведётся для оболочек, имеющих начальную деформацию, определяемую геометрией основного состояния.

Дополнительные усилия T_1 ; T_2 ; S в уравнениях равновесия (5)–(7) являются, так называемыми, "истинными усилиями", отнесенными к окончательным размерам элементов оболочки. В работе получена также система уравнений для "условных усилий", которые соответствуют начальной геометрии. Отличаются они слагаемыми, содержащими усилия основного состояния, умноженными на линейные компоненты деформаций. При малых деформациях, когда не делается различия между истинными и условными усилиями, можно учитывать лишь общие, наиболее существенные члены этих уравнений, соответствующие усилиям основного состояния, умноженным на углы поворота и их производные. Эти упрощенные соотношения позволяют построить простые приближенные решения.

Деформированное состояние оболочки определяется решением полученной системы уравнений и граничными условиями. Вариационный подход при выводе уравнений равновесия позволил построить систему граничных условий для линейаризованной задачи. На каждом торце для общего несимметричного случая нагружения должны удовлетворяться три граничных условия.

Сформулированы геометрические и силовые граничные условия на каждом торце. Рассмотрены различные комбинации условий. При осесимметричном случае нагружения число условий на граничном контуре снижается до двух. В отличие от линейной теории, рассматриваемый подход позволяет удовлетворить граничным условиям относительно нормального перемещения. Силовые условия включают слагаемые, являющиеся следствием изменения геометрии.

Система уравнений мягкой оболочки при осесимметричной деформации сведена к одному уравнению относительно угла поворота нормали.

$$f_1 \frac{d^2 \vartheta}{d\theta^2} + f_2 \frac{d\vartheta}{d\theta} + f_3 \vartheta - B^2 \vartheta = f_4 \quad (9)$$

Здесь: $f_1, \dots, f_n$ - переменные коэффициенты, зависящие от координаты θ , $B^2 = Eh/p.R_2$ - большой параметр. Уравнение (9) справедливо при малых компонентах линейных деформаций для изотропной оболочки. С его помощью удается построить приближенные решения для оболочки при осесимметричной нагрузке.

В оболочке, у которой одно из главных усилий равно нулю, образуются складки. Эта зона называется складчатой или односторонней. Геометрия оболочки при расчёте обычно представляется как некоторая поверхность, образованная системой нитей, направленных вдоль главного растягивающего усилия. Задача рассматривается как нелинейная. Только некоторые виды нагрузок позволяют получить простые решения.

В главе I предлагается схема расчёта оболочки в одноосной области, основанная на линеаризованном подходе. Здесь также используется метод расчленения конечного состояния на основное и дополнительное.

Геометрия основного состояния задается. Для узкой одноосной области, в качестве основной рекомендуется принимать геометрию раскроя оболочки. В более общем случае геометрия основного состояния выбирается близкой к окончательной. Линеаризованная относительно этого состояния система уравнений определяет деформированную форму оболочки. Осесимметричная задача описана одним уравнением, выраженным через перемещение по нормали к поверхности основного состояния.

Особенность исследования таких оболочек состоит в том, что граница одноосной и двухосной областей заранее неизвестна. Плавное, без изломов, сопряжение того и другого участков позволяет определить размеры одноосной области и деформированную геометрию оболочки.

Предлагаемый линеаризованный подход является достаточно общим. Рассмотренные решения некоторых задач, сравнение их с нелинейными подтверждают этот вывод.

Построенная в первой главе последовательность расчёта мягких оболочек, основанная на методе расчленения, а также полученные общие уравнения одноосной и двухосной областей, далее в работе используются для выявления особенностей деформирования различных мягких оболочек. Путем введения дополнительных гипотез разрабатываются упрощенные схемы расчёта.

Главы вторая и третья посвящены исследованию деформаций цилиндрических и пологих мягких оболочек.

Общий случай деформирования цилиндрической оболочки, не имеющей складок, описывается уравнениями, полученными из полных линейаризованных соотношений. Осесимметричная задача сводится к наиболее простому решению, позволяющему использовать понятие о безмоментном краевом эффекте. Нормальное перемещение определяется безмоментным решением и экспоненциальной функцией, соответствующей краевой зоне. От параметра экспоненты зависит изменяемость функции перемещения вблизи края. Длина краевой зоны — малая величина, она определяется деформацией оболочки в осевом направлении.

Большое внимание уделено рассмотрению деформации цилиндрической оболочки, нагруженной изгибающим моментом. Выясняются некоторые важные обстоятельства, связанные с решением задач, при совместном воздействии на оболочку осесимметричных усилий и изгибающего момента. Оказывается, что для оболочки, нагруженной такой системой сил, нужно использовать наиболее полные линейаризованные уравнения. Пренебрежение казалось бы малыми членами может привести к ошибочным результатам. Проведенный анализ системы уравнений показал, что для оболочки, усилия основного состояния которой осесимметричны и равны T_{10} и T_{20} , а усилия от изгибающего момента соответствуют дополнительному состоянию, уравнение, описывающее деформированное состояние, имеет вид

$$\frac{d^4 w_i}{ds^4} - \frac{Eh}{T_{10}} \frac{d^4 w_i}{ds^4} + \frac{2T_{10} - T_{20}}{T_{10}} \frac{d^2 w_i}{ds^2} = 0 \quad (10)$$

Здесь w_i — перемещение, определяющее изгиб оболочки $w = w_i \cos \beta$. Из уравнения (10) видно, что для оболочки, у которой усилия основного состояния связаны соотношением $T_{20} = 2T_{10}$, решение можно представить в виде обычного балочного, к которому прибавляется решение краевого эффекта с показателем изменяемости таким же, что и при осесимметричной деформации. Форма сечения оболочки при этом остается круговой.

При нагружении цилиндрической оболочки изгибающим моментом можно наблюдать сплющивание поперечного сечения. Для выяснения

несколько это существенно, при наличии внутреннего давления, необходимо строить решение об изгибе оболочки несколько иначе. В качестве геометрии основного состояния принимается изогнутая равновесная форма — **тороид**. **Линеаризация** уравнений относительно основного состояния позволяет свести задачу к системе алгебраических зависимостей, связывающих параметр нагрузки $m = (MR/EJ_z)(Eh/\rho R)^{1/2}$ с перемещением U . Касательное перемещение $v = U \cos 2\beta$ соответствует искажению контура сечения. Расчёты показывают, что вплоть до момента образования складок, когда наибольшее усилие от изгиба равно усилию от внутреннего давления, величина перемещения U оказывается весьма малой. Полученные результаты для цилиндрической оболочки позволяют строить приближенные решения для изгиба мягких оболочек, близких к цилиндрическим. Деформация оболочек находится так же как балки с добавлением решения краевого эффекта. Искривление поперечного сечения при изгибе вплоть до образования складчатых участков несущественно.

При действии несимметричной поверхностной нагрузки, сильно меняющейся в направлении полярной координаты, оболочка вращения получает существенное искажение кругового сечения. Деформированное состояние в общем случае описывается довольно сложными соотношениями. Введение дополнительных гипотез позволяет построить упрощенную теорию.

Применительно к цилиндрической оболочке, нагруженной несимметричной системой сил, в работе построена приближенная теория, которую можно считать аналогом известной полубезмоментной теории цилиндрической оболочки. Здесь, в направлении образующей, оболочка считается линейной. При составлении уравнений учитывается искажение контура в окружном направлении. Линеаризация и введение кинематических гипотез ($\epsilon_z = 0$, $\chi = 0$) позволяет описать деформацию оболочки уравнением

$$\frac{\partial^4 w}{\partial s^4} - \frac{p_0 R}{Eh} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + w \right) = - \frac{R^2}{Eh} \frac{\partial^4 p}{\partial \beta^4}$$

При решении этого уравнения нормальное перемещение w , дополнительная поверхностная нагрузка p , все усилия и перемещения представляются в форме тригонометрических рядов по угловой координате β .

Предложенная приближенная теория несимметричной деформации цилиндрической оболочки позволяет решить ряд задач. Рассматриваются следующие задачи: 1) Определяется деформация цилиндра конечной длины, нагруженного внутренним давлением и постоянной по длине погонной радиальной нагрузкой. 2) На оболочку действует касательная составляющая нагрузки, приложенная по образующей. 3) Оболочка нагружена несимметричной нагрузкой, направленной вдоль образующей и приложенной на торце. 4) Локальное радиальное усилие действует на малый участок поверхности оболочки. Для всех задач в рядах получены перемещения и усилия.

Представленные примеры являются иллюстрацией возможностей приближенной теории мягкой цилиндрической оболочки. Другие случаи загрузки позволяют, используя предлагаемый подход, получить простые соотношения для усилий и перемещений.

П о л о г а я о б о л о ч к а позволяет, значительно упростив общую систему уравнений, выяснить основные особенности, свойственные решениям мягких оболочек на участках, где они мало отличаются от плоских мембран. В г л а в е т р е т ь е й рассмотрены уравнения мягкой пологой оболочки и решения ряда задач. Уравнения для неоднородного основного напряженного состояния представлены в виде двух зависимостей, выраженных через нормальное перемещение и функцию Эри.

Для сферического пологого сегмента решения уравнений приведены в модифицированных функциях Бесселя. Рассмотрены следующие задачи осесимметричной деформации мягкой оболочки:

1. Оболочка нагружена равномерным давлением и жестко закреплена на торце. 2. Чечевицеобразная оболочка состоит из сферических сегментов и нагружена давлением и погонной радиальной силой у стыка. 3. Оболочка у полюса имеет жесткий диск малого размера, к которому приложена сосредоточенная сила. В последних двух задачах величины сил приняты такими, что участков складок не возникает. Приводятся соотношения для усилий и перемещений оболочек. Построены зависимости приложенных усилий от перемещений при некоторых значениях внутреннего давления. Отмечается нелинейный характер этих соотношений, соответствующий увеличению жесткости системы с ростом давления.

Получены решения для несимметричной деформации пологого

сферического сегмента. Рассмотрены задачи о воздействии на малый диск, находящийся в полюсе оболочки, сосредоточенного изгибающего момента, а также касательного усилия. Построены аналитические зависимости и графики, связывающие внешние нагрузки с перемещениями. Несимметричная задача для пологой сферической оболочки решена также для случая загрузки сегмента радиальными самоуравновешенными силами.

В главе четвертой рассматриваются особенности приближенного решения типа "краевого эффекта" для мягкой оболочки вращения в зоне, где отсутствуют складки.

Однородная часть уравнения (9), описывающая осесимметричную деформацию оболочки характеризуется тем, что имеет большой параметр B^2 . Также как это сделано Геккелером при построении приближенного решения моментной оболочки, полагается, что производные от функций перемещений и усилий значительно больше самих функций. Имея в виду также, что $B^2 \gg f_3$, а краевая зона неполога и невелика (так что кривизны в ней можно считать постоянными) вместо (9), получим

$$\frac{d^2 \vartheta_i}{d\theta^2} - \gamma^2 \vartheta_i = 0 \quad \left(\gamma^2 = \frac{2R_i^2}{R_2^2} \frac{Eh}{\rho R_2} \right) \quad (II)$$

Затухающая часть решения этого уравнения, вблизи края $\theta = \theta_0$, имеет вид

$$\vartheta_i = C e^{-\gamma(\theta_0 - \theta)} \quad (I2)$$

Решение показывает, что функция ϑ_i , при больших значениях γ быстро меняется вблизи края оболочки. Длина краевой зоны мала. Производные от ϑ_i в γ раз больше самой функции. Таким образом, предположения, принятые при упрощении уравнения (9) справедливы. Общее решение для ϑ_i складывается из составляющих, соответствующих основному состоянию и дополнительному, определяемому асимптотическим решениям (I2). Дополнительные перемещения и усилия, также как и в теории моментного краевого эффекта, наиболее существенны для перемещений w по нормали к поверхности, угла ϑ_i и для окружного усилия T_2 . Остальные усилия и перемещения соответствуют основному состоянию и приближенно определяются по линейной теории.

Рассматриваются также упрощения, свойственные неосесимметричному краевому эффекту. Анализ полной системы уравнений показывает, что при достаточно плавно меняющейся вдоль окружной координаты нагрузке, если удовлетворится условие

$$n^2 \ll \frac{R_1^2}{R_2^2} \frac{Eh}{T_0}$$

где n — номера гармоник, по которым раскладывается внешняя нагрузка, решение краевого эффекта можно использовать для общего случая деформации. Перемещение по нормали w , угол поворота ϑ и окружное усилие T_z складываются из составляющих соответствующих основному состоянию и краевому эффекту. Последние описываются экспоненциальной функцией с показателем изменчивости таким же, что и при осесимметричной деформации.

Упрощения, соответствующие теорий краевого эффекта мягкой оболочки используются в работе для решений применительно к торообразной и сферической оболочкам, рассмотренным в последующих главах.

Глава пятая посвящена исследованию деформированного состояния мягкой торообразной оболочки. Особое внимание уделено наиболее простому случаю загрузки — равномерному давлению.

Задача о деформации торообразной оболочки имеет ряд особенностей. Хорошо известно, что для такой оболочки нельзя определить деформированную форму по линейной теории. Нормальное перемещение в зоне нулевой кривизны терпит разрыв.

Линеаризованные уравнения, основанные на методе расчленения, позволяют найти конечные перемещения вдоль всего контура оболочки. В работе построен алгоритм численного решения системы уравнений торообразной круговой оболочки, нагруженной давлением p .

$$2f_1 \sin \theta (k + \sin \theta) + (2k + \sin \theta) \cos \theta \cdot \vartheta_1 = C_1$$

$$a_1(\theta) \frac{d^2 f_1}{d\theta^2} + a_2(\theta) \frac{df_1}{d\theta} + a_3(\theta) B f_1 = a_4(\theta) + B a_5(\theta)$$

$$\frac{dw}{R d\theta} = \varepsilon_1 \sin \theta + \vartheta_1 \cos \theta$$

Здесь f_1 - безразмерное дополнительное меридиональное усилие; $B = E h / \mu R$; $k = a/R$, $a, \dots, a_5$ - переменные коэффициенты, C - константа, a, R - геометрические параметры тора.

Решение ведется методом прогонки. Система уравнений имеет четвертый ^{порядок}. На каждой границе участка интегрирования при $\theta = \pm \pi/2$ необходимо удовлетворить двум граничным условиям (перемещение вдоль оси вращения w и угол поворота φ должны быть равны нулю). При этих условиях на ЭВМ был проведен расчёт торообразной оболочки, имеющей параметры $k = 5,0$; $B = 200, 500, 1000$. Построены графики осевого перемещения $w(\theta)$ и функции $f_1(\theta)$. Перемещение $w(\theta)$ на всем интервале интегрирования принимает конечные значения. Наибольшие перемещения вблизи $\theta = 0$ примерно пропорциональны нагрузке. Усилие $f_1(\theta)$ в этой же зоне имеет наибольшую величину. При тех параметрах нагрузки, при которых проводился расчёт, условие малости дополнительных усилий везде выполняется. Угол же поворота в зоне вблизи $\theta = 0$ оказывается немалым по сравнению с угловой координатой. Ниже решение линеаризованных уравнений сравнивается с полным нелинейным. Это сравнение показывает, что невыполнение условия $\varphi \ll \theta$ в узкой зоне вблизи линии нулевой кривизны можно считать несущественным.

Полученное решение позволяет построить деформированную форму торообразной оболочки. Существенно влияет на форму величина коэффициента Пуассона. Особенно заметно это влияние на радиальное перемещение. Построенные кривые деформированной поверхности оболочки показывают, что при коэффициентах $\mu = 0,5$ и $\mu = 0$ перемещения на участках отрицательной кривизны имеют даже разные знаки.

В этой же главе рассматриваются особенности деформирования торообразной оболочки при воздействии внутреннего давления и радиальной погонной силы, приложенной к внутреннему экватору. Используются упрощения краевого эффекта. При сравнительно небольшой погонной силе, когда в оболочке не возникает участков складок, перемещения w и φ , а также окружное усилие составляются из слагаемых, соответствующих безмоментному линейному решению и краевому эффекту.

При больших радиальных силах геометрия поверхности оболочки состоит из двух участков. Участок, где нет складок,

описывается теми же уравнениями. Для зоны складок использованы соотношения, подробно рассмотренные в первой главе. Сопряжение этих двух участков приводит к зависимости между усилием и перемещением тора при наличии зон складок.

Несимметричная деформация торообразной оболочки исследуется с использованием теории краевого эффекта. На примере задачи с воздействием нескольких (m) локальных радиальных сил, приложенных к нити, сопряженной с оболочкой по внутреннему экватору тора, удастся проследить за особенностями этого приближенного решения.

Нагрузка, приложенная к нити раскладывается в ряд по полярной координате. Далее используется решение краевого эффекта и уравнение нити. Сопряжение оболочки и нити определяет радиальное перемещение оболочки в экваториальной плоскости от действия сил P .

$$\frac{w}{z} = \sum_n \frac{1 + \cos \frac{2\pi n}{m}}{(n^2 - 1) + \frac{4\pi^2}{Eh} E h \left(T_n / E h \right)^{1/2}} \cos n\beta$$

Суммирование здесь ведется для $n = m i / 2$, где $i = 1, 2, 3, 4$. Это соотношение позволяет построить зависимость между силой и перемещением точки её приложения для разных давлений в оболочке.

Пологая торообразная оболочка, рассмотренная в конце главы, позволила ещё раз, с других позиций, выяснить особенности деформирования оболочки вблизи линии нулевой кривизны. Получено разрешающее уравнение, которое решается в степенных рядах. Параметр рядов $z = E h R \theta^2 / p a^2$.

Рассмотрены две задачи. 1. Торообразная оболочка закреплена на торцах при $\theta = \pm \theta_0$ и нагружена равномерным давлением. 2. Оболочка, состоящая из двух пологих торообразных сегментов, образующих замкнутую полость с двумя жесткими цилиндрами, нагружена давлением и погонными силами, приложенными к цилиндрам. Это своеобразный "сдвиг" мягкой оболочки.

Аналитические решения в том и другом случае позволили выделить главные слагаемые осевого и радиального перемещений оболочки, а также дополнительные усилия, возникающие вследствие изменения геометрии. Полученные соотношения для пере-

мещений оболочки конечны на всей её поверхности. Определен порядок малой величины угла поворота вблизи линии нулевой кривизны.

В шестой главе рассмотрены общие уравнения и отдельные решения для мягкой сферической оболочки. Они позволяют установить предельные значения параметров для асимптотических решений, соответствующих краевому эффекту и пологой оболочке. Выясняются также особенности деформирования оболочки при наличии подкреплений. Строится геометрия оболочки, имеющей одноосные участки.

Три результирующих уравнения представлены через перемещение по нормали к поверхности и две разрешающие функции. Общий интеграл составляется из трех типов слагаемых, соответствующих линейному решению, решению неоднородных уравнений и решению уравнения

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + ctg\theta \frac{dw}{d\theta} - \left(\frac{n^2}{\sin^2\theta} + B^2 \right) w = 0$$

$$(B^2 = \frac{2Eh}{pR}, \quad n - \text{номер гармоники}).$$

Последние составляющие представляются в функциях Лежандра порядка n комплексного индекса. Функции эти табулированы, имеются также асимптотические формулы. Ими определяются все компоненты усилий и перемещений оболочки.

В качестве примера рассмотрена осесимметричная задача о деформировании сферического сегмента, закрепленного у основания и нагруженного равномерным давлением. Показано, что для непологих участков оболочки функции Лежандра, описывающие деформации в краевой зоне, могут быть аппроксимированы экспоненциальными функциями и все особенности деформирования оболочки при этом оказываются теми же, что при краевом эффекте. Для пологих участков оболочек функции Лежандра можно представить через функции Бесселя. Таким образом, условия, при которых одни функции можно заменить другими, определяют пределы применимости схемы пологой оболочки, с одной стороны, и краевого эффекта с другой. Эти условия, полученные для сферических оболочек, приближенно можно распространить на другие оболочки вращения.

Неосесимметричная деформация сферической оболочки рассмотрена применительно к задаче о воздействии на оболочку темпе-

ратуры, распределенной по закону $t^* = t^* \rho_n^* (\cos \theta) \cos n\beta$. Оболочка замкнута в полюсе и закреплена на торце. В этом случае достаточно трех геометрических граничных условий. Построенные формулы и графики показывают, как меняются усилия и перемещения по поверхности. Наибольших значений достигают нормальное перемещение и окружное усилие. Остальные компоненты усилий и перемещений примерно в B^2 раз меньше.

Особенности деформирования оболочки, имеющей одноосные участки, рассмотрены применительно к задаче о равновесии непологой чечевицы, образованной двумя симметричными срезами сферы. Оболочка нагружена давлением. У стыка оболочек возникают складки. Используются соотношения для участка складок, полученные в первой главе. Остальная зона описывается решением, полученным выше. Сопряжение участков позволяет построить деформированную форму оболочки и найти границу зоны складок.

Совместная работа мягкой оболочки и подкрепляющих ее силовых элементов исследуется на примере задачи о сфере, имеющей нерастяжимые, дискретно расположенные вдоль меридиана нити. Оболочка нагружена равномерным давлением. Считается, что быстрота изменяемости функции нормального перемещения оболочки вдоль меридиана существенно ниже быстроты изменяемости вдоль параллели. Упрощенные уравнения позволяют получить решение для перемещений в виде экспоненциальных функций с переменным, зависящим от координаты θ коэффициентом. Это решение отражает наличие выпучин в оболочке между нитями. Сама оболочка в результате анизотропии сплющивается в полюсах.

Оболочка вращения с частыми, дискретно расположенными нитями деформируется подобно одноосной оболочке. Геометрия такой оболочки, нагруженной равномерным давлением определяется кривой, называемой эластикой Эйлера. Решение для элаستيку получается из нелинейных соотношений. В работе приводится линеаризованное решение, основанное на уравнениях главы I для одноосной оболочки. Для сфероидальной оболочки, состоящей как бы из нитей, нагруженной равномерным давлением геометрия основного состояния принимается в виде сферы. Линеаризованные относительно этого состояния уравнения, позволяют получить простое решение, незначительно отличающееся от нелинейного. Наибольшая полуось сфероида, например, равна $r_0/R = 1,215$, а в

нелинейной задаче $\tau_0/R = 1,204$. Этот пример показывает, что даже в тех случаях, когда участки одноосной области достаточно велики, линеаризованная схема расчёта дает достаточно точное решение при определении деформированного состояния одноосной оболочки.

Некоторые особенности построения численных алгоритмов для исследования деформированного состояния мягких оболочек рассматриваются в главе седьмой на примерах конической и параболаидальной оболочек. Осесимметричная задача для конической оболочки при заданной осевой силе описывается уравнением третьего порядка. Рассмотрен случай, когда оболочка закреплена на одном из торцев, а на другом отсутствует нормальное перемещение. Решение проведено численным методом прогонки. Для оболочки построены графики, определяющие деформированную форму при разных параметрах нагрузки. Подобное численное решение построено для замкнутой в полюсе параболаидальной оболочки. Метод прогонки для линеаризованных уравнений мягкой оболочки при малых деформациях (большие коэффициенты, определяющие быстроту изменяемости функций) имеет неоспоримые преимущества перед другими методами в смысле точности и простоты. Приведенные примеры являются иллюстрацией построения простых численных решений. Используя подобные алгоритмы, можно получить решения для различных мягких оболочек.

Общие уравнения мягкой оболочки получены путем линеаризации полной системы уравнений относительно параметров основного состояния. Для того, чтобы выяснить на сколько весомы нелинейные слагаемые при различных параметрах нагрузки в полных уравнениях, в последней восьмой главе работы, проводится сравнение некоторых линеаризованных решений с полученными отдельно нелинейными.

Рассматривается нелинейное решение для цилиндрической оболочки конечной длины, имеющей жесткие днища и нагруженной равномерным давлением. Система уравнений решается численно с помощью метода начальных параметров. Расчёты были проведены для значений коэффициентов $\mu = 0,5$ и $Eh/\rho R = 4 \div 200$ при начальных углах $\psi_0 = 80^\circ \div 71^\circ$, что соответствует разным длинам оболочки.

Решение, основанное на методе расщепления и полученное из общих уравнений представлено в гиперболических функциях.

М130415

Проведено сравнение двух решений для максимального перемещения оболочки. Для бесконечно длинной оболочки оба решения совпадают точно. При значениях параметра $Eh/\rho a = 4+16,0$ различие между наибольшими нормальными перемещениями оболочки конечной длины не превышает долей процента, уменьшаясь с ростом $Eh/\rho a$. Характер кривых нормального перемещения в нелинейном и линеаризованном решениях тот же.

Сопоставление упрощенных решений, основанных на линеаризованных уравнениях с нелинейными, проводится также для торообразной оболочки, нагруженной равномерным давлением. Выводится полная нелинейная система уравнений для кругового тора. Предлагается алгоритм численного решения. Расчёты проведены для различных геометрических параметров оболочки при разных параметрах нагрузки и числе $\mu = 0,5$. Форма кривых осевого и радиального перемещений для одного и того же геометрического параметра $k = a/\rho$ незначительно отличается друг от друга. Различие в ординатах свидетельствует о том, что при изменении нагрузки меняются размеры сечения, а формы сечения практически подобны одна другой. При больших k форма оболочек мало отличается от круговой. В то же время при малых k наблюдается существенное искажение формы сечения.

Рассмотренное здесь же линеаризованное решение при параметрах $Eh/\rho a = 5,0$; $k = 5,0$ и $\mu = 0,5$ позволяет сравнить его с нелинейным. Дополнительное усилие и деформация в начале интервала интегрирования ($\theta = -\pi/2$) при линеаризованном подходе равны $f_{\theta} = 0,20950$, $\varepsilon_{\theta} = 0,0390$. Если подсчитать те же величины для нелинейного решения, то они оказываются равными $f_{\theta} = 0,2200$ и $\varepsilon_{\theta} = 0,0408$. Как видно разница между усилиями и деформациями на внутреннем контуре оболочки для двух решений весьма незначительна. Мало отличаются усилия и перемещения в обоих случаях на всей поверхности оболочки. Величина угла φ при $\theta = 0$ не превышает одного градуса.

Нелинейная задача для торообразной оболочки рассмотрена также применительно к полному сегменту, закреплённому на торцах и нагруженному давлением. Полученное решение позволяет наиболее отчётливо проследить за особенностями нелинейного и линеаризованного подходов. Задача рассматривалась для полного сегмента $\theta_0 = 0,316$, $k = 1,57$ при $\mu = 0,5$ и параметрах нагрузки $Eh/\rho a = 10,0$; $100,0$; $1000,0$.



Построенные графики осевого перемещения для того и другого случая показывают, что кривые имеют один и тот же вид. При наименьшем из рассмотренных значений $Eh/\rho R = 10,0$ разница между двумя решениями составляет $\sim 12\%$. Это различие существенно уменьшается при больших параметрах $Eh/\rho R$.

Сравнение упрощенных линейризованных и полных нелинейных решений показывает, что как для замкнутой круговой торообразной оболочки, так и для оболочки пологой, величины усилий и перемещений для того и другого случая отличаются весьма мало в большом диапазоне параметров нагрузки.

Сопоставление отдельных теоретических решений, полученных с помощью линейризованных уравнений, с результатами эксперимента проводится в работе для конической, пологой тороидальной и цилиндрической оболочек. Экспериментальные точки, соответствующие деформированной геометрии оболочек из полиэтилен-терефталатной пленки, во всех случаях практически подтверждали теоретические решения.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. С помощью метода расчленения деформированного состояния оболочки на основное и дополнительное в работе строится приближенная теория, названная технической теорией мягких оболочек.

2. Построена общая схема расчёта, предусматривающая использование двух систем уравнений: линейных — для определения усилий основного состояния при заданной заранее геометрии, и линейризованных относительно основного состояния, соответствующих дополнительным усилиям и перемещениям оболочки. Получена полная система уравнений и граничных условий, описывающая дополнительное состояние.

3. Проводится анализ слагаемых уравнений дополнительного состояния. Учёт лишь наиболее существенных членов приводит к упрощенному решению типа "краевого эффекта". Исследована область применимости этого решения в случае осесимметричной и несимметричной деформации.

4. Построена приближенная теория несимметричной деформации мягкой цилиндрической оболочки, которую можно рассматривать как аналог полубезмоментной теории. При оставлении уравнений учитывается искажение контура оболочки в окружном направлении и кинематические гипотезы. Получены решения ряда задач.

5. Сформулирован приближенный подход, получены линейризованные уравнения и решения для оболочки, находящейся в одноосном напряженном состоянии. Рассмотрены особенности сопряжения одноосных и двухосных участков оболочки.

6. Разработаны простые численные алгоритмы для решения уравнений технической теории мягких оболочек вращения.

7. Проведено исследование деформирования торообразной мягкой оболочки. Решения, основанные на предлагаемом методе позволяют избежать особенностей в перемещениях вблизи линий нулевой кривизны.

8. Получены решения ряда задач, имеющих практическое значение и иллюстрирующих возможности метода расчленения. Исследовалось воздействие на мягкую оболочку локальных симметричных и несимметричных нагрузок. Контактные задачи о совместной работе оболочки и подкрепляющих нитей рассматривались применительно к оболочкам различной формы.

9. Для выявления особенностей предлагаемого подхода при расчёте мягких оболочек и установления пределов его применимости в работе получены отдельные нелинейные численные решения. Сопоставление результатов показывает, что для рассмотренных задач метод расчленения дает практически точные решения при большом диапазоне параметров нагрузки.

10. Для конической, цилиндрической и пологой торообразной оболочек приведено сравнение теоретических решений с результатами экспериментального исследования деформирования оболочки. Во всех случаях имело место весьма малое их различие, что еще раз свидетельствует о достаточной надежности рассматриваемого метода.

II. Предлагаемый приближенный метод расчёта мягких оболочек является, по мнению автора, достаточно простым и надежным для практического применения.

Материалы диссертации опубликованы в следующих работах:

1. В.И.Усюкин. Деформации мембранных оболочек вращения, Известия АН СССР, Механика и машиностроение, № 2, 1964.

2. В.И.Усюкин. Деформации мембранных торовых оболочек, Труды УИ Всес.конференции по теории оболочек и пластинок, Наука, 1966.

3. В.И.Усюкин. О точности линеаризованных уравнений пологих мембранных оболочек. Третий Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике, Наука, 1968.

4. В.И.Усюкин. Нелинейная деформация мембранной торовой оболочки, Известия АН СССР. Механика твердого тела, № 1, 1969.

5. В.И.Усюкин. Расчёт мембранных оболочек при малом параметре нагрузки методом прогонки. Труды УП Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок, Наука, 1969.

6. В.И.Усюкин. О влиянии меридионального усилия в краевой зоне оболочки вращения, Известия ВУЗ'ов Машиностроение, № 11, 1964.

7. Г.Я.Умаров, В.И.Усюкин, Ф.Б.Абуталиев. Деформация космического пленочного отражателя, Гелиотехника, № 5, 1965.

8. Г.Я.Умаров, В.И.Усюкин, Ю.А.Солодянников, А.М.Гафуров. Об определении начальной формы и толщины пленочных концентраторов, Доклады Всесоюзной конференции по использованию солнечной энергии, июнь 1969г. Ереван "Высокотемпературная гелиотехника" М., ВНИИТ, 1969.

Разделы работы были доложены на УИ Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок (Баку, сентябрь, 1966), на Третьем Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике (Москва, январь, 1968г.), на Всесоюзном семинаре по мягким оболочкам (Владивосток, ноябрь, 1967), на совещании по мягким оболочкам (Ленинград, июнь, 1968), на УП Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок (Днепропетровск, сентябрь, 1969) и на Всесоюзной конференции по использованию солнечной энергии (Ереван, июнь, 1969г.).