

14195510
Министерство высшего и среднего специального образования СССР

Московское
ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени
высшее техническое училище имени Н. Э. Баумана

НА ДОМ
НЕ ВЫДАЕТСЯ

ЧЕЛЮБЕЕВ Анатолий Алексеевич

НЕКОТОРЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ СТАТИКИ И
ДИНАМИКИ МЯГКИХ ОБОЛОЧЕК

(Специальность 01.02.06 — Динамика, прочность и надежность
машин приборов и аппаратуры)

Диссертация написана на русском языке

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук



Работа выполнена в Московском ордена Ленина и ордена
Трудового Красного Знамени высшем техническом училище
им. Баумана.

Научный руководитель—
доктор технических наук, профессор Феодосьев В. И.

Официальные оппоненты:

1. Доктор технических наук Кузнецов Э. Н.
2. Кандидат технических наук Стрекозов Н. П.

Ведущее предприятие—указано в решении Ученого Со-
вета.

Автореферат разослан « 11 » . мая . . . 1973 г.

Защита диссертации . . . 1973 г.
на заседании Ученого совета МГТУ им. Н. Э. Баумана
по адресу: Москва, ул. Бауманская, д. 5
и Н. Э. Баумана . . . ашин
име-

Ваши отзывы . . . двух
экземплярах . . . ресу.
С диссертацией . . . учи-
лица.

Ученый секретарь . . . С. П.
к. т. н., доцент . . .

М 195510

В последнее время все большее распространение в самых различных областях техники находят конструкции, имеющие все признаки мягких оболочек. Во многих таких конструкциях внешние нагрузки на оболочку передаются контактным образом.

Например, разрабатываемые за рубежом системы предохранения водителя и пассажиров автомобиля от травмы при столкновениях, предусматривают использование мягких пневматиков в качестве демпфирующих элементов.

Использование мягких пневматиков в качестве упругих или силовых элементов конструкций также во многих случаях связано с контактным нагружением мягких пневматиков, как это происходит, например, при работе пневматического амортизатора самолетных и автомобильных подвесок, при работе пневматического домкрата и т.п. конструкций.

Во всех этих случаях весьма существенным является то обстоятельство, что расчёт характеристик мягких пневматиков в значительной степени осложняется наличием зоны контакта мягкой оболоч-ки с твердой преградой.

Мягким оболочкам, т.е. оболочкам не способным воспринимать сжимающие усилия, посвящены труды различных авторов. В работах Фирстенвальдера, С.А.Алексеева, Дж.Адкинса, Ривлина, В.М.Марченко, А.С.Григорьева, В.И.Феодосьева, В.И.Усюкина и других авторов даны основы теории мягких оболочек и решен ряд практически важных задач.

Однако следует отметить, что вопросы контактного взаимодействия мягкой оболочки с твердой преградой в литературе еще недостаточно исследованы.

Из работ, посвященных решению контактных задач статики мягких оболочек, отметим лишь работы Е.Мартина и В.М.Марченко. Так, например в работе В.М.Марченко была рассмотрена задача о сплющивании безмоментной сферической оболочки двумя твердыми плоскостями. При наличии ряда допущений решение для плоской области (зоны контакта оболочки с твердой плоскостью) было получено в гипергеометрических рядах, для зоны свободной поверхности оболочки решение было получено способом последовательных приближений. Стыковка этих решений на границе плоской области позволила получить решение некоторых краевых задач для сплющиваемой сферической оболочки.

Следует сказать, что распространение аналитических решений, подобных решению В.М.Марченко на случай контактного нагружений

произвольных оболочек произвольными контактными поверхностями встречается на пути непреодолимые трудности.

Эти трудности обусловлены:

1. Интегро-дифференциальным характером нелинейных уравнений, описывающих деформированное состояние мягкой оболочки;

2. Наличием в контактной зоне наряду с контактными усилиями еще и сил трения.

3. Существованием в произвольной мягкой оболочке как двухосных, так и одноосных областей (когда одно из главных напряжений, вычисленное по деформациям, оказывается отрицательным).

Таким образом, решение уравнений мягких оболочек в аналитической форме оказывается невозможным в общем случае даже для контактных задач статики. Поэтому в работе основное внимание уделяется рассмотрению численных способов решения контактных задач статики и динамики мягких оболочек, а также выбору наиболее оптимальных из них по требованиям скорости и точности машинного решения.

Основные предпосылки, постановка задачи в работе сформулированы следующим образом:

1. Рассматривается процесс деформации мягкой оболочки под действием перепада давлений, контактных усилий и сил трения, возникающих от твердых поверхностей, а также в случае задач динамики и сил инерции.

2. Решение проводится для осесимметричного случая при условии больших перемещений и деформаций.

3. В процессе решения задачи учитывается возможность появления в мягкой оболочке одноосных зон.

В первой главе содержится вывод основных уравнений мягких оболочек для случая больших перемещений и деформаций.

Деформация оболочки описывается в системе O, X, Y , декартовых координат. Ось OY - ось симметрии. Все основные параметры оболочки для осесимметричного случая являются функциями только параметра θ - длины дуги меридионального сечения оболочки в недеформированном состоянии, которое характеризуется координатами $\bar{X}, \bar{Y}$.

В группу геометрических уравнений входят выражения для удлинений λ_1, λ_2 , главных кривизн k_1, k_2 (соответственно в мери-

диональном и окружном направлениях) через координаты X, Y деформированной меридиональной кривой оболочки, а также известные уравнения Гаусса-Петерсона-Кодацци, связывающие дифференциальными зависимостями величины X, λ_1, k_1, k_2

Условие контакта оболочки с преградой записано в виде неравенства $X^2 + Y^2 \geq R^2$; (преграда сферической формы)

$$Y \geq A; \quad (\text{плоская стенка}) \quad (1)$$

Связь между усилиями и деформациями вводится следующим образом. При больших деформациях выражения для усилий T_1, T_2 соответствуют форме Муни для удельной энергии деформации W материала оболочки; при малых деформациях выражения для T_1 и T_2 отвечают закону Гука.

Для задач статики принимается изотермический закон изменения состояния газа, заключенного в оболочке. Для динамических задач принято, что изменение внутренней энергии газа соответствует адиабатическому процессу.

Уравнения движения записаны для общего случая больших перемещений и деформаций с учётом контактных усилий и сил трения, при этом трение в зоне контакта вводится вполне однозначным образом:

$$\left. \begin{aligned} k_1 T_1 + k_2 T_2 + \rho \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \left(\ddot{X} \frac{\partial Y}{\partial \theta} - \ddot{Y} \frac{\partial X}{\partial \theta} \right) &= P - q; \\ \frac{\partial}{\partial \theta} (T_1 \cdot X) &= T_2 \frac{\partial X}{\partial \theta} + \rho \lambda_3 \cdot X \left(\ddot{X} \frac{\partial X}{\partial \theta} + \ddot{Y} \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + f \cdot q \cdot \lambda_1 \cdot X; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где обозначено: ρ - плотность материала оболочки, q - контактное давление; P - перепад давлений, f - коэффициент трения; λ_3 - удлинение элемента оболочки в направлении нормали к элементу.

Для зоны свободной поверхности очевидно, что $f = q = 0$. Так как в зоне контакта мягкой оболочки с твердой преградой запрещены перемещения по нормали к поверхности контакта, то по первому из уравнений (2) получаем выражение для величины q :

$$q = P - (k_1 T_1 + k_2 T_2); \quad (3)$$

Уравнения движения (или уравнения равновесия в случае задач

статики) совместно с геометрическими и физическими соотношениями образуют систему, которая имеет нелинейный, интегро-дифференциальный характер с ограничениями на перемещения, заданными в виде неравенств. Очевидно, что интегрирование этой системы в аналитической форме невозможно в общем случае даже для контактных задач статики мягких оболочек. Это обстоятельство с неизбежностью приводит к рассмотрению численных способов решения контактных задач статики и динамики мягких оболочек.

Вторая глава посвящена решению контактных задач статики мягких оболочек. Для решения задачи применяются два способа.

Рассмотрим первый способ – способ численного интегрирования. Обычно, при решении задач статики систему уравнений, описывающую деформированное состояние мягкой оболочки, приводят к двум или к одному разрешающему уравнению, которое решают затем тем или иным аналитическим или численным способом.

Для решения контактных задач во многих отношениях удобнее воспользоваться полной, неприведенной системой уравнений мягкой оболочки для способа численного интегрирования. Подобный подход был впервые применен Дж.Адкинсом и Ривлиным при решении задачи о раздувании резиновой мембраны. В работе этот способ распространен на решение контактных задач.

Если в точке А оболочки с координатами $\theta, \bar{X}, \bar{Y}$ в недеформированном состоянии) известны величины $\lambda_1, \lambda_2, k_1, k_2$, то оставшиеся величины и их первые производные могут быть найдены при помощи схемы:

$$\lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}; \quad T_1 = \lambda_3 (\lambda_1^2 - \lambda_3^2) (1 + \lambda_2^2 \Gamma); \quad T_2 = \lambda_3 (\lambda_2^2 - \lambda_3^2) (1 + \lambda_1^2 \Gamma);$$

$$X = \lambda_2 \cdot \bar{X}; \quad \frac{dX}{d\theta} = \lambda_1 (1 - k_1^2 X^2)^{1/2};$$

$$\frac{d\lambda_2}{d\theta} = \frac{1}{\bar{X}} \left(\frac{dX}{d\theta} - \lambda_2 \frac{d\bar{X}}{d\theta} \right);$$

$$\frac{dk_2}{d\theta} = \frac{1}{X} \frac{dX}{d\theta} (k_1 - k_2);$$

$$\frac{dT_1}{d\theta} = -\frac{1}{X} \frac{dX}{d\theta} (T_1 - T_2);$$

$$\frac{d\lambda_1}{d\theta} = \frac{\frac{dT_1}{d\theta} - [3\lambda_3^2 - \lambda_1^2 + (\lambda_1^2 + \lambda_3^2)\lambda_2^2\Gamma] \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \frac{d\lambda_2}{d\theta}}{(3\lambda_3^2 + \lambda_1^2)(1 + \lambda_2^2\Gamma) \frac{\lambda_3}{\lambda_1}}; \quad (4)$$

$$\frac{dT_2}{d\theta} = (\lambda_2^2 + 3\lambda_3^2)(1 + \lambda_1^2\Gamma) \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \frac{d\lambda_2}{d\theta} + [3\lambda_3^2 - \lambda_2^2 + (\lambda_1^2 + \lambda_3^2)\lambda_1^2\Gamma] \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \frac{d\lambda_1}{d\theta};$$

$$\frac{dk_1}{d\theta} = -\frac{1}{T_1} \left(k_1 \frac{dT_1}{d\theta} + k_2 \frac{dT_2}{d\theta} + T_2 \frac{dk_2}{d\theta} \right);$$

Уравнения (4) очевидным образом выводятся из основных уравнений мягкой оболочки. В каждом из этих уравнений левая часть выражается как функция известных величин $\lambda_1, \lambda_2, k_1, k_2$ или величин, вычисленных ранее по предыдущим соотношениям (4).

Выражения для второй и более высоких производных от величин $X, \lambda_1, \lambda_2, k_1, k_2, T_1, T_2$ через ранее определенные величины можно получить последовательным дифференцированием уравнений (4). Заметим, что уравнения (4) сохраняют свою структуру и принимают более простой вид, если выражения для усилий T_1 и T_2 записать, исходя из закона Гука.

Таким образом, можно численно проинтегрировать систему уравнений мягкой оболочки с помощью уравнений (4), используя при этом выражения типа:

$$[\lambda_1]_{\theta+\Delta\theta} = [\lambda_1]_{\theta} + \left[\frac{d\lambda_1}{d\theta} \right]_{\theta} \cdot \Delta\theta + \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2\lambda_1}{d\theta^2} \right]_{\theta} \cdot \Delta\theta^2 + \dots; \quad (5)$$

Если в процессе вычислений скажется необходимым интегрировать одноосную оболочку ($T_2 \leq 0$), то на уравнения (4) налагаются условия:

$$T_2 = 0; \quad \frac{dT_2}{d\theta} = 0; \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}};$$

При интегрировании в зоне контакта поверхность контакта задается известными соотношениями:

$$k_1 = k_{1 \text{ конт}}(X); \quad k_2 = k_{2 \text{ конт}}(X);$$

В точке перехода $\Theta = \Theta^*$ от зоны контакта к зоне свободной поверхности величина k_1 , терпит разрыв:

$$k_1 = \frac{1}{T_1} (P - k_2 T_2);$$

а величины $X, \lambda_1, \lambda_2, k_2, T_1, T_2$ непрерывны.

Задаваясь значениями $\lambda_1, \lambda_2, k_1, k_2$ на одном краю оболочки при $\Theta = \Theta_{\text{нач}}$ и интегрируя по Θ , можно получить значения этих же величин на другом краю оболочки при $\Theta = \Theta_{\text{кон}}$.

Числовой поиск по четырем начальным параметрам $\lambda_1, \lambda_2, k_1, k_2$ перепаду давления P и параметру Θ^* перехода от зоны контакта к зоне свободной поверхности позволяет удовлетворить граничным условиям на обоих краях оболочки и уравнению состояния газа в оболочке. Числовой поиск облегчают следующие обстоятельства:

1) одна из величин $\lambda_1, \lambda_2, k_1, k_2$ характеризует степень нагружения и поэтому задается заранее;

2) величины $\lambda_1, \lambda_2, k_1, k_2$ не независимы, а связаны уравнениями равновесия;

3) условия симметрии в полюсах замкнутой оболочки (а интегрирование как правило ведется от полюса) сокращают число варьируемых параметров.

Рассмотрим реализацию этого способа на примере задачи о продавливании резиновой мембраны твердым шаром. В полюсе мембраны при $\Theta = 0$ величина $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2$ характеризует степень продавливающего усилия L и задается заранее. По параметру Θ^* перехода от зоны контакта к зоне свободной поверхности производится численная пристрелка для удовлетворения граничного условия $\lambda_2 = 1$ на краю мембраны.

Следует отметить, что в случаях сложного контактного нагружения (когда имеется более одной контактной поверхности) техническая реализация этого способа на ЭВМ связана с определенными затруднениями в организации числового поиска по более чем двум варьируемым параметрам.

Указанного недостатка лишен второй способ, реализующий вариационную задачу о минимуме потенциальной энергии системы методом локальных вариаций, поскольку в этом способе нет необходимости

удовлетворять граничным силовым условиям.

Предварительно производится дискретизация оболочки. Мягкая оболочка разбивается на N участков. деформированное состояние i участка описывается конечно-разностными выражениями:

$$\lambda_{2i} = \frac{X_{i+1} + X_i}{\bar{X}_{i+1} + \bar{X}_i}; \quad \lambda_{1i} = \frac{1}{\Delta\theta} \left[(X_{i+1} - X_i)^2 + (Y_{i+1} - Y_i)^2 \right]^{1/2};$$

$$V_i = \frac{1}{3} (X_{i+1}^2 + X_i^2 + X_{i+1} X_i) (Y_{i+1} - Y_i); \quad V = \sum_{i=1}^N V_i; \quad (6)$$

Таким образом, все основные параметры оболочки, в том числе и потенциальную энергию системы Π , можно выразить через совокупность дискретных координат X_i и Y_i точек оболочки. При этом интегралы в выражении для потенциальной энергии системы заменяются, согласно (6), конечными суммами:

$$\Pi = a_p \frac{V}{V_0} + a_n^\nu \ln \frac{V}{V_0} + \Pi_\xi;$$

$$\Pi_\xi = \sum_{i=1}^N W_i \cdot \frac{1}{2} (\bar{X}_{i+1} + \bar{X}_i) \Delta\theta;$$

где обозначено:

$$a_p = \frac{P_{вн} \cdot V_0}{2\pi r_0^2 h_0 C_1}; \quad a_n^\nu = \frac{P_0 \cdot V_0}{2\pi r_0^2 h_0 C_1};$$

$P_{вн}$ - внешнее давление; P_0 - начальное давление газа в оболочке; C_1 - константа Муни; h_0 - начальная толщина оболочки; V_0 - начальный объем оболочки; r_0 - характерный размер недеформированной оболочки.

К совокупности дискретных координат X_i, Y_i точек оболочки применяется процедура локальных вариаций, позволяющая отыскать минимальное положение системы, удовлетворяющее при этом условиям контакта, записанным в дискретной форме:

$$X_i^2 + Y_i^2 \geq R^2;$$

Обоими способами были решены задачи:

1. Раздувание двух плоских круглых мембран, скрепленных по краям. Эта задача интересна тем, что при нагружении указанной мембранной системы внутренним давлением на периферии образуется одноосная область, которая уменьшается с ростом давления. Численное решение позволяет проследить процесс деформации вплоть до

полного исчезновения одноосной зоны. Это состояние мембранной системы обуславливается большими деформациями и не может быть получено точными способами. На участке малых деформаций наблюдается хорошее совпадение с результатом точного решения, полученного при известных допущениях мембранной теории аспирантом С.А.Алексеева Д.И.Фотиничем.

2. Продавливание резиновой мембраны твердым шаром. Представлен процесс деформации мембраны, а также графики распределения усилий и деформаций по длине мембраны.

На примере этой задачи рассмотрено влияние трения в контактной зоне. Показано, что наличие трения существенно влияет на распределение усилий и деформаций в контактной зоне, однако влияние трения на силовую характеристику продавливания незначительно.

3. Решен ряд вариантов контактного нагружения резиновой сферической оболочки твердыми шарами и твердыми плоскостями.

Представлены процессы деформации резиновой сферы, а также зависимости продавливающей силы L и давления газа в оболочке P от величины продавливания U_0 .

При решении контактных задач статики мягких оболочек оба способа – способ численного интегрирования и метод локальных вариаций дают практически совпадающие результаты. Способ численного интегрирования, как использующий основные уравнения мягких оболочек, является более естественным и позволяет простым образом вводить в рассмотрение трения в зоне контакта.

Однако его применение ограничено осесимметричными задачами и связано с определенными затруднениями при сложных случаях контактного нагружения мягкой оболочки.

Метод локальных вариаций является более универсальным, позволяет легко вводить различные случаи контактного нагружения мягких оболочек и может быть с успехом распространен на решение и неосесимметричных задач при соответствующей дискретизации оболочки, хотя не ясно, каким образом при его использовании можно вводить трение в зоне контакта. Последнее обстоятельство можно отнести, пожалуй, к единственному недостатку метода локальных вариаций.

В третьей главе рассматривались вопросы динамического взаимодействия мягкой оболочки с твердой преградой.

Как уже отмечалось выше, решение уравнений мягких оболочек в аналитической форме невозможно в общих случаях нагружения даже

для контактных задач статики. Трудности еще более возрастают в случае динамических задач.

Очевидно, что невозможно решить систему нелинейных, интегро-дифференциальных уравнений в частных производных при наличии ограничений на перемещения в виде неравенств классическими методами математической физики. Таким образом, для решения задачи необходимы способы дискретизации.

В ходе работы над задачей о динамическом взаимодействии мягкой оболочки с твердой преградой были испробованы различные способы дискретизации. Лучшим из них оказался следующий.

Мягкая оболочка, как и в методе локальных вариаций, по конечно-разностным формулам (6) заменяется совокупностью дискретных координат X_i , Y_i точек оболочки. Все основные параметры оболочки, в том числе кинетическую T и потенциальную энергию Π системы, можно выразить через совокупность дискретных координат X_i и Y_i

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N (\dot{X}_{i+1}^2 + \dot{X}_i^2 + \dot{Y}_{i+1}^2 + \dot{Y}_i^2) (\bar{X}_{i+1} + \bar{X}_i) \Delta \theta; \\ \Pi &= \Pi_\varepsilon + a_p \frac{V}{V_0} + a_p^v \left(\frac{V_0}{V} \right)^{n-1}; \\ \Pi_\varepsilon &= \sum_{i=1}^N W_i \cdot \frac{1}{2} (\bar{X}_{i+1} + \bar{X}_i) \Delta \theta; \end{aligned} \quad (7)$$

где обозначено:

$$a_p = \frac{P_{вн} \cdot V_0}{2\pi z_0^3 C_1} \left(\frac{z_0}{R_0} \right); \quad a_p^v = \frac{P_0 \cdot V_0}{2\pi z_0^3 C_1 (n-1)} \left(\frac{z_0}{R_0} \right);$$

n - показатель адиабатического процесса.

При данных выражениях для безразмерных параметров a_p^v и a_p масштаб времени дается формулой:

$$m_+ = \left[\frac{8 z_0^2}{2 C_1} \right]^{1/2};$$

Уравнения движения относительно параметров X_i , Y_i получены из вариационного принципа Гамильтона

$$\delta S = 0; \quad S = \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt;$$

и имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{X}_i} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial X_i} &= 0; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{Y}_i} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial Y_i} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, 3 \dots N; \quad (8)$$

С учётом выражений (7) уравнения (8) принимают следующую форму:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{X}_i \cdot C_i + \frac{\partial \Pi_i}{\partial X_i} + \frac{\partial V}{\partial X_i} \left[\frac{(1-n)V_0^{n-1}}{V^n} \dot{a}_p^v + \frac{a_p}{V_0} \right] &= 0; \\ \ddot{Y}_i \cdot C_i + \frac{\partial \Pi_i}{\partial Y_i} + \frac{\partial V}{\partial Y_i} \left[\frac{(1-n)V_0^{n-1}}{V^n} \dot{a}_p^v + \frac{a_p}{V_0} \right] &= 0; \\ C_i = \frac{1}{2} (2\bar{X}_i + \bar{X}_{i+1} + \bar{X}_{i-1}); \quad i = 1, 2, 3 \dots N; \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Для выполнения условия контакта, записанного в дискретной форме

$$X_i^2 + Y_i^2 \geq R^2 \quad i = 1, 2, 3 \dots N; \quad (10)$$

поступают так:

Если условие контакта (10) не нарушено, то координаты $(X_i; Y_i)$ точки оболочки независимы. Если же условие контакта нарушено, то одна из координат, а именно Y_i , выражается через другую из условия контакта

$$Y_i = [R^2 - X_i^2]^{1/2};$$

Физически это означает, что разрешается движение точек оболочки только по поверхности контакта.

Уравнения (9) интегрируются численно на ЭВМ стандартным методом Рунге-Кутты. Правые части при этом вычисляются при помощи соотношений (6) и (7). Машинное решение позволяет легко вводить в программу блок проверки и выполнения условия контакта мягкой оболочки с твердой преградой. Этим способом была решена задача об ударе мягкой сферы о твердую преграду. Рассмотрены процессы динамического взаимодействия мягкой сферы с плоской стенкой и с преградой сферической формы. Представлены графики изменения ки-

нетиической T и потенциальной Π энергии системы во время удара, а также зависимости времени удара $T_{\text{ч}}$ от начальной скорости удара $\dot{Y}_0$ и параметра α_r начального наддува оболочки.

Дискретизация оболочки набором дискретных координат X_i, Y_i позволяет простым образом вводить различные варианты закрепления груза массы M на оболочке. Для точки закрепления груза с координатами (X_k, Y_k) составляется отдельно уравнение движения

$$X_k = \text{const}; \quad T_{2p} = \alpha_r \cdot \frac{\dot{Y}_k^2}{2};$$

$$\ddot{Y}_k \cdot \alpha_r + \frac{\partial \Pi}{\partial Y_k} = 0; \quad (\text{II})$$

где
$$\alpha_r = \frac{M}{2\pi r_0^2 R_0 g};$$

Параметр α_r , входящий в него, характеризует отношение массы груза M к массе оболочки. Уравнение (II) для точки закрепления груза интегрируется также на машине совместно с уравнениями (9) для остальных точек оболочки. Заметим, что в процессе решения задачи учитывается возможность появления одноосных зон. Если окажется, что $T_{2i} \leq 0$ (меридиональные складки), то полагается:

$$T_{2i} = 0; \quad \lambda_{2i} = \lambda_{3i} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{1i}}};$$

Если же $T_{1i} \leq 0$, то принимаем:

$$T_{1i} = 0; \quad \lambda_{1i} = \lambda_{3i} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{2i}}};$$

В результате расчётов удара оболочки с грузом о твердую преграду по уравнениям (II) и (9) были получены графики перемещения $Y_k(t)$ и $\ddot{Y}_k(t)$ ускорения груза во время удара при различных значениях параметра α_r и начальной скорости удара $\dot{Y}_0$.

Показано влияние параметров α_r и $\dot{Y}_0$ груза при ударе. Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что уже при значениях параметра $\alpha_r > 10$ (т.е. при достаточно большой массе M груза) можно рассматривать удар оболочки с грузом о твердую преграду как удар о нелинейную пружину. Силовую характеристи-

такую этой пружины можно получить изложенными во второй главе численными способами, решив статическую задачу о контактном нагружении мягкого пневматика.

Следует заметить, что уравнения движения (9), полученные из принципа Гамильтона, не позволяют вводить в рассмотрение непотенциальные силы (например силы трения). Но поскольку обобщенными координатами в уравнениях (9) являются сами декартовы координаты оболочки, то можно получить уравнения движения, аналогичные (9), непосредственно из дифференциальных уравнений движения (2), записав последние в конечно разностной форме:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{X}_i \cdot \bar{X}_i &= B_1 \frac{\partial Y_i}{\partial \theta} X_i + B_2 \frac{\partial X_i}{\partial \theta} \frac{1}{\lambda_{1i}}; \\ \ddot{Y}_i \cdot \bar{X}_i &= -B_1 \frac{\partial X_i}{\partial \theta} X_i + B_2 \frac{\partial Y_i}{\partial \theta} \frac{1}{\lambda_{1i}}; \\ B_1 &= [P - q_i - k_{1i} T_{1i} - k_{2i} T_{2i}]; \quad B_2 = \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (T_{1i} X_i) - T_2 \frac{\partial X_i}{\partial \theta} - f q_i \lambda_{1i} X_i \right]; \end{aligned} \right\} (I2)$$

Величины k_{1i} , k_{2i} , T_{1i} , T_{2i} , λ_{1i} , λ_{2i} выражаются в конечно-разностной форме при помощи соотношения (6). Уравнения (I2) позволяют рассматривать непотенциальные силы давления (когда при ударе действует дроссель давления), а также вводить силы трения в контактной зоне. С помощью уравнений (I2) в работе рассчитан случай удара оболочки с грузом о преграду при наличии дросселя давления и показана при этом, что наличие дросселя позволяет значительно снизить ударные перегрузки и уменьшить отскок груза после удара.

В четвертой главе приведены результаты экспериментальных исследований тех задач, которые были решены ранее численными способами.

Экспериментальное исследование контактного нагружения резиновой мембраны и резиновой сферической оболочки показало удовлетворительное совпадение с результатами численных решений этих задач.

Процесс динамического взаимодействия мягкой оболочки с твердой преградой моделировался ударом оболочки (с грузом и без груза) о твердую преграду. Кривые ускорения и давления записывались на осциллограф. Процесс удара фиксировался на киноплёнку. Сравнение экспериментальных данных и теоретических результатов, полученных расчётным путем, дало удовлетворительное совпадение.

В целом по работе можно сделать следующие выводы:

1. Двумя способами – способом численного интегрирования и методом локальных вариаций решен ряд задач контактного нагружения мягких оболочек при условии больших перемещений и деформаций.

2. Решены задачи о контактном нагружении резиновой мембраны и резиновой сферы. На примере задачи о продавливании резиновой мембраны твердым шаром рассмотрено влияние трения в контактной зоне.

3. Показано, что оба способа дают практически одинаковые результаты, хотя для случая сложного контактного нагружения мягкой оболочки более чем одной контактной поверхностью определенными преимуществами обладает метод локальных вариаций, который допускает введение различного рода подкрепляющих элементов и может быть распространен для решения и неосесимметричных задач.

4. Разработанный в работе способ численного решения контактных задач динамики мягких оболочек позволил решить задачи об ударе мягкой оболочки и оболочки с закрепленным на ней грузом о твердую преграду. Этот способ также допускает введение подкрепляющих элементов и может быть применен для решения неосесимметричных задач при соответствующей дискретизации системы.

5. Полученные результаты позволяют сделать вывод о возможности использования указанных способов численного решения контактных задач статики и динамики мягких оболочек для расчёта характеристик мягких пневматиков.

По теме диссертации опубликованы работы:

1. Челюбеев А.А. "Об одной контактной задаче для резиновой мембраны". Изв. вузов "Машиностроение", 1971, № 9.
2. Челюбеев А.А. "К расчёту мягких оболочек на статические и контактные нагрузки". Изв. вузов "Машиностроение", 1978, № 2