

УДК 531/539.3

Моделирование и оптимизация распределения механических свойств с использованием улучшенного метода SIMP

Хамзин Данил Эльмирович^(*)

kde1260@gmail.com

SPIN-код: 9465-3644

Герасимов Олег Владимирович

valeriy.karasikov@gmail.com

SPIN-код: 6942-2009

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия

Аннотация. Рассмотрено моделирование распределения механических свойств материала на основе численно-цифрового подхода. Представлено усовершенствование метода SIMP, включающее аппроксимацию функции плотности с использованием интерполирующих функций, что обеспечивает переход от кусочно-постоянного к непрерывному распределению плотности и сглаженное представление топологии конструкции. Проведено численное исследование балки при трехточечном изгибе для трех расчетных сеток. Показано, что применение интерполирующих функций повышает сходимость и снижает функционал внутренней энергии деформации на 2–4 % по сравнению со стандартным SIMP. Сделаны выводы, что предложенный подход позволяет формировать более жесткие и оптимизированные структуры и может быть применен для проектирования изделий в машиностроении, медицинской инженерии и аддитивных технологиях.

Ключевые слова: топологическая оптимизация, метод конечных элементов, компьютерная томография, механические свойства, цифровой прототип

Modeling and Optimization of Mechanical Property Distribution Using an Improved SIMP Method

Khamzin Danil Elmirovich^(*)

kde1260@gmail.com

SPIN-code: 9465-3644

Gerasimov Oleg Vladimirovich

valeriy.karasikov@gmail.com

SPIN-code: 6942-2009

Kazan (Volga region) Federal University, Kazan, Russia

Abstract. The study considers the modeling of mechanical property distribution based on a numerical-digital approach. An enhanced SIMP method is presented, incorporating interpolation functions to approximate the material density, enabling a transition from piecewise-constant to continuous density distribution and providing a smoothed structural topology. A numerical experiment of a beam under three-point bending is conducted for three computational meshes. It is shown that the use of interpolation functions improves convergence and reduces the strain energy functional by 2–4 % compared with the standard SIMP method. The conclusions indicate that the proposed approach enables the formation of stiffer and more optimized structures and can be effectively applied to product design in mechanical engineering, biomedical engineering, and additive manufacturing.

Keywords: topology optimization, finite element method, computed tomography, mechanical properties, digital prototype

Введение. Развитие современных методов производства материалов позволяет получать конструкции с заданными механическими свойствами. В качестве одного из способов изготовления сложно структурных изделий выступает применение аддитивных технологий [1]. К преимуществам такого подхода относится возможность моделирования оптимального пространственного распределения материала с учетом воздействия нагрузок, близких к эксплуатационным [2]. В этом случае предполагается применение методов численного моделирования, основанных на построении цифровых прототипов объектов. На практике построение цифровых прототипов для готовых изделий предполагает использование методов неразрушающего контроля и позволяет оценивать прочностные показатели конструкции с учетом неоднородного распределения механических параметров среды.

Одним из ключевых направлений в современном инженерном проектировании выступают топологическая оптимизация [3] изделий, позволяющая сохранить или значительно улучшить их прочностные свойства при минимизации массы. Данный эффект достигается за счет изменения внутренней структуры и геометрических показателей образцов согласно варьируемым параметрам численной модели, что позволяет исследовать принципиально новые конфигурации материала, получение которых на основе классических подходов к инженерному проектированию оказывается трудоемких и дорогостоящим. В качестве одного из методов топологической оптимизации выступает Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP) [4], основная идея которого заключается во введении функции плотности материала, определяющей распределение материала, и коэффициента пенализации промежуточных значений, обеспечивающего бинарные свойства результирующей среды.

В данной работе предлагается новое улучшение метода SIMP на основе введения для каждой ячейки объема интерполирующих функций распределения плотности среды, порядок которых соответствует аппроксимирующим функциям конечного элемента. Такой подход позволяет перейти от кусочно-постоянного распределения свойств материала к непрерывно-линейчатому представлению, что обеспечивает сглаживание результирующей геометрии изделий с учетом их структурной оптимизации. В этом случае используется модифицированный метод конечных элементов, учитывающий моделируемую локальную неоднородность материала на уровне отдельного конечного элемента [5].

Материалы и методы. В классическом подходе метода SIMP рассматривается топологическая оптимизация изделий, предполагающая изменение структуры материала. В этом случае каждый микроэлемент сплошной среды соответствует изотропной модели, а оптимальная неоднородность механических свойств возникает в силу неравномерного распределения фаз среды. В основе методов топологической оптимизации лежит минимизация функци-

онала, определяющая оптимальное распределение механических показателей в среде. Определим задачу топологической оптимизации как минимизацию функционала из условия минимума внутренней энергии:

$$J = \int \varepsilon(x) : \sigma(x) d\Omega \rightarrow \min. \quad (1)$$

Используя принцип гомогенизации (1), физические соотношения можно переписать в виде

$$\varepsilon(x) = \left(\theta(x) \tilde{\tilde{C}}_0 \right)^{-1} :: \sigma(x).$$

Тогда на основании (1) можно сформулировать задачу минимизации функционала:

$$J = \min_{\theta} \int \sigma(x) : \left(\theta(x) \tilde{\tilde{C}}_0 \right)^{-1} : \sigma(x) d\Omega.$$

С точки зрения практического применения возникают естественным образом ограничения на среднюю плотность изделия:

$$\frac{1}{V} \int \theta(x) d\Omega = \langle \theta \rangle, \quad (3)$$

где θ — требуемое значение средней плотности, V — объем изделия.

Тогда итоговый функционал с ограничениями (3) выглядит следующим образом:

$$J = \min_{\theta, \sigma} \int \sigma(x) : \left(\theta(x) \tilde{\tilde{C}}_0 \right)^{-1} : \sigma(x) d\Omega + \lambda \left(\frac{1}{V} \int \theta(x) d\Omega - \langle \theta \rangle \right),$$

где $0 < \theta_{min} < \theta(x) \leq 1, \forall x \in \Omega$.

Метод SIMP является одним из наиболее широко применяемых подходов в топологической оптимизации. В этом случае предполагается, что

$$E(x) = \theta(x)^p \cdot E_0.$$

Ключевой особенностью метода SIMP является введение штрафного параметра p , который позволяет пенализировать промежуточные значения плотности и приближать решение к бинарному распределению «материал — пустота».

С помощью метода множителей Лагранжа найдем условие оптимальности для $\theta(x)$:

$$\theta_{n+1} = \min \left\{ 1, \max \left\{ \theta_{min}, \left(\frac{V p_n \theta_n(x)^p e(U_n)}{\lambda} \right)^{\frac{1}{p_{n+1}}} \right\} \right\},$$

где индекс n означает текущую итерацию.

Для модифицированного метода SIMP предположим, что коэффициент пенализации равняется 1, а также введем аппроксимацию распределения плотностей между узлами с помощью функций формы:

$$\theta_{n_i}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} \left(1 + \xi \cdot \theta_{n_i}^{\xi} \right) \left(1 + \eta \cdot \theta_{n_i}^{\eta} \right) \left(1 + \zeta \cdot \theta_{n_i}^{\zeta} \right).$$

Получив новое распределение плотности с помощью аппроксимирующих функций необходимо использовать модифицированный МКЭ [5] для локального учета линейчатого распределения материала в каждом конечном элементе. За основу был взят метод прямого учета структурной анизотропии материала при построении численной модели на основе цифрового прототипа объекта. В этом случае создается растровое трехмерное изображение объекта, которое называется цифровым прототипом. Каждая точка этого изображения обладает физическим смыслом, — локальной плотностью, и используется при интегрировании локальной матрицы жесткости. В случае описанной выше топологической оптимизации цифровой прототип содержит в себе изменяемое на каждой итерации распределение плотности изделия. В последующем будем называть данные цифрового прототипа воксельной моделью.

Результаты. В работе была рассмотрена задача трехточечного изгиба балки. Задача формулировалась в трехмерной постановке. Была рассмотрена балка с линейными размерами: 20×20×80 мм. Для нее была построена воксельная модель с размерами 100×100×400 вокселей. Размер вокселя в этом случае составил 0,2×0,2×0,2 мм. Схема нагружения балки приведена на рис. 1.

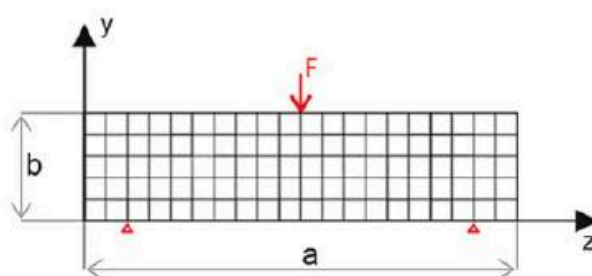


Рис. 1. Схематичное изображение балки с граничными условиями

Расчетная область Ω определялась следующим образом:

$$\Omega: x, y \in [0, 5k], z \in [0, 20k].$$

Тогда кинематические граничные условия можно выразить как

$$\{u(\{a\})\} = 0, \forall \{a\}: x \in \partial\Omega, z = [2k] \cup [18k], y = 0.$$

Статические граничные условия использовались в следующем виде:

$$\int_{\Gamma_N} [\sigma(\{a\})] \{n\} dS = \left(0, \frac{F}{20k}, 0 \right), \forall \{a\}: x \in \partial\Omega, y = 5k, z = 10k,$$

где Γ_N — область приложения нагрузки, F — нагрузка, прикладываемая к изделию, k — коэффициент, зависящий от выбора сетки.

Численные эксперименты показали, что использование интерполирующих функций приводит к снижению функционала внутренней энергии на 2–

4 % по сравнению со стандартным подходом (рис. 2). Наблюдалась более устойчивая сходимость решения и уменьшение числа итераций, необходимых для выхода на плато целевой функции. Визуализация цифровых прототипов продемонстрировала сглаженность контуров распределения плотности и отсутствие артефактов дискретизации. Увеличение степени дискретизации расчетной сетки позволило выявить закономерность усложнения топологии конструкции и рост ее жесткости при сохранении массы.

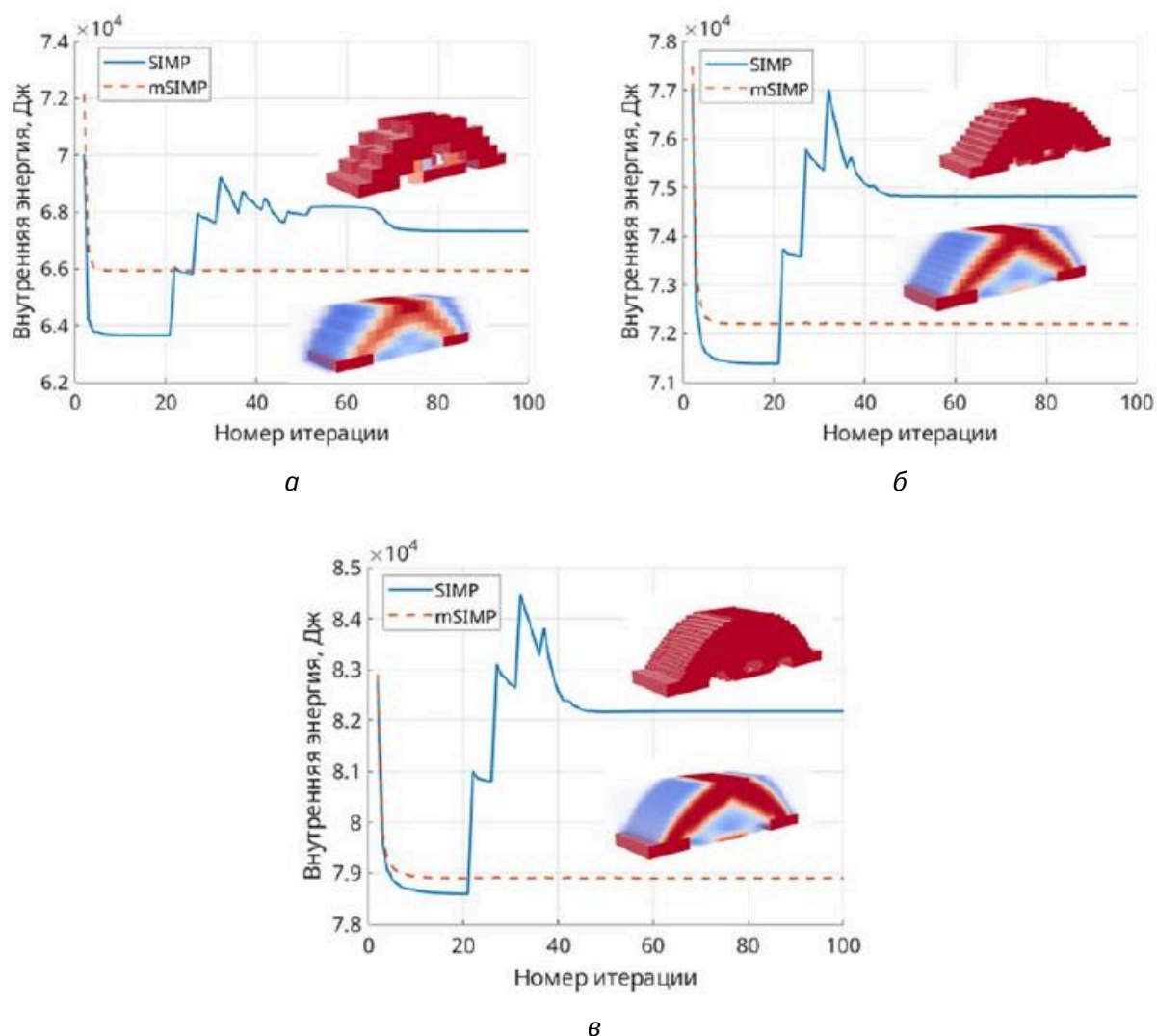


Рис. 2. Результаты для сеток:
а — $5 \times 5 \times 20$; б — $10 \times 10 \times 40$; в — $20 \times 20 \times 80$

Обсуждение. В отличие от классической реализации SIMP, где плотность изменяется скачкообразно между элементами, усовершенствованный подход обеспечивает физически обоснованный переход между областями «материал — пустота». Это приводит к уменьшению концентраций напряжений и более равномерному распределению деформаций в оптимизированной структуре.

Закключение. Проведенное исследование подтвердило повышение эффективности топологической оптимизации за счет усовершенствования метода SIMP. Разработанный подход обеспечивает переход к непрерывному распределению плотности материала, что способствует более реалистичному моделированию механических свойств.

Выявлено, что использование интерполирующих функций снижает функционал внутренней энергии деформации на 2–4 %, улучшает устойчивость итерационного процесса и сокращает вычислительные затраты.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-21-00434.

Список источников

- [1] Tsirogiannis E., Vosniakos G. Redesign and topology optimization of an industrial robot link for additive manufacturing. *Mechanical Engineering*, 2019, vol. 17, no. 3, pp. 415–424.
- [2] Bolshakov P., Kharin N., Agathonov A., Kalinin E., Sachenkov O. Extension of the Voronoi Diagram Algorithm to Orthotropic Space for Material Structural Design. *Biomimetics*, 2024, vol. 9, no. 185.
- [3] Huang X., Xie Y.M. *Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures: Methods and Applications*. Wiley, 2010, 272 p.
- [4] Bendsøe M.P., Sigmund O. *Topology Optimization. Theory, Methods, and Applications*. Berlin, Springer, 2004, 370 p.
- [5] Харин Н.В., Герасимов О.В., Большаков П.В. и др. Методика определения ортотропных свойств костного органа по данным компьютерной томографии. *Российский журнал биомеханики*, 2019, т. 23, № 3, с. 460–468.