

УДК 519.6

Маршевый метод поиска пересечения двух параметрических поверхностей

Колотилин Всеволод Сергеевич

Волосатова Тамара Михайловна (научный руководитель)

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Представлена формальная постановка задачи поиска пересечения двух параметрических поверхностей, проведен краткий обзор способов решения данной задачи, рассмотрен и реализован поиск кандидатов решения через квадродерево и маршевый метод поиска линии пересечения.

Ключевые слова: NURBS поверхности, маршевый метод, квадродерево, QuadTree

Введение. Важной частью многих систем автоматизированного проектирования является модуль, отвечающий за параметрическое представление геометрии [1, 2]. Данный модуль позволяет проектировать сложные геометрические модели [3]. Одной из важных задач при создании данного модуля является поиск пересечения двух параметрических поверхностей.

Постановка задачи. Пусть существуют две поверхности $S_0(u, v)$ и $S_1(s, t)$, имеющие структуру $S(u, v): R^2 \rightarrow R^3$ [4]. Необходимо найти пересечение этих поверхностей

$$\alpha(x) = S_0(u, v) - S_1(s, t) = 0, \quad (1)$$

где $\alpha(x)$ — уравнение кривой пересечения, зависящее от какого-то параметра.

Найти приближенное решение уравнения (1) численными методами не является возможным, так как Якобиан имеет размерность 3×4 и система уравнений является недоопределенной. Решение можно найти, если ввести дополнительные ограничения $u = u_0, v = v_0, s = s_0$ или $t = t_0$. Способ с ограничениями может быть использован для нахождения пересечений поверхностей на границах [5].

Обзор решений. Был проведен аналитический обзор возможных способов нахождения решения (1) и выделены следующие способы.

1. Тесселяция поверхностей S_0 и S_1 и нахождение пересечения триангуляций с помощью булевых операций. Одним из промежуточных этапов выполнения булевых операций является поиск линий пересечений.

2. Находим *октдерево* (англ. OctTree) для поверхностей S_0 и S_1 глубиной удовлетворяющей заданной точности ε [6]

$$lvl = \log_2 \frac{L}{\varepsilon},$$

где L — это линейный размер ребра параллелепипеда, который является узлом октдерева.

3. Нахождение квадродерева (англ. QuadTree), поиск пересечения и использования маршевого метода. Данный способ был рассмотрен и реализован в данной работе [7].

Структура маршевого метода. Чтобы сузить область поиска решения необходимо провести этап препроцессинга с помощью разбиения параметрического пространства поверхностей на квадродерево, узлами которого являются подповерхности. Выделим следующие этапы.

1. Поиск кандидатов решения. Данный этап состоит из генерации квадродерева с проверкой описанных ниже условий остановки; создания ограничивающего объема для каждой подповерхности; поиска пересечения двух деревьев соответствующих поверхностей.

2. Выполнение маршевого метода. После нахождения подповерхностей-кандидатов необходимо для них найти стартовую точку; выбрать оптимальный шаг марша, учитывая кривизну поверхности; выполнение маршевого метода в заданном направлении; проверка условий остановки марша.

Поиск кандидатов пересечения. Для уменьшения области поиска разобьем исходную поверхность $S(u, v)$ на подповерхности. Поверхность задана параметрически, ее область допустимых значений (ОДЗ) имеет форму прямоугольника. Данное пространство можно разбить на 4 подпространства, проводя две линии по центру ОДЗ (рис 1, 2).

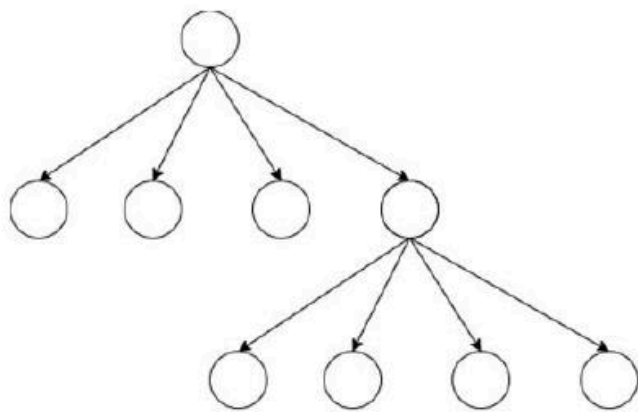


Рис. 1. Структура квадродерева

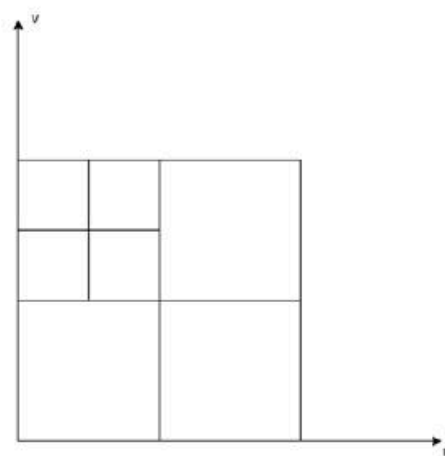


Рис. 2. Разбиение ОДЗ

Для определения условий остановки понадобятся следующие характеристики подповерхности:

$$L = 1 - T_i^k \cdot T_j^k; \quad (2)$$

$$F = 1 - N_i \cdot N_j. \quad (3)$$

В уравнениях (2), (3) определены линейность и кривизна (англ. Flatness) подповерхности; T_i^k — это касательные изопараметрические вектора касательных, вычисленных в угловых точках поверхности; N_i — нормальные вектора в угловых точках поверхности. Нормальные вектора N_i представлены на рис. 3, а касательные T_i^k на рис. 4.

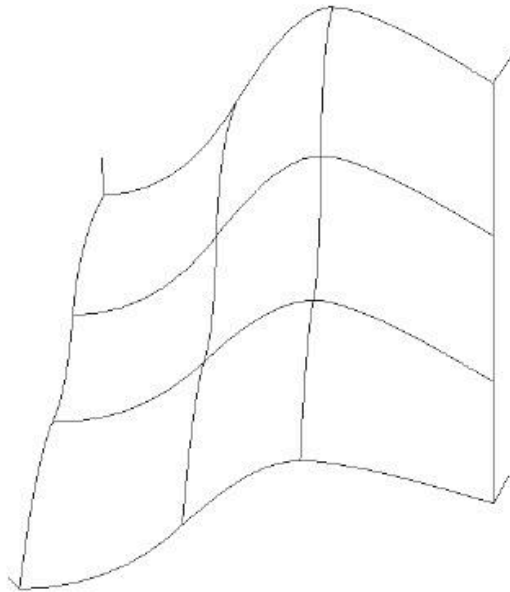


Рис. 3. Нормальные вектора в угловых узлах подповерхности

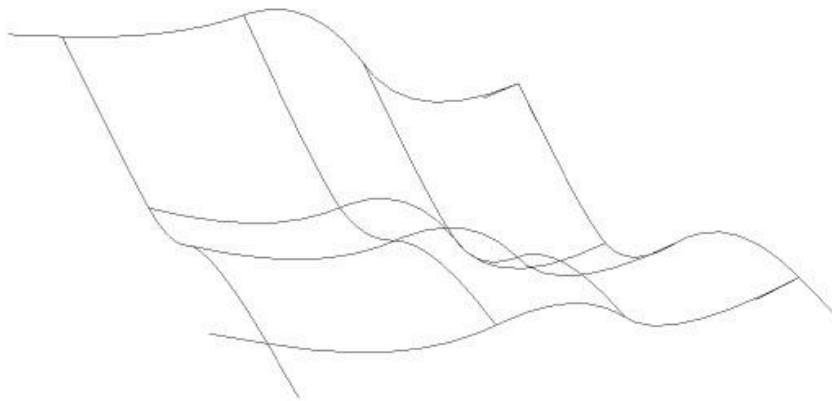


Рис. 4. Касательные вектора в угловых узлах подповерхности

Квадродерево разбивается до момента достижения одного следующих условий: 1) линейность (2) и кривизна (3) поверхности меньше заданной величины; 2) глубина дерева стала меньше максимально допустимой.

Следующим этапом является поиск ограничивающего объема, который вмещает данную подповерхность. Чем меньше ограничивающий объем, тем быстрее найдется стартовая точка маршевого метода и искомая линия пере-

сечения. В данном методе ограничивающий объем задается локальной системой координат.

В каждом узле квадродерева известны угловые точки поверхности p_0, p_1, p_2, p_3 . Для создания новой системы координат нужно указать точку начала C , и вектора базиса e_0, e_1, e_2 . Инициализируем векторы

$$e_0 = p_1 - p_0;$$

$$e_1 = p_2 - p_0;$$

$$e_2 = n_0.$$

После чего производим уточнение векторов, учитывающее кривизну:

$$H = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}},$$

где $L = \max(|p_2 - p_0|, |p_3 - p_1|)$ — максимальная из диагоналей;
 $\alpha = \max(L_i^k, F_j)$ — максимальная из линейностей и кривизн.

Увеличиваем вектор e_2 на $2H$. Вектор e_0 должен быть увеличен до пересечения с поверхностью образованной точкой p_3 и векторами e_1, e_2 . Аналогично нужно увеличить вектор e_1 . Таким образом, выбирается оптимальное ограничивающее пространство. Одним из свойств выбранной системы координат является то, что при переходе к ней соответствующее подпространство будет иметь координаты $[0; 1]$. Результат выбора ограничивающих объемов представлен на рис. 5.

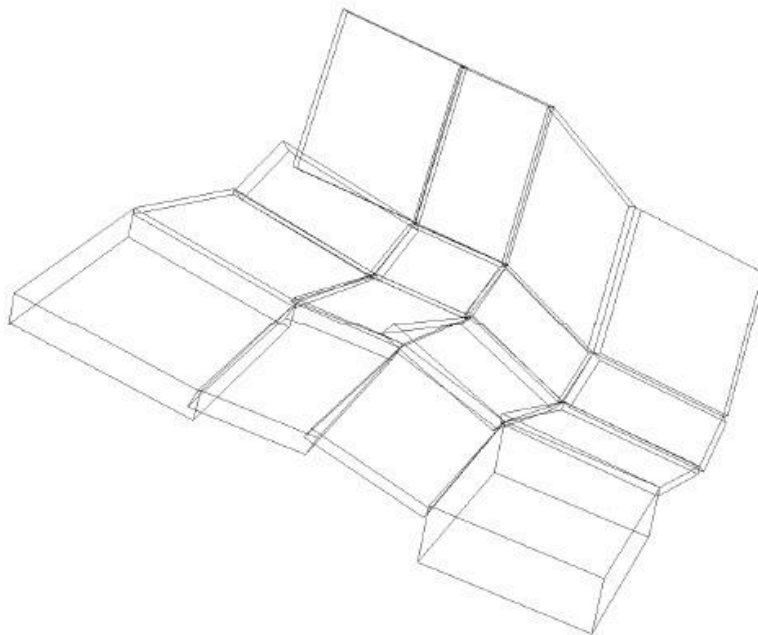


Рис. 5. Разбиение подповерхности на ограничивающие объемы квадродеревом глубиной 4

После нахождения двух квадродеревьев соответствующих поверхностям S_0 и S_1 нужно найти их пересечение (рис. 6, 7).

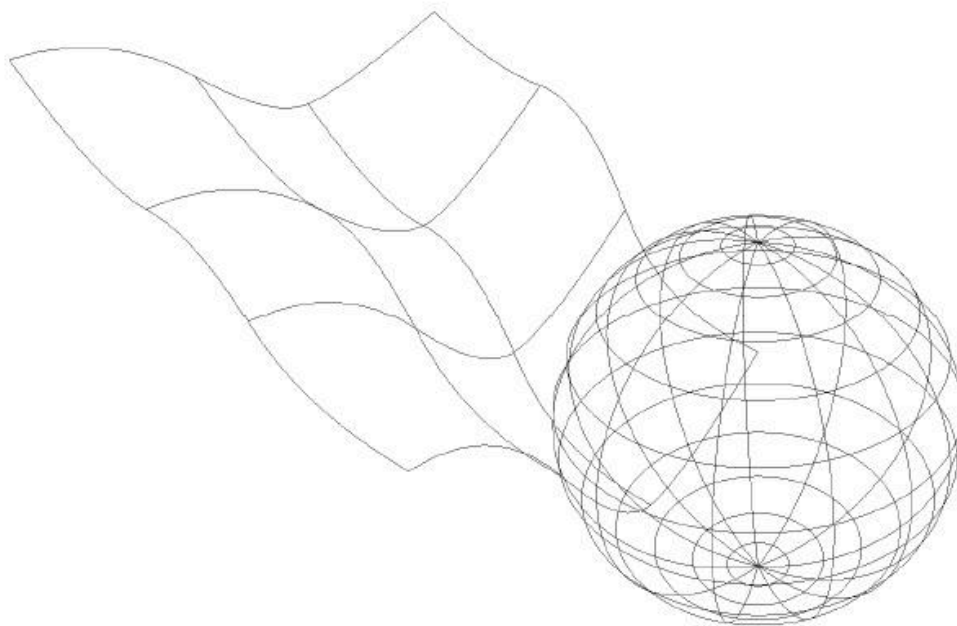


Рис. 6. Пересекающиеся поверхности

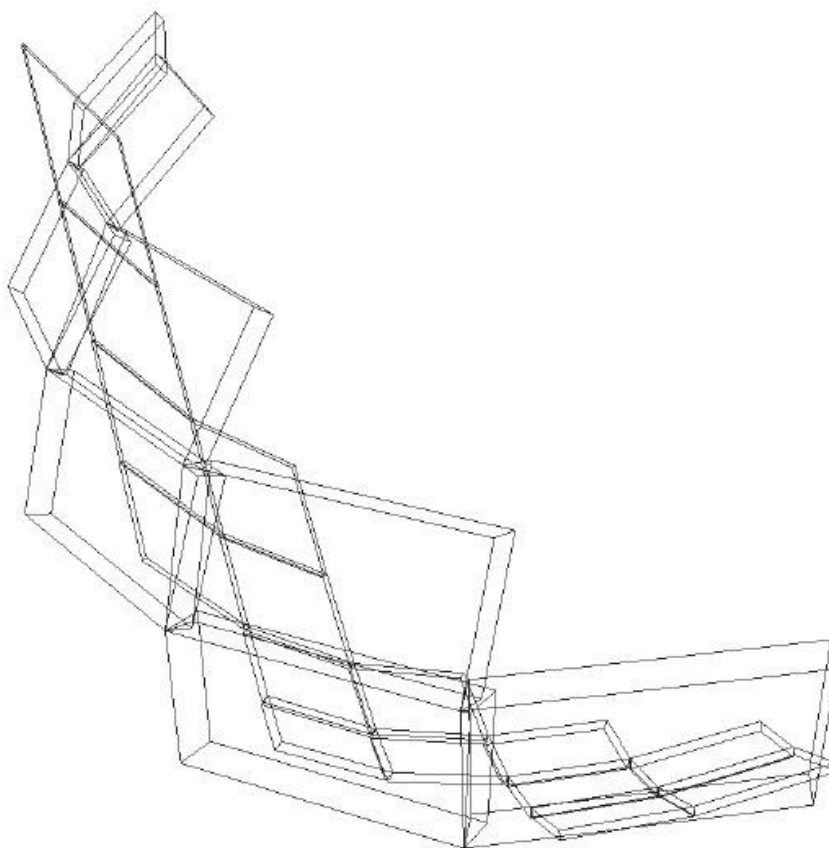


Рис. 7. Найденные кандидаты решения

Нахождение ближайшей точки на поверхности. Для дальнейшего поиска пересечения поверхностей нужно решить следующую подзадачу: пусть Q — это точка в пространстве, которая может не принадлежать поверхности $S(u, v)$. Необходимо найти параметрические координаты (u, v) , удовлетворяющие условию

$$\min_{(u,v)} (|Q - S(u, v)|_2). \quad (4)$$

Решение задачи (4) обычно выполняется с помощью градиентного спуска.

6. Маршевый метод. В каждой кандидат-коробке нужно инициализировать точку Q и найти ближайшие к ней точки $P_0 \in S_0(u, v)$, $P_1 \in S_1(s, t)$. В каждой точке P_0, P_1 находим нормали N_0, N_1 (рис. 8). С помощью точки и нормали можно однозначно задать две плоскости и найти их линию пересечения. После чего проводим плоскость через точку Q и два вектора нормалей N_0, N_1 . Пересечение трех плоскостей задает точку Q_{next} . Если Q_{next} удовлетворяет следующему свойству: $|S_0(u_Q, v_Q) - S_1(s_Q, t_Q)|_2 < \varepsilon$, то точка принадлежит линии пересечения, иначе $Q := Q_{next}$ и выполняем поиск еще раз. Если точка Q принадлежит линии пересечения, то будем называть ее стартовой точкой.

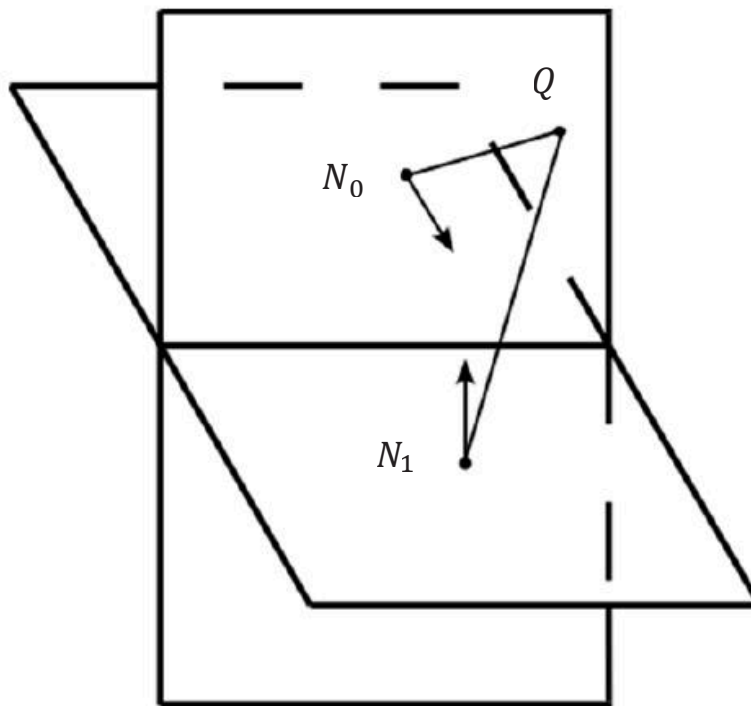


Рис. 1. Поиск стартовой точки решения

В стартовой точке Q находим нормали N_0, N_1 . Они задают прямое и обратное направление поиска. Схема маршевого метода имеет вид

$$Q_{i+1} = Q_i \pm (N_0 \times N_1) L_{step},$$

где $L \in R$ — это длина шага метода.

Для выбора оптимального шага нужно учитывать кривизну поверхности, по которой происходит марш:

$$L_{step} = \rho(u, v)\Delta\theta,$$

где $\rho(u, v)$ — функция радиуса кривизны поверхности; $\Delta\theta$ — малый угол.

Результат работы маршевого метода для двух поверхностей (рис. 6) представлен на рис. 9.

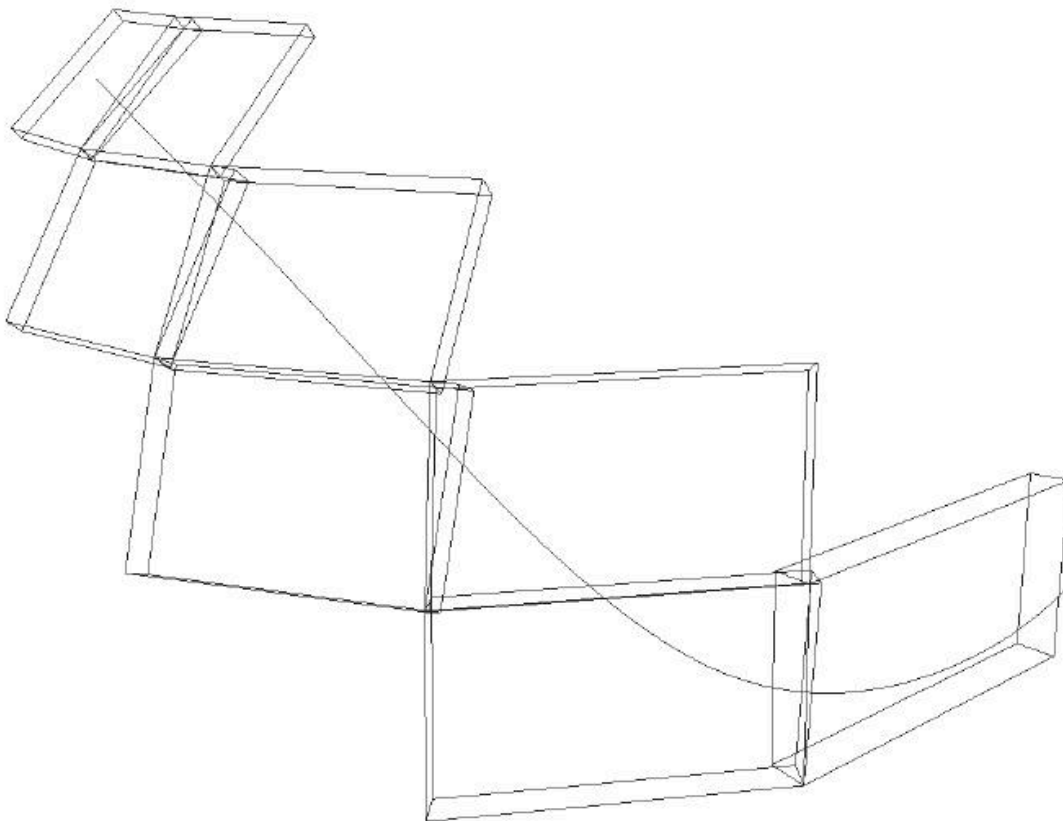


Рис. 9. Найденная линия пересечения для задачи, показанной на рис. 1

Заключение. В данной работе был рассмотрен и реализован маршевый метод поиска пересечения двух параметрических поверхностей с предварительным созданием квадродерева. Ограничением данного метода является невозможность получения решения в виде подповерхности.

Литература

- [1] Тарабарин В.Б., Козов А.В. Исследование структуры, кинематики и 3D-моделирование механизмов Фергюсона. *Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана*, 2015, № 6, с. 517–532.
- [2] Карпенко А.П., Волосатова Т.М., Маничев В.Б. *Основы автоматизированного проектирования*. Москва, ИНФРА-М, 2015, 329 с.

- [3] Хакимова Д.Ф. Разработка инструмента визуализации геометрических моделей с использованием библиотеки Vulkan. *Комплексная автоматизация проектирования и производства (КАПП(М)-2024): материалы*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2025, с. 49–53.
- [4] Piegl L., Tiller W. The NURBS Book. Boca Raton, CRC Press, 1996, 646 p.
- [5] Patrikalakis N. Surface-to-Surface Intersections. *Computer Graphics and Applications*. IEEE, 1993, vol. 13, pp. 89–95. <https://doi.org/10.1109/38.180122>
- [6] Mei G. Simple and robust boolean operations for triangulated surfaces. *Computer-Aided Design and Applications*, 2013, vol. 10, no. 5, pp. 837–851. <https://doi.org/10.3722/cadaps.2013.837-851>
- [7] Barnhill R.E., Kersey S.N. A marching method for parametric surface/surface intersection. *Computer Aided Geometric Design*, 1990, vol. 7, no. 1–4, pp. 257–280. [https://doi.org/10.1016/0167-8396\(90\)90023-F](https://doi.org/10.1016/0167-8396(90)90023-F)

Marching method for finding the intersection of two parametric surfaces

Kolotilin Vsevolod Sergeevich

Volosatova Tamara Mikhailovich (*scientific advisor*)

BMSTU, Moscow, Russia

This paper presents the formal definition of the problem of finding the intersection of two parametric surfaces, a brief review of ways to solve this problem, and considered and implemented the search for candidate solutions through quadrature and March method of finding the intersection line.

Keywords: NURBS surfaces, marching method, quadtree