

УДК 004.942

Тестирование качества российских программ моделирования на «трудных» математических тестах и сравнение с ПА9

Менешов Махмуд Баходир угли

Лялькин Глеб Олегович

Маничев Владимир Борисович (научный руководитель)

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Проведено исследование качества российских программ моделирования SimInTech и Engsee на основе пяти сложных тестовых задач, включающих системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) различной степени жесткости. Основная цель работы — оценить точность, устойчивость и эффективность этих программ в сравнении с программой ПА9, разработанной на кафедре РК6 МГТУ им. Н.Э. Баумана. Тестовые задачи были специально подобраны для проверки способности программ корректно решать сложные математические модели, включая системы с быстро осциллирующими решениями, нелинейными и жесткими уравнениями, а также дифференциально-алгебраическими системами. Реализация тестов проводилась с использованием схемной методологии, что обеспечило наглядность и удобство интеграции разнородных физических моделей. Заключение подчеркивает важность выбора специализированного программного обеспечения в зависимости от решаемых задач. Дальнейшие исследования могут быть направлены на адаптацию этих платформ для работы с более сложными классами уравнений и их интеграцию в цифровые производственные цепочки.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, численное моделирование, сравнение решателей, тестовые задачи, вычислительная точность, инженерное программное обеспечение

Введение. Математическое моделирование — ключевой этап проектирования как в наукоемких отраслях, так и в массовом производстве. Современные отечественные программы 1D-моделирования, такие как SimInTech [1] и Engsee [2], позволяют эффективно моделировать сложные динамические процессы. Важно, чтобы оценка достоверности решений выполнялась самой системой моделирования, а не инженерами, которые не всегда являются экспертами в численных методах. Поэтому при работе с дифференциальными уравнениями критически важны эффективность численных методов и их программная реализация. В статье проводится сравнение результатов решения «трудных» математических тестов с известным аналитическим решением в этих программах с программой ПА9, разработанной на нашей кафедре, что подтвердило достоверность, точность и надежность этих программ.

Постановка задачи. Эффективность численных методов определяется достоверностью и точностью получаемых решений и затратами машинного времени. Рост производительности вычислительной техники выдвигает на первый план именно достоверность и точность получаемых решений.

Не имеет смысла рассматривать затраты машинного времени численного метода без учета достоверности выдаваемого им приближенного решения. В средах моделирования, использующих языки SimInTech и Engsee должна быть обеспечена полная гарантия достоверности и точности результатов, выдаваемых инженерам-проектировщикам. Конечно, в большинстве случаев, при моделировании реальных технических систем не требуется высокая математическая точность расчетов, но достоверность результатов должна быть соблюдена. Качественно неверное решение, выданное системой без предупреждения пользователей, может привести к неверным расчетам, например, устойчивости работы автопилотов летательных аппаратов и, как следствие, крупным авариям самолетов и даже катастрофам.

Известно, что решение жестких и сверхжестких, а также высокодобротных систем ОДУ традиционно вызывает затруднения у большинства численных методов. При использовании явных методов, например явного метода Рунге — Кутты, для получения корректного решения необходимо использование очень малого шага, что на порядки увеличивает время вычисления, которое для сверхжестких систем будет неприемлемым. Адаптивные методы, оценивающие жесткость системы ОДУ и регулирующие значения шага в процессе решения, также требуют проверки на таких тестовых задачах. Для решения такого рода систем традиционно используются неявные методы, в большинстве случаев метод дифференцирования назад BDF (Backward Differentiation Formula) и соответствующая программа `ddasl` [3].

Набор тестовых задач. В данной работе применяется специально разработанный набор «трудных» тестовых задач, который включает в себя 4 систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Эти «трудные» тестовые системы ОДУ были выбраны потому, что для них существует известное асимптотическое или точное аналитическое решение и потому, что «легкие» системы ОДУ обычно правильно решаются любыми методами решения систем ОДУ без проблем. Проведенное тестирование в основном сводилось к оценке качественно верного вида полученного численного решения и его соответствия теоретическим ожиданиям.

При этом численная реализация систем ОДУ в программной среде выполняется вводом соответствующих блок-схем, поскольку в основе 1D-моделирования мультифизических процессов лежит схемная методология, а не просто работа с уравнениями в аналитическом виде. Такой подход обеспечивает наглядность, гибкость и удобство интеграции моделей разнородных физических систем.

ТЕСТ 1. Первый тест — это классическая задача Ван дер Поля — система второго порядка с локально неустойчивым решением и с переменным параметром «трудности» MU . Система уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + MU \cdot (1 - x_1^2) \cdot x_2; \end{cases} \quad x_1(0) = 2, x_2(0) = 0; t \in (0, 4.2 \cdot MU).$$

Решатель этой системы ОДУ должен выдавать правильное асимптотическое решение с периодом $2MU$ как минимум до $MU = 106$.

Схема, реализованная в SimInTech, приведена на рис. 1.

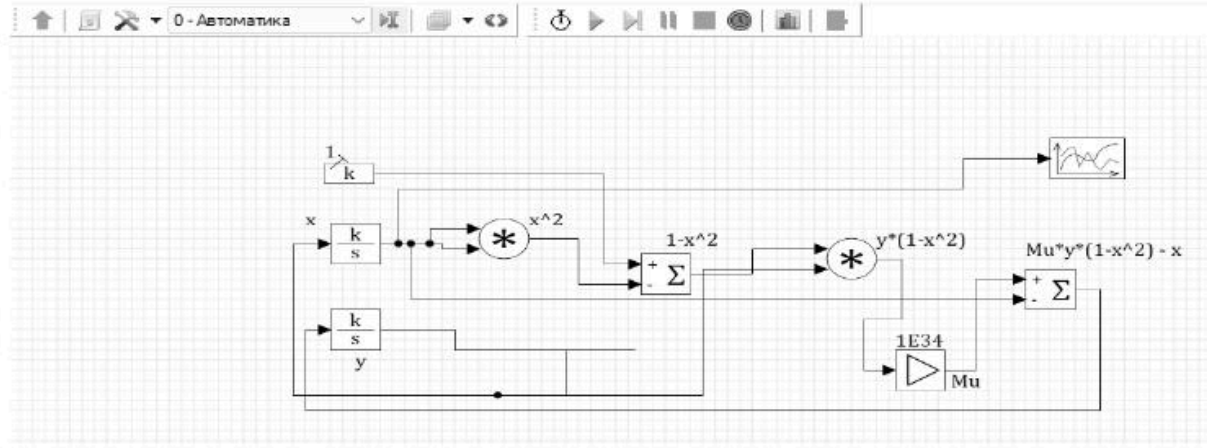


Рис. 1. Схема ТЕСТ 1 в SimInTech

ТЕСТ 2. Во втором тесте была выбрана линейная электрическая схема, которая моделируется нежесткой системой ОДУ пятого порядка. Коэффициенты системы — это параметры «трудности» теста. Система уравнений

$$kr = \frac{Ku}{Ki}, kc = Kt \cdot \frac{Ki}{Ku}, kl = Kt \cdot \frac{Ku}{Ki};$$

$$x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, x_3(0) = 0, x_4(0) = 0, x_5(0) = 0;$$

$$t \in [0, 12560Kt];$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{x_4}{0.001} \cdot kc; \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{x_5}{0.001} \cdot kc; \\ \frac{dx_3}{dt} = \frac{x_4 - x_5}{kc}; \\ \frac{dx_4}{dt} = \frac{(ku - x_1 - x_3 - kr \cdot x_4)}{1001 \cdot kl}; \\ \frac{dx_5}{dt} = \frac{-x_2 + x_3 - kr \cdot x_5}{999 \cdot kl}. \end{cases}$$

Схема, реализованная в программе Engsee, показана на рис. 2.

ТЕСТ 3. Третий тест представляет собой нелинейную систему ОДУ сложной структуры с многопериодным решением, которое имеет локально неустойчивое решение. Это «трудный» и требовательный тест для проверки неявных методов интегрирования систем ОДУ [4], так как требует высокой вычислительной точности.

Система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = 10^6 \cdot (1 - x_1^2) \cdot (x_1 + x_2); \\ x_1(0) = 2, x_2(0) = 0, t \in (0, 3). \end{cases}$$

Схема, реализованная в программе SimInTech, представлена на рис. 3.

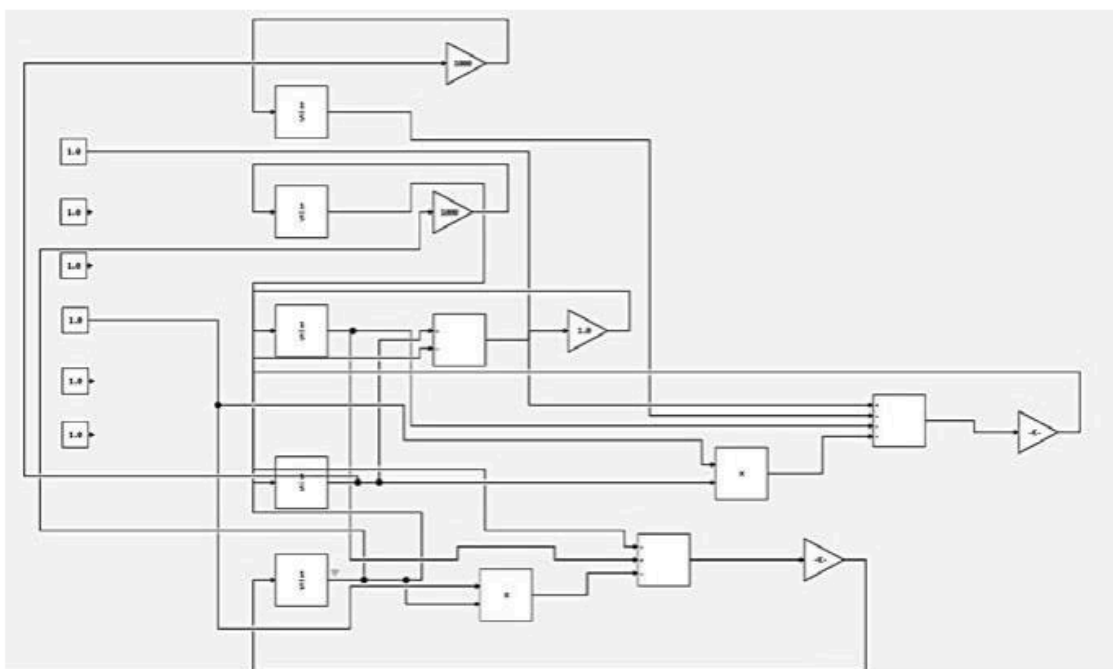


Рис. 2. Схема ТЕСТ 2 в Engage

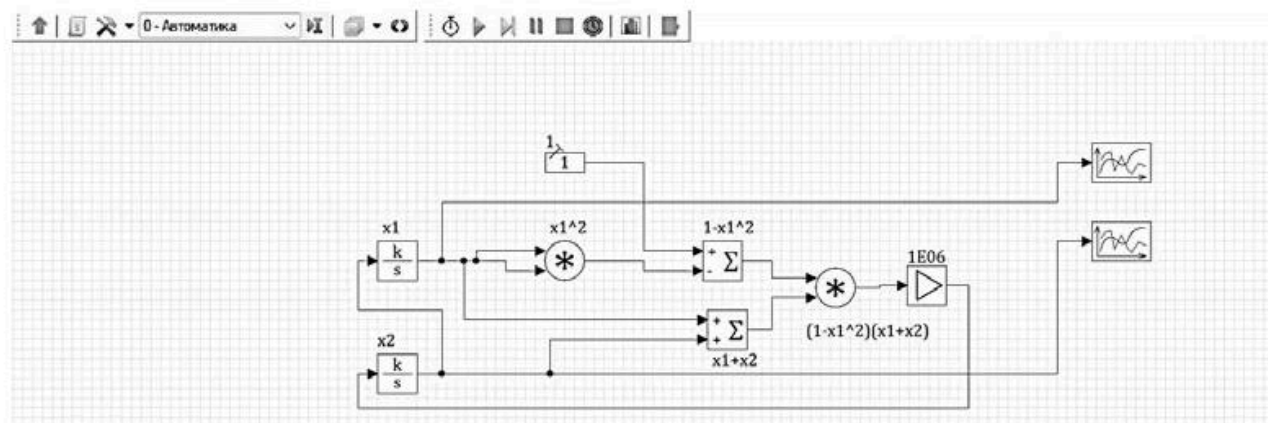


Рис. 3. Схема ТЕСТ 3 в SimInTech

ТЕСТ 4. Четвертый тест представляет собой нелинейную жесткую систему ОДУ повышенной сложности с многопериодным решением, специаль-

но разработанную для математического моделирования переходных процессов в реальных лазерных системах и установках. Данная модель учитывает основные физические особенности работы лазера.

Система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 \cdot (\alpha \cdot x_2 + \beta) + \gamma; \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2 \cdot (\rho \cdot x_1 - \sigma) + \tau \cdot (1 + x_1); \end{cases}$$

$$x_1(0) = -1, x_2(0) = 0, t \in (0, 10^6);$$

$$\alpha = 1,5 \cdot 10^{-18}, \beta = 2,5 \cdot 10^{-6}, \gamma = 2,1 \cdot 10^{-6};$$

$$\rho = 0.6, \sigma = 0.18, \tau = 0.016.$$

Реализованная схема представлена на рис. 4.

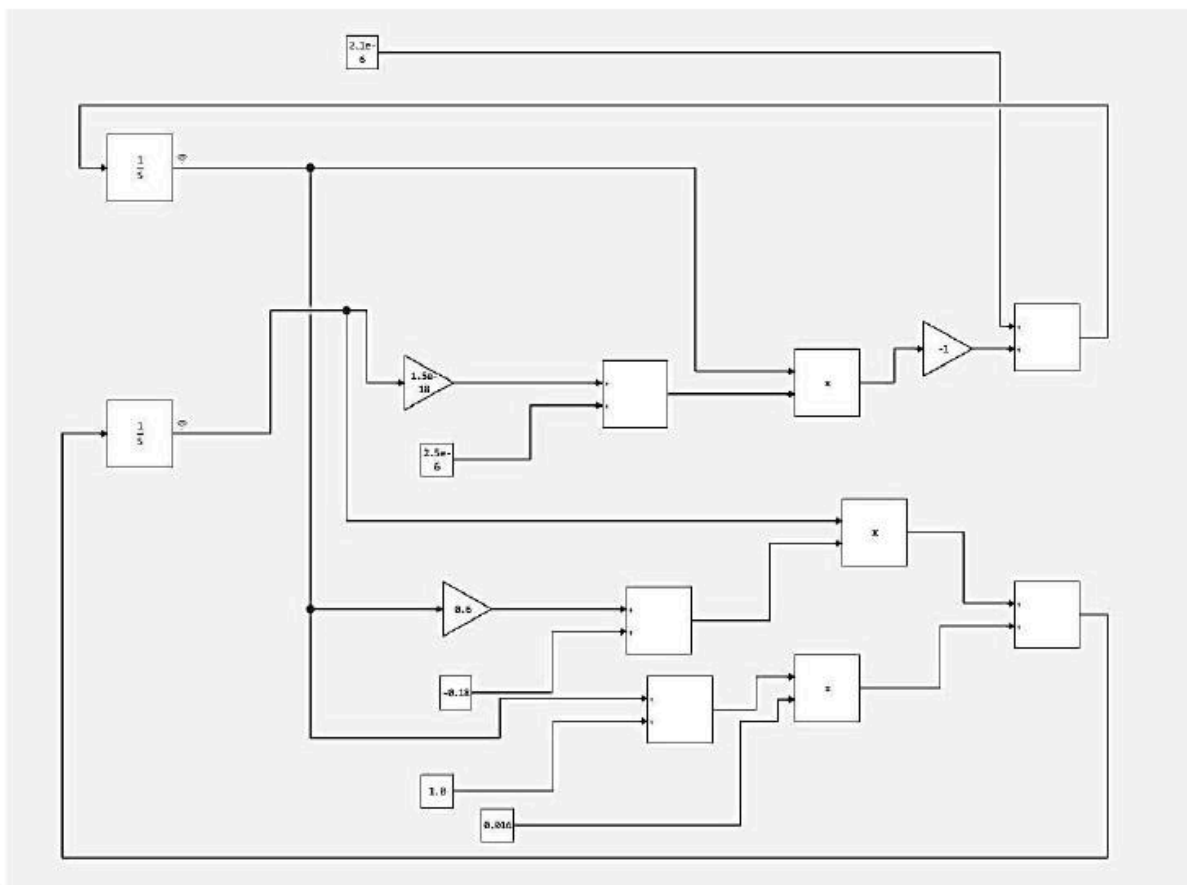


Рис. 4. Схема ТЕСТ 4 в Engauge

Используемые методы решения и результаты. В решателях систем ОДУ SimInTech реализованы семь методов интегрирования: Euler, RungeKutta4, ImplicitEuler, Trapezoidal, BDF, DormandPrince, Rodas.

Проводилось тестирование решателей ARK21 и BDF, используемых по умолчанию и реализующих метод дифференцирования назад, при заданной относительной точности интегрирования 0,001, остальные параметры решателей задавались по умолчанию.

В программе SimInTech были рассчитаны схемы пяти тестов и были получены следующие результаты.

Результаты теста 1 демонстрируют высокую эффективность решателя, который обеспечил достоверное решение при значениях параметра жесткости до $MU = 1 \times 10^{30}$. Это значительно превышает возможности программы ПА9, разработанной специально для анализа жестких систем, где предельное значение MU составляет 1×10^{16} . Последующие тесты (2–4) подтвердили достоверность и точность вычислений во всем диапазоне исследуемых параметров, не выявив случаев численной неустойчивости в процессе моделирования. Следует отметить, что встроенные алгоритмы SimInTech продемонстрировали эффективный автоматический подбор параметров интегрирования по умолчанию, сопоставимый по точности с программой ПА9 и ПА10 [5], что обеспечило достоверность полученных результатов.

В программе Engее были также реализованы схемы пяти тестов и получены следующие результаты.

Результаты теста 1 в отличие от SimInTech, потребовали намного больше времени для вычислений, вследствие чего при значениях параметра жесткости $MU = 1e6$ вычисление длилось около минуты, что является плохим показателем для решателей систем ОДУ. Последующие тесты (2–4) подтвердили достоверность и точность вычислений во всем диапазоне исследуемых параметров, не выявив случаев численной неустойчивости в процессе моделирования. Пятый тест в Engее не получилось реализовать из-за недостатков системных блоков, например источника треугольного сигнала, который здесь необходим.

В сводной таблице приведено итоговое сравнение решателей систем ОДУ из разработанной на кафедре РК-6 программы ПА9, из математических пакетов, из EDA пакетов со SPICE симулятором и решателями Engее и SimInTech.

Знак (+) означает верное решение теста методом, рекомендуемым для решения жестких систем ОДУ, с параметрами по умолчанию.

Знак (-) означает отсутствие решения теста методом, рекомендуемым для решения жестких систем ОДУ, с параметрами по умолчанию с предупреждением пользователя.

Знак (--) означает неверное решение теста методом, рекомендуемым для решения жестких систем ОДУ, с параметрами по умолчанию без предупреждения пользователя и отказ при попытке получения верного решения.

Знак (-+) означает неверное решение теста методом, рекомендуемым для решения жестких систем ОДУ, с параметрами по умолчанию без предупреждения пользователя и получение верного решения путем настройки соответствующих методов и параметров интегрирования и увеличения времени счета.

Знак (-++) означает неверное решение теста методом, рекомендуемым для решения жестких систем ОДУ, с параметрами по умолчанию без предупреждения пользователя и получение верного решения путем настройки только параметра заданной точности метода интегрирования и увеличения времени счета, нд — нет данных.

Результаты вычислений тестов в различных программах 1D-моделирования технических систем

Программа решатель систем ОДУ	ТЕСТ					
	ТЕСТ 1	ТЕСТ 2			ТЕСТ 3	ТЕСТ 4
		Kt	Kr	Ki		
ПА9	+	+	+	+	+	+
ПА10 мини	+	+	+	+	-++	-++
MATLAB2012	--	-++	-++	-++	-++	+
OpenModelica	-	-+	-+	-+	--	--
Engsee	+	+	+	+	+	+
SimInTech	+	-++	-++	-++	+	+

На рис. 5–10 представлены некоторые результаты тестирования.

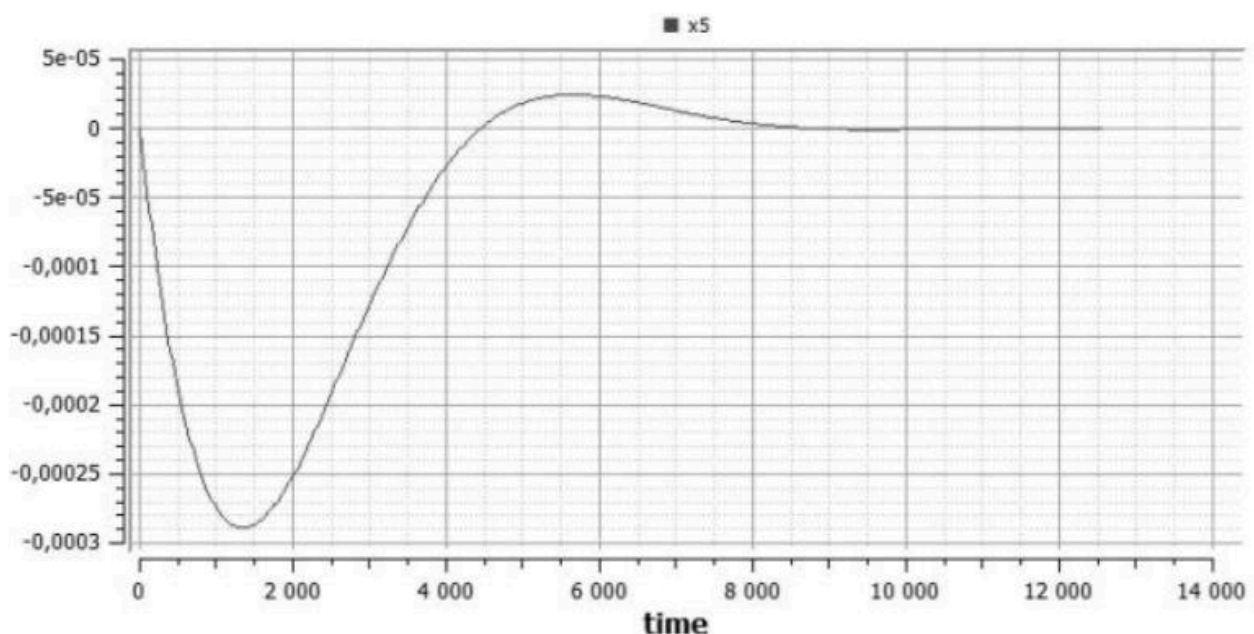


Рис. 5. Решение ТЕСТ 2, полученное в среде OpenModelica

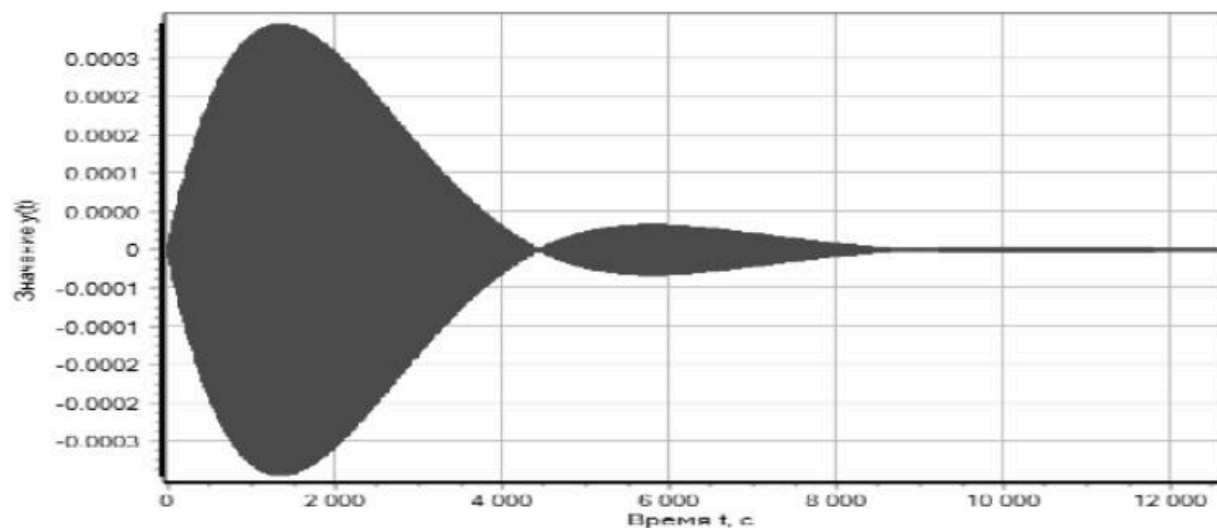


Рис. 6. Правильное решение ТЕСТ 2, полученное в среде SimInTech

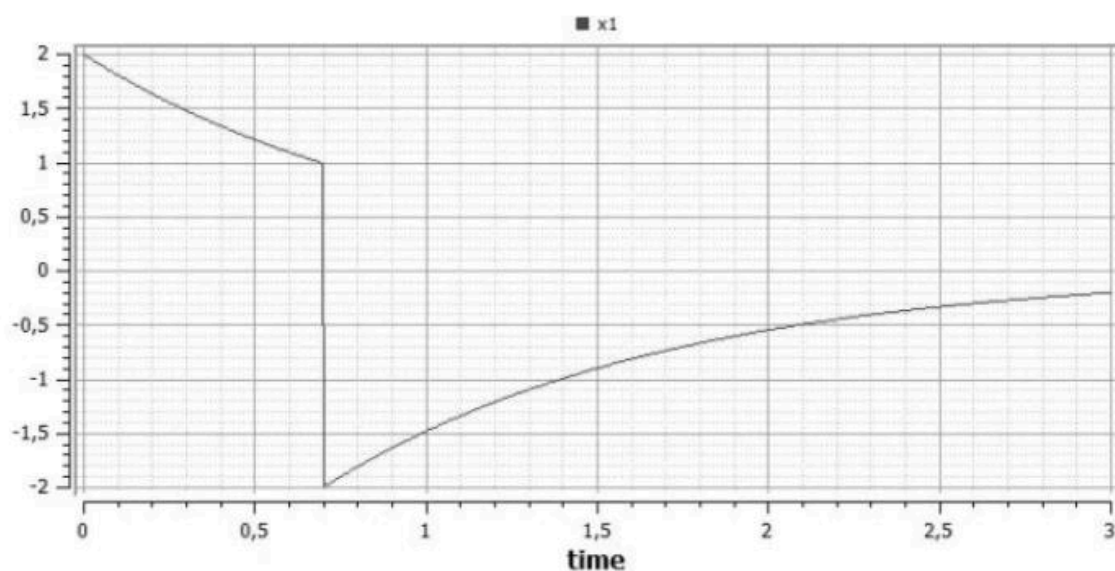


Рис. 7. Решение ТЕСТ 3, полученное в среде OpenModelica

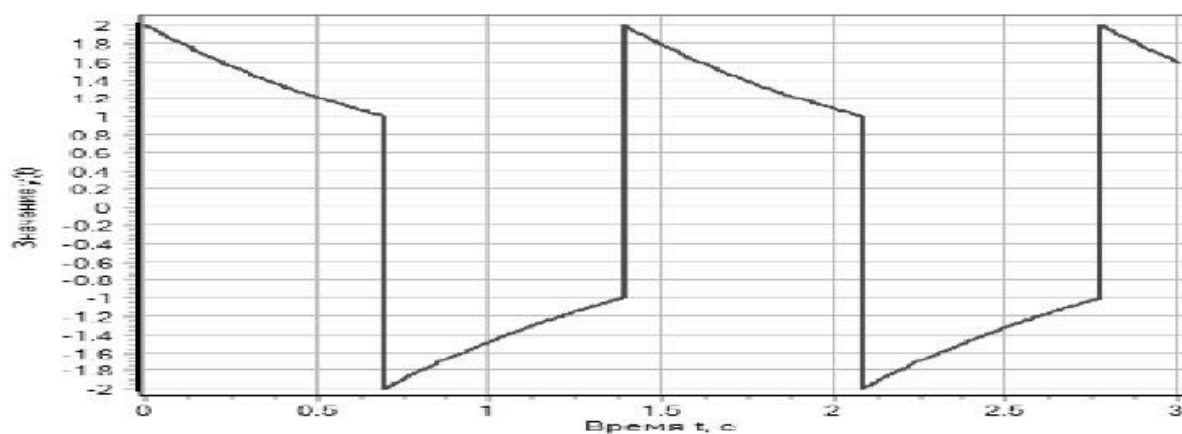


Рис. 8. Правильное решение ТЕСТ 3, полученное в среде SimInTech

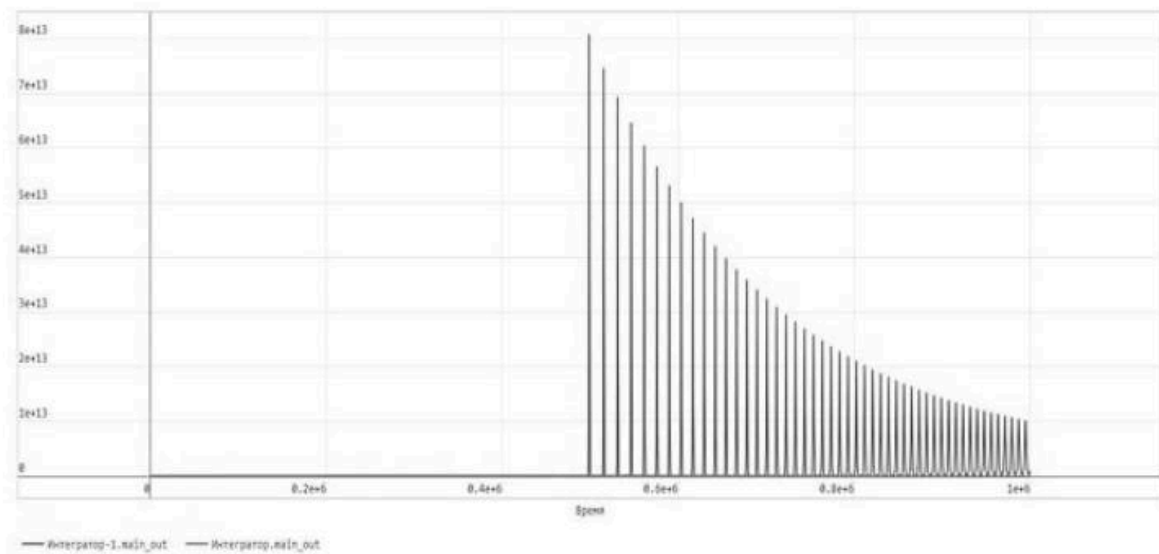


Рис. 9. Правильное решение ТЕСТ 4, полученное в среде Engae

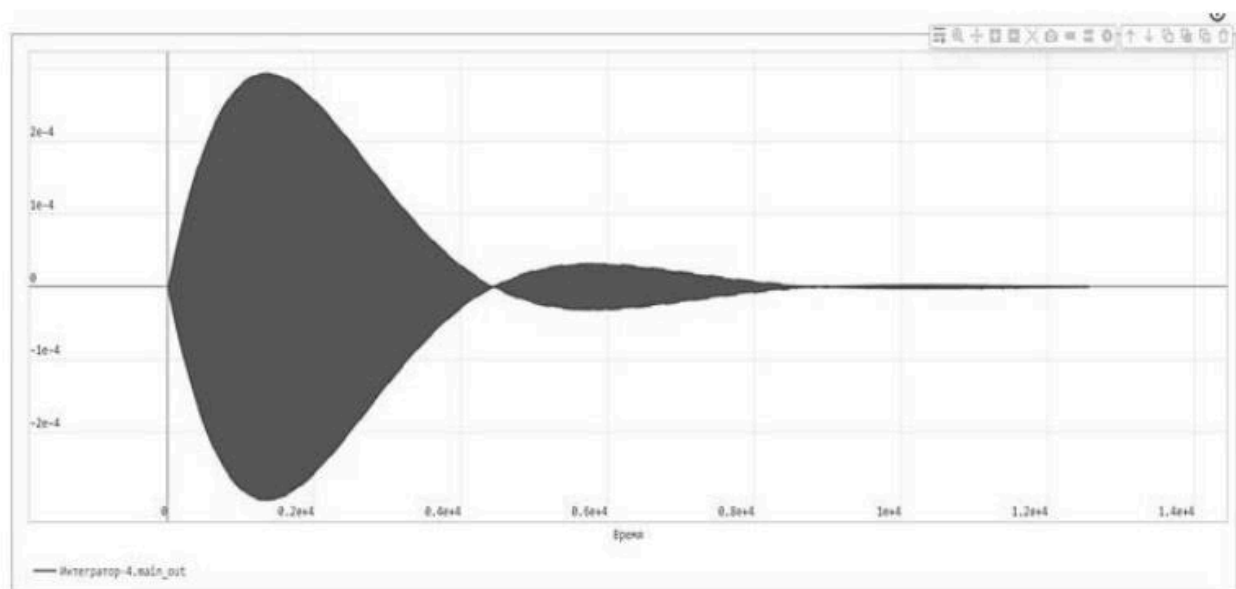


Рис. 10. Правильное решение ТЕСТ 1, полученное в среде Engae

Заключение. Проведенные тесты подтвердили высокую эффективность специализированных программных сред для численного решения систем ОДУ, выявив их четкую специализацию по целевой аудитории. Особый интерес представляет сравнение полученных результатов с данными программы ПА9, разработанной на кафедре РК-6 специально для решения сверхжестких систем уравнений. Среда SimInTech продемонстрировала стабильную работу на всех тестовых сценариях с параметрами по умолчанию, показав сопоставимую с ПА9 достоверность и точность при решении данных тестовых задач, что подтверждает ее ориентацию на инженерные приложения. Ключевыми преимуществами платформы являются полностью автоматизированный про-

цесс вычислений, интеллектуальный подбор параметров интегрирования, прозрачная система диагностики и минимальные требования к подготовке пользователя.

Engее реализован как инструмент для научных исследований, требующий от пользователя глубокого понимания численных методов, навыков программирования и способности к тонкой настройке алгоритмов. В ходе тестирования он показал сравнимую с ПА9 гибкость при работе с нестандартными задачами. Обе платформы показали достоверные результаты на пяти различных тестовых сценариях, однако их сравнительные преимущества определяются сферой применения. SimInTech оптимален для промышленного инженерного моделирования, в то время как Engее ориентирован на научные исследования и будет труден для инженеров. Дальнейшее развитие работы предполагает исследование возможностей адаптации данных платформ для решения более сложных классов уравнений, включая сложные дифференциально-алгебраические системы ОДУ, а также анализ их производительности при работе с моделями большой размерности. Особый интерес представляет интеграция рассмотренных программ в современные PLM-системы.

Литература

- [1] Скворцов Л.М. *Численное решение обыкновенных дифференциальных и дифференциально-алгебраических уравнений*. Москва, ДМК Пресс, 2018, 230 с.
- [2] Маничев В.Б., Жук Д.М., Витюков Ф.А. Метод математического тестирования программ анализа переходных процессов в САПР электронных схем. *Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем*, 2014, № 1, с. 1–6.
- [3] Скворцов Л.М. Явный и неявные многошаговые методы численного решения жестких дифференциальных уравнений. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 2007, т. 47, № 6, с. 959–967.
- [4] Жук Д.М., Маничев В.Б., Ильницкий А.О. Методы и алгоритмы решения дифференциально-алгебраических уравнений для моделирования систем и объектов во временной области. *Информационные технологии*, 2010, № 7, с. 16–24.
- [5] Жук Д.М., Маничев В.Б., Сахаров М.К. SADEL — библиотека «сверхточных» решателей для программного комплекса ПА10 (SADEL-PA10). *Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем*, 2012, № 1, с. 147–153.

Evaluation of Russian modeling software performance on challenging mathematical test cases with comparison to PA9

Meneshov Makhmud Bahadir

Lyalkin Gleb Olegovich

Manichev Vladimir Borisovich (*scientific advisor*)

BMSTU, Moscow, Russia

This study evaluates Russian simulation tools SimInTech and Engee using five complex test problems with ODEs of varying stiffness. SimInTech showed high efficiency with default settings, handling extreme stiffness (e.g., Van der Pol, $\mu=10^3$), while Engee required more tuning. Both matched the accuracy of PA9 but differ in target applications: engineering vs. scientific research.

Keywords: ordinary differential equations, numerical modeling, solver comparison, benchmark tests, computational accuracy, engineering software