

УДК 531.3

Сферический маятник. Динамика приведенной системы

Сутягин Алексей Максимович

Белоножко Павел Петрович (научный руководитель)

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Проведено численно-аналитическое исследование динамики сферического маятника. Выделено независимое уравнение динамики, описывающее нелинейные колебания маятника относительно вертикального положения. Данное уравнение рассмотрено как уравнение динамики приведенной системы. Численное моделирование в программном комплексе «Универсальный Механизм» подтвердило совпадение фазовых траекторий собственных движений приведенной системы с линиями уровня поверхности энергии приведенной системы.

Ключевые слова: сферический маятник, приведенная система, малые колебания, нелинейные колебания, стационарное движение, уравнения динамики, численное моделирование

Введение. В контексте управления многозвенными системами особый интерес представляет задача выделения независимой подсистемы из системы уравнений динамики. Когда некоторые из обобщенных координат являются позиционными, а остальные — циклическими, решение такой задачи становится возможным с использованием известных формальных подходов. Рассмотрим независимую подсистему уравнений динамики как математическую модель объекта управления — приведенной системы. В данном случае получаем возможность углубленного изучения собственной динамики, в том числе с точки зрения использования собственных движений при построении управления.

В настоящей статье рассмотрен пример выделения приведенной системы, соответствующей движению по обобщенной координате, соответствующей отклонению сферического маятника от вертикального положения. Проиллюстрирована динамика системы в целом методом построения фазовых портретов и поверхностей энергии.

Динамика сферического маятника. Будем исследовать динамику сферического маятника методом приведенной системы. Рассмотрим сферический маятник [1] — материальную точку, подвешенную на невесомом недеформируемом стержне (рис. 1).

На рис. 1 обозначено: O — точка подвеса, начало системы координат $хуz$, ось Oz направлена вертикально вниз; $\bar{g}$ — ускорение свободного падения; l — длина стержня; θ — угол отклонения маятника от вертикального положения, направление отсчета показано на рис.; ψ — угол поворота плоскости, проходящей через стержень и ось Oz , направление отсчета показано на рисунке.

Положение маятника будем определять обобщенными координатами θ и ψ . Кинетическая энергия сферического маятника [1] равна

$$T = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta). \quad (1)$$

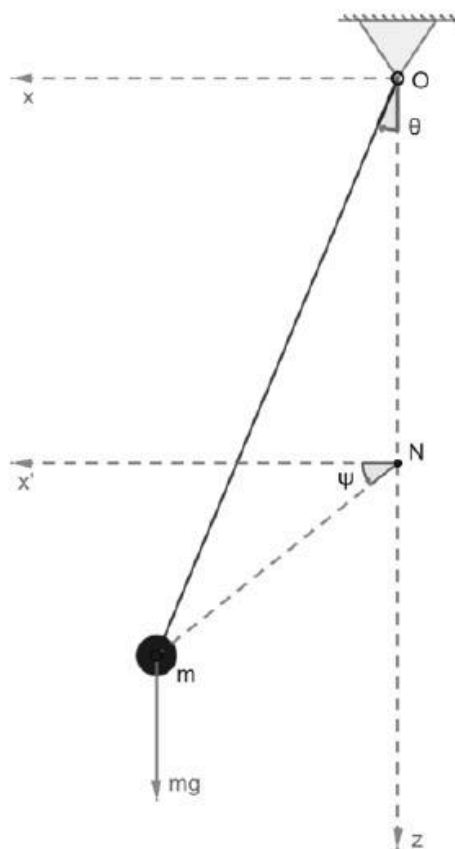


Рис. 1. Расчетная схема сферического маятника

Потенциальную энергию сферического маятника [1], отсчитываемая от нижнего положения устойчивого равновесия $\theta = 0$, определяет выражение

$$\Pi = mgl(1 - \cos \theta). \quad (2)$$

Запишем уравнения Лагранжа второго рода в форме

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где кинетический потенциал (функция Лагранжа), с учетом (1) и (2), определяется выражением

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) - mgl(1 - \cos \theta). \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3), получим

$$\begin{aligned} ml^2 \ddot{\theta} - ml^2 \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + mgl \sin \theta &= 0; \\ ml^2 \ddot{\psi} \sin^2 \theta + 2ml^2 \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Поскольку L не зависит от ψ , и обобщенная сила Q_ψ равна нулю имеем циклический интеграл

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = \text{const}. \quad (6)$$

Подставляя (4) в (6), получим

$$ml^2 \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta = K_z = \text{const}. \quad (7)$$

Циклический интеграл (7) выражает постоянство проекции K_z кинетического момента системы, в движении, определяемом уравнениями (5).

Рассмотрим важное стационарное движение рассматриваемой системы — режим конического маятника — вращение материальной точки m по горизонтально расположенной окружности с постоянной по модулю скоростью [2]. Для данного режима имеем

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta^* \equiv \text{const}; \\ \dot{\theta}(t) &\equiv 0; \\ \dot{\psi}(t) &\equiv \omega^* = \text{const}. \end{aligned} \quad (8)$$

При этом константы θ^* , ω^* связаны соотношением [1], обеспечивающем равенство центростремительной силы горизонтальной составляющей натяжения стержня:

$$\omega^{*2} = \frac{g}{l \cos \theta^*}. \quad (9)$$

Для стационарных движений

$$0 < \theta^* < \frac{\pi}{2}. \quad (10)$$

Для каждого из стационарных движений рассматриваемой совокупности (10) имеет место первый интеграл (7) вида

$$ml^2 \omega^* \sin^2 \theta^* = K_z. \quad (11)$$

Таким образом, константа K_z для рассматриваемого диапазона стационарных движений (10) может быть выражена через ω^* и θ^* . Учитывая, что в силу (9), стационарное движение вполне однозначно определяется углом θ^* (с точностью до направления вращения по координате ψ), можем записать

$$K_z = ml^2 \dot{\psi} \sin^2 \theta = ml^2 \omega^* \sin^2 \theta^*. \quad (12)$$

Отсюда следует

$$\dot{\psi} = \omega^* \frac{\sin^2 \theta^*}{\sin^2 \theta}. \quad (13)$$

Учитывая (9), имеем из (13)

$$\dot{\psi}^2 = \omega^{*2} \frac{\sin^4 \theta^*}{\sin^4 \theta} = \frac{g}{l \cos \theta^*} \frac{\sin^4 \theta^*}{\sin^4 \theta}. \quad (14)$$

Подставляя (14) в первое уравнение (5), получим

$$ml^2 \ddot{\theta} - ml^2 \frac{g}{l \cos \theta} \cdot \frac{\sin^4 \theta^*}{\sin^4 \theta} \sin \theta \cos \theta + mgl \sin \theta = 0,$$

и, после очевидных преобразований, получим независимое уравнение динамики приведенной системы

$$ml^2 \ddot{\theta} - mgl \frac{\sin^4 \theta^*}{\cos \theta^*} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} + mgl \sin \theta = 0. \quad (15)$$

Линеаризуем уравнение (15) в окрестности положения θ^* . Пусть $\theta(t) = \theta^* + \xi(t)$, $\xi(t) \ll 1$ — малая величина. Разложим нелинейные члены в ряд Тейлора до первого порядка по ξ :

$$\sin \theta \approx \sin \theta^* + \cos \theta^* \xi;$$

$$\cos \theta \approx \cos \theta^* - \sin \theta^* \xi; \quad (16)$$

$$\frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} \approx \frac{\cos \theta^*}{\sin^3 \theta^*} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} \right) \Big|_{\theta=\theta^*} \xi = \frac{\cos \theta^*}{\sin^3 \theta^*} - \frac{1}{\sin^2 \theta^*} \xi \frac{3 \cos^2 \theta^*}{\sin^4 \theta^*} \xi. \quad (17)$$

Подставляя (16), (17) в (15), получим после преобразований линеаризованное в окрестности положения θ^* уравнение динамики приведенной системы:

$$\ddot{\xi} + \frac{g}{l} \left(\frac{\sin^2 \theta^*}{\cos \theta^*} + 4 \cos \theta^* \right) \xi = 0. \quad (18)$$

Так как из (10) следует, что $\cos \theta^* > 0$, уравнение имеет вид

$$\ddot{\xi} + \tilde{\omega}^2 \cdot \xi = 0, \quad (19)$$

где $\tilde{\omega}$ — частота малых собственных колебаний приведенной системы и

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{g}{l} \left(\frac{\sin^2 \theta^*}{\cos \theta^*} + 4 \cos \theta^* \right)}. \quad (20)$$

Поскольку $\tilde{\omega}^2 > 0$, приведенная система описывает гармонические колебания с периодом

$$\tilde{T} = \frac{2\pi}{\tilde{\omega}}. \quad (21)$$

Пусть конкретное движение сферического маятника в соответствии с уравнениями (5) определяется некоторыми произвольными начальными условиями:

$$\theta_0 = \theta(t)|_{t=0}; \quad \dot{\theta}_0 \equiv \dot{\theta}(t)|_{t=0}; \quad \psi_0 \equiv \psi(t)|_{t=0}. \quad (22)$$

Учитывая соотношение (14), можем заключить, что произвольные начальные условия $\theta_0, \dot{\psi}_0$ определяют вполне однозначно (с точностью до направления ω^*) стационарное движение θ^* и ω^* в соответствии с соотношением (9).

Перепишем (14) с учетом (22) в виде

$$\dot{\psi}_0^2 \sin^4 \theta_0 - \frac{g}{l} \frac{\sin^4 \theta^*}{\cos \theta^*} = 0. \quad (23)$$

При заданных $\dot{\psi}_0^2, \theta_0$ уравнение (23) определяет θ^* . При заданном θ^* вращение (9) определяет ω^{*2} (и, соответственно, ω^* , считая ω^* , например, положительным). При этом изменение значения $\dot{\theta}_0$ не изменяет параметров стационарного движения, соответствующего начальным условиям (22). Таким образом, можно сделать вывод, что произвольному собственному движению консервативной системы (5), определяемому начальными условиями (22), может быть поставлено в соответствие вполне определенное стационарное движение (8), определяющее точку устойчивого равновесия приведенной системы (15).

Потенциальная энергия [3] приведенной системы равна

$$\tilde{\Pi}_R = mgl(\cos \theta^* - \cos \theta) + \frac{1}{2}mgl \left(\frac{\sin^4 \theta^*}{\cos \theta} \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta^*} \right). \quad (24)$$

Первое слагаемое потенциальной энергии (24) обусловлено текущим отклонением по координате θ от положения θ^* . Второе слагаемое отражает влияние «скрытого» движения по циклической координате $\dot{\psi}$ на наблюдаемое движение по позиционной координате θ — движение приведенной системы.

Кинетическую энергию приведенной системы определяет выражение

$$T_R = \frac{1}{2}ml^2 \dot{\theta}^2. \quad (25)$$

Поскольку приведенная система консервативна, имеет место интеграл энергии

$$T_R + \tilde{\Pi}_R = \frac{1}{2}ml^2 \dot{\theta}^2 + mgl(\cos \theta^* - \cos \theta) + \frac{1}{2}mgl \left(\frac{\sin^4 \theta^*}{\cos \theta} \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta^*} \right) = \text{const}. \quad (26)$$

Компьютерное моделирование динамики сферического маятника. Для того чтобы подтвердить правильность выведенных соотношений, обратимся к компьютерному эксперименту [4]. Для начала необходимо выбрать программный комплекс и создать модель. В качестве пакета моделирования был выбран «Универсальный механизм».

Начнем с создания двух сферических маятников [5–7]. Для удобства маятники (рис. 2) будут разных цветов: синий маятник для стационарных движений с заданным постоянными θ^* и $\dot{\psi}$; и красный для случая задания малых колебаний с ненулевой начальной скоростью $\dot{\theta}_0$.

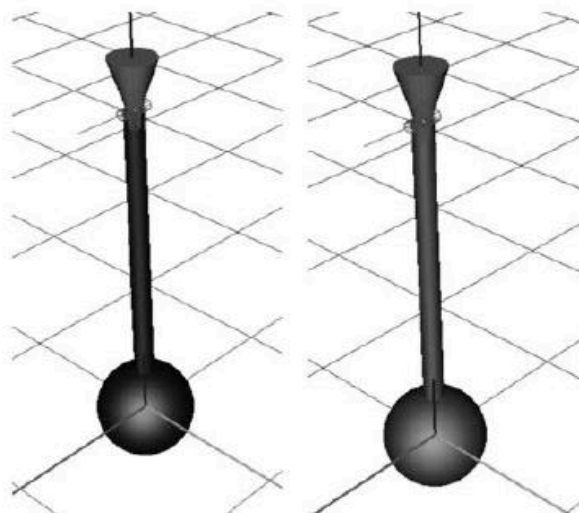


Рис. 2. Графический вид маятников с заданными шарнирами

Дополнительно в мастере идентификаторов введем промежуточные выражения для дальнейшего исследования. Прежде всего, выберем значение угла θ^* так, чтобы можно было пробежать (с учетом (10)) по значениям от нуля до $\pi/2$.

Для задания стационарных движений сферического маятника при выбранном значении угла, например $\theta^* = \pi/10$, необходимо установить соответствующую скорость стационарного вращения $\dot{\psi}^* = 3,2116731$ рад/с. В анимационном окне воспользуемся возможностью отобразить вектор скорости и траекторию точки сферического маятника. Как видно из рис. 3, траектория представляет собой окружность, что в совокупности с графиками справа подчеркивает верное задание начальных условий и достижение стационарного движения. Модуль вектора скорости во время процесса моделирования оставался постоянным по модулю: маятник держал стационарное движение по заданному начальному значению.

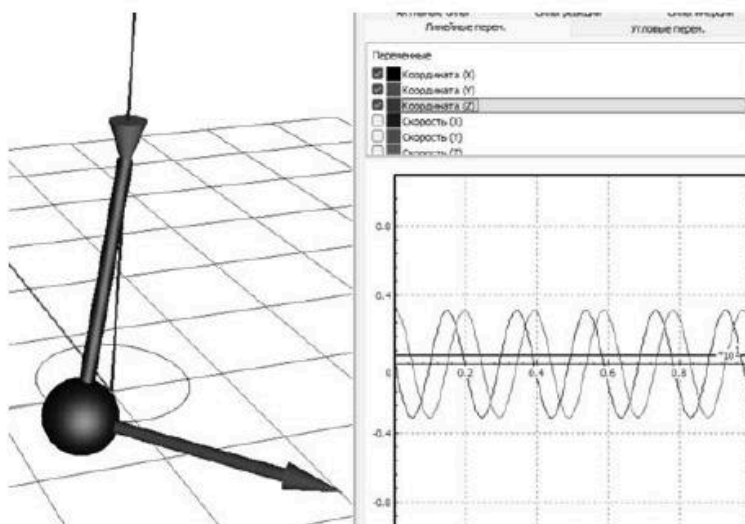


Рис. 3. Стационарные движения: траектория окружность

Второй маятник будет отличаться наличием некоторой небольшой начальной угловой скорости $\dot{\theta}_0 = 0,15$ рад/с. Движения уже не будут стационарными, что демонстрируется на рис. 4.

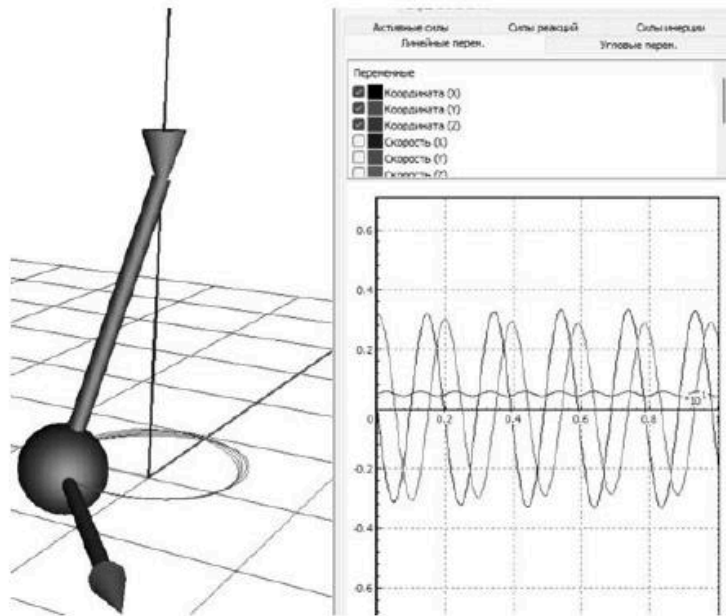


Рис. 4. Малые колебания: траектория — пространственная кривая на поверхности сферы

В таблице приведены результаты исследований при различных значениях угла стационарного движения. Параметры модели: $m = 10$ кг, $l = 1$ м. Как показано в таблице, численно полученный в «Универсальном механизме» период собственных колебаний приведенной системы почти совпадает с аналитическими результатами, относительная погрешность не превышает 10^{-4} .

Динамика приведенной системы и сравнение с УМ

Угол стационарного вращения θ^* , рад	Скорость стационарного вращения $\dot{\psi}^*$, рад/с	Круговая частота собственных колебаний приведенной системы $\tilde{\omega}$, рад/с	Период собственных колебаний приведенной системы $\tilde{T}$, с	Период собственных колебаний приведенной системы, определенный численно (УМ) $\tilde{T}$, с	Относительная погрешность
0,15708	3,15155	6,24499	1,00612	1,00621	$8,945 \cdot 10^{-5}$
0,31416	3,21167	6,18906	1,01521	1,01528	$6,895 \cdot 10^{-5}$
0,47124	3,31814	6,10183	1,02972	1,02981	$8,74 \cdot 10^{-5}$
0,62832	3,48222	5,9946	1,04814	1,04824	$9,224 \cdot 10^{-5}$
0,78540	3,72471	5,88928	1,06689	1,06697	$7,498 \cdot 10^{-5}$
0,94248	4,08531	5,82995	1,07774	1,07784	$9,279 \cdot 10^{-5}$
1,09956	4,64848	5,91349	1,06252	1,06259	$6,588 \cdot 10^{-5}$
1,25664	5,63434	6,39063	0,983187	0,98321	$2,339 \cdot 10^{-5}$
1,41372	7,91896	8,2045	0,765822	0,76577	$6,79 \cdot 10^{-5}$

Строго говоря, нельзя точно утверждать, что в случае наличия начальной скорости получили гармонические колебания. Попробуем продемонстрировать, это, воспользовавшись возможностями MATLAB. Перенесем данные, полученные численно в «Универсальном механизме», в текстовый файл, который далее сможем прочитать в MATLAB и, построив на одном графике с синусоидой, показать идентичность через разность. На рис. 5 можно увидеть, что график почти идеально повторяет идеальный гармонический, коэффициент корреляции 0,99891.

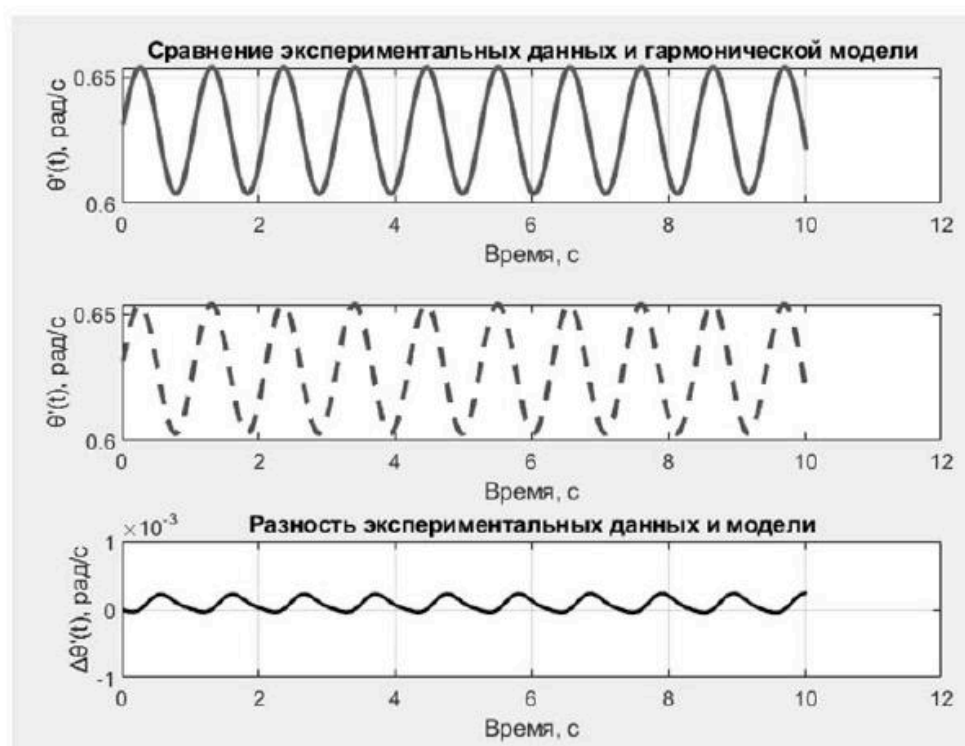


Рис. 5. Гармонические колебания приведенной системы

Анализ динамики. Как было выяснено ранее, произвольному собственному движению можно поставить в соответствие определенное стационарное вращение. Для построения фазовых портретов в УМ необходимо задать начальные условия для маятника. Для получения угла стационарного вращения θ^* из выражения (22) и ω^* из выражения (9) воспользуемся небольшим скриптом в MATLAB. Варьируя теперь $\dot{\theta}_0$ получим семейство фазовых траекторий при заданных начальных условиях. При изменении начальных условий «центр» фазового портрета будет двигаться по оси абсцисс. На рис. 6 представлены фазовые портреты для $\theta^* = 0,31416$ рад и $\theta^* = 1,41372$ рад.

Благодаря наличию интеграла энергии (26) можно построить фазовые портреты как линии уровня соответствующих поверхностей энергии. Далее на рис. 7 представлен фазовый портрет, полученный как линии уровня соответствующей поверхности энергии, построенной в MATLAB по выражению (26).

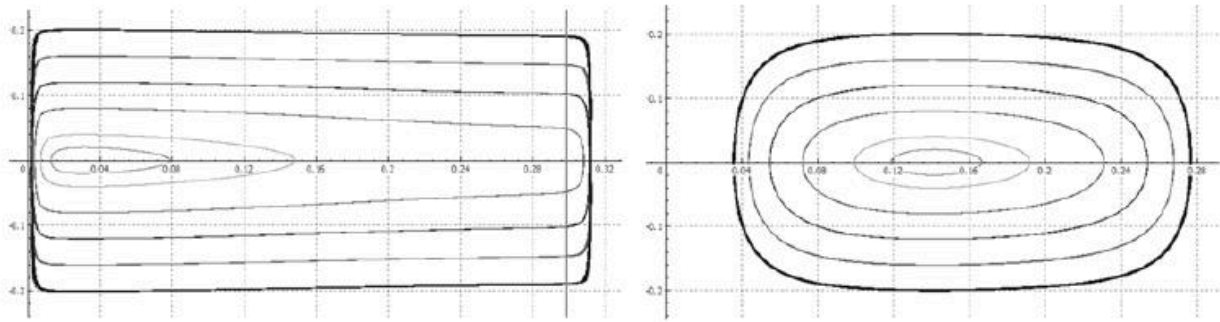


Рис. 6. Фазовые портреты приведенной системы для стационарного вращения $\theta^* = 0,31416$ рад (слева) и $\theta^* = 1,41372$ рад (справа), полученные численным интегрированием

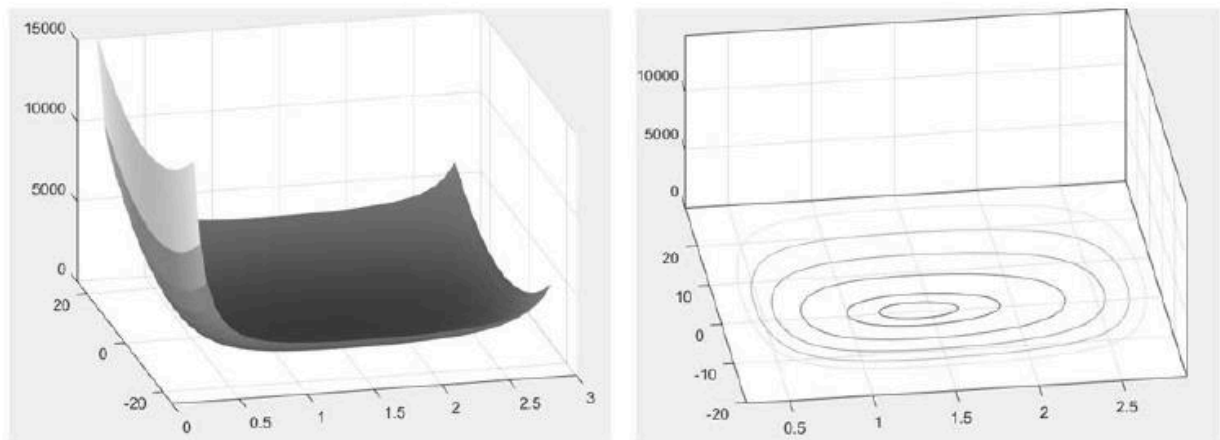


Рис. 7. Фазовый портрет (слева) приведенной системы для стационарного вращения $\theta^* = 1,41372$ рад, полученный как линии уровня поверхности энергии (справа)

Можно отметить, что фазовый портрет, построенный как линии уровня поверхности энергии совпал с фазовым портретом, полученным численным интегрированием в «Универсальном механизме» на рис. 6. Поверхность энергии, соответственно, также движется и видоизменяется с изменением угла θ^* . Построение фазовых портретов и поверхностей энергии позволяет в обозримом виде представить динамику приведенной системы в целом.

Заключение. Проведено численно-аналитическое исследование динамики сферического маятника. Выделено независимое уравнение динамики, описывающее нелинейные колебания маятника относительно вертикального положения. Собственная частота колебаний и положение равновесия приведенной системы определяются начальными условиями движения исходной системы с двумя степенями свободы. Для приведенной системы справедлив интеграл энергии, благодаря которому возможно построение поверхностей энергии и фазовых портретов как линий уровня поверхности энергии. Численное моделирование в «Универсальном Механизме» подтвердило совпадение фазовых траекторий собственных движений приведенной системы с линиями уровня поверхности энергии приведенной системы. Результаты работы могут быть применены для анализа управляемых многосвязных систем с циклическими координатами.

Литература

- [1] Меркин Д.Р. *Введение в теорию устойчивости движения*. Москва, Наука, 1971, 312 с.
- [2] Сутягин А.М. Сферический маятник. Малые колебания приведенной системы. Численно-аналитическое исследование. *Информатизация образования и науки*, 2025, № 3 (65), с. 163–180.
- [3] Белоножко П.П. Анализ приведенной нелинейной колебательной системы, соответствующей одностепенным манипуляторам на подвижном и шарнирно закрепленном основании. *Робототехника и техническая кибернетика*, 2017, № 3 (16), с. 44–52.
- [4] Сутягин М.В., Сутягин А.М. Создание цифровой среды образовательной организации на основе стандартов. *Информатизация образования и науки*, 2025, № 1 (65), с. 22–34.
- [5] *Универсальный Механизм*. URL: <https://www.umlabor.ru/pages/index.php?id=1> (дата обращения 20.03.2025).
- [6] Погорелов Д.Ю., Толстошеев А.К., Ковалев Р.В. *Динамический анализ и синтез механизмов с использованием программы УМ*. Брянск, БГТУ, 1997, 46 с.
- [7] УМ Lite: *описание функционала*. URL: <https://www.umlabor.ru/pages/index.php?id=15> (дата обращения 22.03.2025).

Spherical pendulum. Dynamics of the reduced system

Sutyagin Alexey Maximovich

Byelonozhko Pavel Petrovich (*scientific advisor*)

BMSTU, Moscow, Russia

The article presents a numerical and analytical study of the dynamics of a spherical pendulum. An independent equation of dynamics is identified that describes nonlinear oscillations of the pendulum relative to the vertical position. This equation is considered as the equation of dynamics of the reduced system. Numerical modeling in the software package "Universal Mechanism" confirmed the coincidence of the phase trajectories of the proper motions of the reduced system with the level lines of the energy surface of the reduced system.

Keywords: spherical pendulum, reduced system, small-amplitude oscillations, nonlinear oscillations, stationary motion, equations of dynamics, numerical modeling