

УДК 519.6

Математические основы выполнения булевых операций над объектами в рамках полигонального моделирования с использованием геометрического ядра C3D

Юрченко Александр Алексеевич

Бурков Павел Викторович (научный руководитель)

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Был продемонстрирован процесс выполнения булевых операций над объектами в контексте полигонального моделирования. Полигональный объект представляет собой набор треугольных и четырехугольных пластин, ломаных линий и отдельных точек. Булевы операции в геометрическом моделировании — операции объединения, пересечения и вычитания множеств точек двух тел. Представлен общий алгоритм выполнения булевых операций, а также пример выполнения булевой операции пересечения двух полигональных тел на базе геометрического ядра C3D.

Ключевые слова: геометрическое моделирование, полигональное моделирование, геометрическое ядро C3D, триангуляция, системы автоматизированного проектирования, булевы операции в 3D

Введение. Существует множество инструментов для построения 3D-моделей. Один из классических инструментов является построение оболочки тела набором стыкующихся определенным образом друг с другом поверхностей. Граничное представление с помощью криволинейных граней, стыкующихся друг с другом по общим ребрам, описывает граничную поверхность, отделяющую внутренний, объем от остальной части пространства. Описание граничной поверхности моделируемого объекта приводит к построению тел.

Но в ряде случаев наш конечный моделируемый объект состоит из множества более простых и понятных подобъектов. Возникает понятие — булевы операции. На рис. 1 представлено моделируемое тело, состоящее из цилиндра и параллелепипеда.

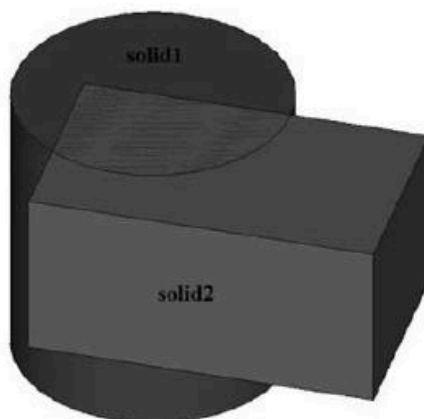


Рис. 1. Композитное тело, состоящее из цилиндра и параллелепипеда

Булевыми операциями в геометрическом моделировании называются операции объединения, пересечения и вычитания множеств точек двух тел [1, 2]. На рисунках 2, 3 представлены операции вычитания и объединения исходных двух тел соответственно.



Рис. 2. Операция вычитания исходных тел

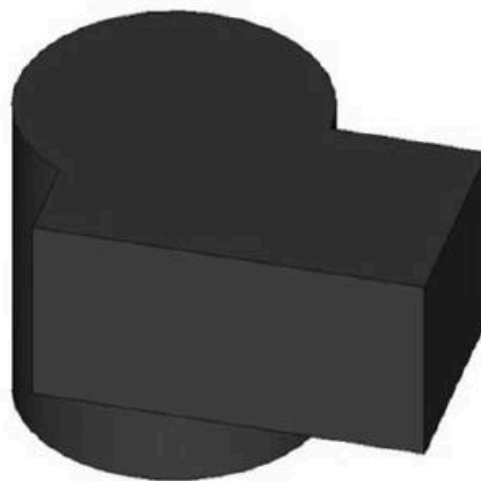


Рис. 3. Операция вычитания исходных тел

Цель работы — обзор принципов выполнения булевых операций с полигональными моделями.

Основы выполнения булевых операций. Все булевы операции подчинены общему алгоритму из четырех шагов [1]:

- 1) построение линии пересечения граней тел-операндов;
- 2) отбор среди новых кривых необходимых для выполнения операции;
- 3) перестроение перекрывающихся и пересекшихся граней;
- 4) формирование оболочки нового тела из перестроенных граней и связанных с ними исходных граней тел-операндов.

Геометрическое ядро C3D. АСКОН является основной российской компанией по разработке программного обеспечения для систем автоматизированного проектирования. C3D Labs представляет собой дочернюю компанию АСКОН. C3D сосредотачивает в себе программную реализацию математических методов построения численных моделей геометрии объектов, а также математических методов анализа и является одним из пяти коммерческих ядер в мире.

C3D состоит из пяти модулей:

- геометрическое ядро C3D Modeler;
- параметрическое ядро C3D Solver;
- модуль обмена данными C3D Converter;
- модуль визуализации C3D Vision;
- модуль C3D B-Shaper, осуществляющий преобразование полигональных моделей в твердотельные с граничным представлением (B-Rep) [3, 4].

C3D предназначен для использования в системах автоматизированного проектирования в качестве программного компонента.

В геометрическом ядре C3D реализован класс MbMesh, представляющий полигональный объект в ядре C3D Modeler. Объект данного класса определяет:

- множество триангуляций $RArray<MbGrid>grids$;
- множество ребер $RArray<MbPolygon3D>wires$;
- множество апексов $RArray<MbApex3D>peaks$.

Полигональное тело можно строить как прямыми методами и алгоритмами, описанными в предыдущем разделе, так и реализованными в C3D методами аппроксимации трехмерных тел.

Построение линии пересечения тел. Спроецируем общий алгоритм выполнения булевых операций в терминах полигонального моделирования.

Полигональный объект — объект, состоящий из набора так называемых «пластин», которые называются полигонами, ломаных линий и отдельных точек, которые описывают поверхность нашего объекта.

Тело состоит из треугольных полигонов, а треугольный полигон — это плоскость, ограниченная тремя неколлинеарными прямыми. И пересечение двух полигональных тел в пространстве сводится к множеству пересечений полигонов, соответственно линией пересечения тел будет являться замкнутая пространственная полилиния. Пересечение двух полигонов удобно свести к пересечению трех отрезков, описывающих первый полигон, со вторым полигоном.

Отрезок является ограниченной прямой в пространстве [1, 5]. Представим его в параметрическом виде, представленной системой уравнений

$$\begin{cases} x = x_0 + mt; \\ y = y_0 + nt; \\ z = z_0 + kt, \end{cases}$$

где x_0, y_0, z_0 — координаты точки в пространстве, являющийся началом прямой; m, n, k — скалярные коэффициенты; t — параметр.

Пусть начало отрезка является точка A с координатами x_a, y_a, z_a . Концом отрезка является точка B с координатами x_b, y_b, z_b . Найдем коэффициенты m, n, k так, чтобы начало отрезка было при $t = 0$, конец при $t = 1$. Получаем следующий вид параметрического представления отрезка в пространстве, построенный по двум точкам, представленной системой уравнений

$$\begin{cases} x = x_a + (x_b - x_a)t; \\ y = y_a + (y_b - y_a)t; \\ z = z_a + (z_b - z_a)t, \\ t \in [0; 1], \end{cases}$$

где x_a, y_a, z_a — координаты точки в пространстве, являющийся началом отрезка; x_b, y_b, z_b — координаты точки в пространстве, являющийся концом отрезка;

В матричном виде система имеет вид

$$[P] = [P_a] + [P_b - P_a],$$

где $[P]$ — вектор-столбец координат отрезка; $[P_a]$ — вектор-столбец координат начала отрезка; $[P_b]$ — вектор-столбец координат конца отрезка.

Для треугольных областей в трехмерном пространстве удобно использовать барицентрические координаты — скалярные параметры, набор которых однозначно задает точку в n -мерном пространстве [1, 5]. Любую точку треугольной поверхности можно описать как взвешенную сумму трех базисных точек. Иллюстрация представления треугольной поверхности в барицентрических координатах представлена на рис. 4.

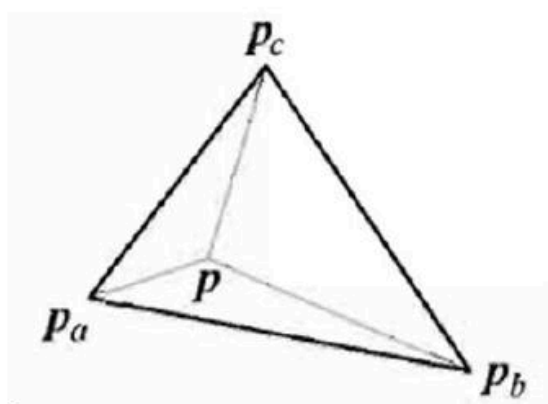


Рис. 4. Треугольная поверхность в барицентрических координатах

Положение любой точки p можно описать с помощью точек p_a, p_b, p_c равенством

$$\begin{cases} p = ap_a + bp_b + cp_c; \\ a+b+c=1; \\ a, b, c \geq 0, \end{cases}$$

где a, b, c — скалярные параметры, определяющие положение точки в пространстве; p_a, p_b, p_c — радиус-векторы узловых точек треугольной поверхности; p — радиус-вектор, описывающий треугольную поверхность.

Итого, для определения взаимного расположения отрезка с полигоном нужно решить систему линейных алгебраических уравнений,

$$\begin{bmatrix} x_a & x_b & x_c & x_{al} - x_{bl} \\ y_a & y_b & y_c & y_{al} - y_{bl} \\ z_a & z_b & z_c & z_{al} - z_{bl} \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{al} \\ y_{al} \\ z_{al} \\ 1 \end{bmatrix},$$

а также оценить параметры a, b, c, t . Здесь x_{al}, y_{al}, z_{al} — координаты точки в пространстве, являющийся началом отрезка; x_{bl}, y_{bl}, z_{bl} — координаты точки в пространстве, являющийся концом отрезка; $x_a, y_a, z_a, x_b, y_b, z_b, x_c, y_c, z_c$ — координаты соответствующих узловых точек треугольной поверхности; a, b, c, t — скалярные параметры, определяющие положение точки в пространстве;

Систему линейных алгебраических уравнений в матричном виде определяет формула

$$\begin{bmatrix} P_a & P_b & P_c & P_{al} - P_{bl} \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{al} \\ 1 \end{bmatrix},$$

где P_{al} — вектор-столбец координат начала отрезка; P_b — вектор-столбец координат конца отрезка; P_a, P_b, P_c — вектор-столбцы узловых точек треугольной поверхности. Параметр t показывает положение отрезка относительно плоскости, в которой лежит полигон. Если $t > 0$, отрезок лежит ниже полигона; $t < 0$ — выше. Параметры a, b, c показывают точку, в которой отрезок, или продолжение отрезка при выходе параметра t из указанного диапазона, пересекает плоскость, в которой лежит полигон. Если условия $a, b, c \geq 0$ и $t \in [0; 1]$ выполняются, то отрезок и полигон пересекаются и точку пересечения находят подстановкой найденных параметров в изначальные уравнения.

Отбор кривых пересечения. Для разных булевых операций будут участвовать разные наборы линий. Линия пересечения двух полигональных тел — замкнутая пространственная полилиния, каждый из сегментов которой лежит на определенной грани исходных моделей. Для исходных тел, представленных на рис. 5, рассмотрим операции пересечения и вычитания, представленные на рис. 6, 7 соответственно.

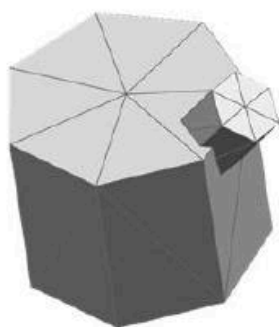


Рис. 5. Исходные тела

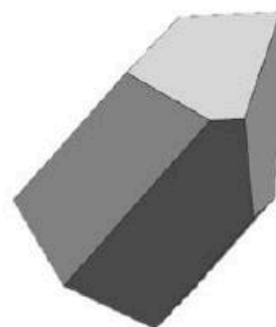


Рис. 6. Операция пересечения исходных тел

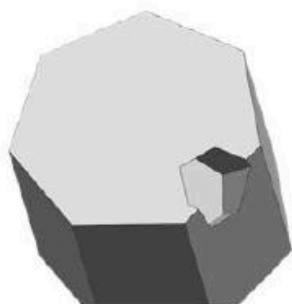


Рис. 7. Операция вычитания исходных тел

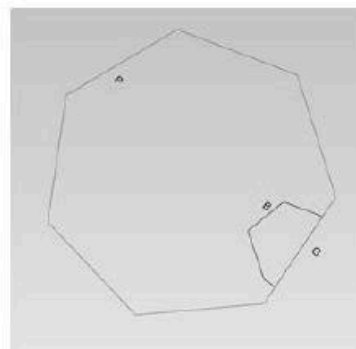


Рис. 8. Кривая пересечения для верхнего основания призмы

На рис. 8 показаны контуры, составляющие верхнюю грань призмы. Для пересечения исходных тел участвует контур BG . Для вычитания — PB .

Перестроение граней. После построения линии пересечения получился замкнутый контур, или набор замкнутых непересекающихся контуров в случае с отверстиями.

Требуется разбить данную область на полигоны. В контексте полигонального моделирования, это классическая задача триангуляции с ограничениями.

Полилинией, в контексте триангуляции, называется фигура, состоящая из ненулевого числа ломаных. Регионом называется фигура, состоящая из ненулевого числа многоугольников, причем допустимы самопересечения и пересечения различных многоугольников.

В задаче построения триангуляции с ограничениями составляющие ломаные исходных полилиний и границы исходных регионов называются «структурными линиями». В нашей задаче «структурные линии» — замкнутые ломаные контуры.

Исходные тела являются полигональными, следовательно, уже имеют триангуляционную структуру. Поэтому имеет смысл перестроить уже имеющуюся триангуляцию.

В данном контексте удобным в использовании будет итеративный алгоритм «Удаляй и строй» [6], иллюстрация которого представлена на рис. 9. В данном алгоритме при каждой вставке нового узла сразу же удаляются все треугольники, у которых внутри описанных окружностей попадает новый узел. При этом все удаленные треугольники неявно образуют некоторый многоугольник. После этого на месте удаленных треугольников строится заполняющая триангуляция путем соединения нового узла с этим многоугольником.

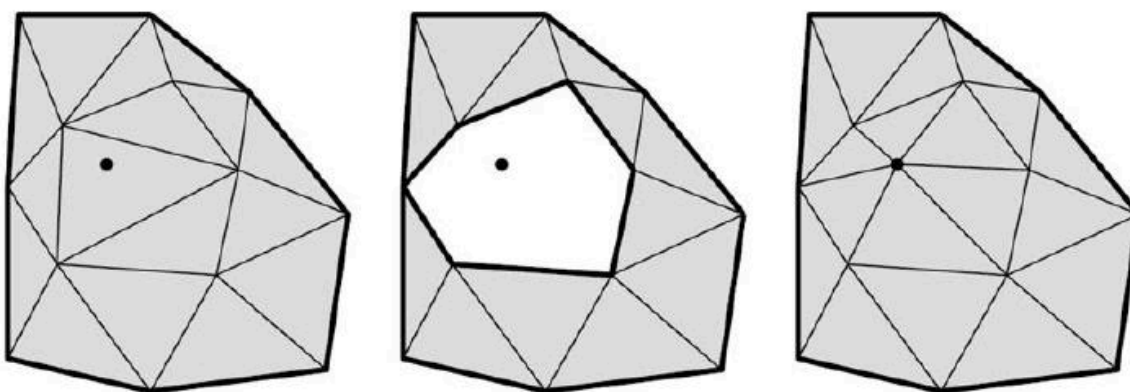


Рис. 9. Иллюстрация алгоритма «Удаляй и строй»

В геометрическом ядре C3D реализован класс MbRegion, представляющий набор замкнутых составных кривых на плоскости. Данный класс имеет встроенные инструменты триангуляции, а также реализованы методы выполнения булевых операций над регионами.

Результат перестроения верхней грани призмы представлен на рис. 10.

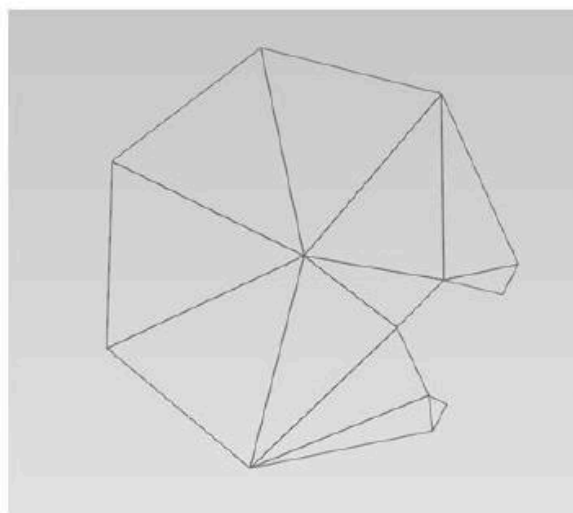


Рис. 10. Перестроенная грань исходного тела

Формирование нового тела. Общая линия пересечения складывается из линий пересечения отдельных полигонов. Так как работа выполняется с полигональными моделями, то и в общем случае пространственную булеву операцию можно представить совокупностью плоских булевых операций для каждой пары пересекающихся ограниченных плоскостей (наборов полигонов, которые лежат в одной плоскости).

Для формирования оболочки полигонального тела воспользуемся классом MbMesh геометрического ядра C3D. Для визуализации был использован модуль геометрического ядра C3D Vision. Для исходных тел, представленных на рис. 11, результат выполнения булевой операции пересечения представлен на рис. 12.

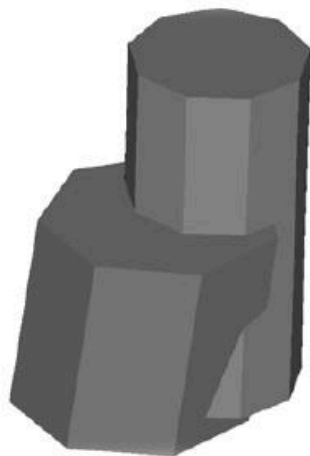


Рис. 11. Исходные тела



Рис. 12. Результат операции пересечения исходных тел

Закключение. Приведены результаты работы алгоритма выполнения булевых операций с использованием принципов полигонального моделирования на основе инструментов геометрического ядра C3D. Были рассмотрены способы построения полигональных тел, а также методы, реализованные в модуле геометрического ядра C3D Modeler.

Литература

- [1] Голованов Н.Н. *Геометрическое моделирование*. Москва, ИНФРА-М, 2016, 400 с.
- [2] Голованов Н.Н., Ильютко Д.П., Носовский Г.В., Фоменко А.Т. *Компьютерная геометрия*. Москва, Академия, 2006, 512 с.
- [3] *Геометрическое ядро-C3D Modeler*. URL: <https://c3dlabs.com/ru/products/c3d-toolkit/modeler> (дата обращения 29.05.2025).
- [4] C3D Toolkit: *построение тел*. URL: https://c3d.ascon.ru/doc/math/group__solid__modeling.html (accessed 29.05.2025).
- [5] Болодурина И.П., Анциферова Л.М., Парфенов Д.И., Гришина Л.С. *Вычислительная математика и информационные технологии*. Оренбург, ОГУ, 2021, 132 с.
- [6] Скворцов А.В., Мирза Н.С. *Алгоритмы построения и анализа триангуляции*. Томск, Изд-во Томского университета, 2006, 168 с.

Mathematical foundations of performing Boolean operations on objects in the framework of polygonal modeling using the geometric core of C3D

Yurchenko Aleksandr Alexeevich

Burkov Paul Viktorovich (*scientific advisor*)

BMSTU, Moscow, Russia

The process of performing Boolean operations on objects in the context of polygonal modeling was demonstrated. A polygonal object is a set of triangular and quadrangular plates, polylines, and individual points. Boolean operations in geometric modeling are operations of combining, intersecting, and subtracting sets of points of two bodies. This article provides an example of performing the Boolean operation intersection of two polygonal bodies based on the geometric core of C3D.

Keywords: geometric modeling, polygonal modeling, geometric core C3D, triangulation, computer-aided design systems, Boolean operations in 3D