

УДК 519.6

Построение параметризованной модели призмы с использованием принципов полигонального моделирования на базе геометрического ядра C3D

Юрченко Александр Алексеевич

Бурков Павел Викторович (научный руководитель)

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Продемонстрирован процесс построения геометрической модели в контексте полигонального моделирования. Полигональный объект представляет собой набор треугольных и четырехугольных пластин, ломаных линий и отдельных точек. Работа с объектами, состоящих из сложных поверхностей, требуют сложных вычислений как для исследования свойств объекта, так и для их визуализации. Для ускорения этих процессов может помочь полигональное моделирование. Полигональный объект описывается облаком вершин в пространстве, объединенных в группы по три вершины, составляющих треугольные полигоны. И на примере модели параметризованной призмы показаны все этапы построения его полигонального представления.

Ключевые слова: геометрическое моделирование, полигональное моделирование, геометрическое ядро C3D, триангуляция, параметризация, системы автоматизированного проектирования

Введение. Существует множество инструментов для построения 3D-моделей. Один из классических инструментов является построение оболочки тела набором стыкующихся определенным образом друг с другом поверхностей. Граничное представление с помощью криволинейных граней, стыкующихся друг с другом по общим ребрам, описывает граничную поверхность, отделяющую внутренний, объем от остальной части пространства. Описание граничной поверхности моделируемого объекта приводит к построению тел.

Работа с моделями, состоящих из сложных поверхностей второго и третьего порядков, а также дифференциальных поверхностей, требует сложных вычислений как для исследования формы модели, так и для его визуализации. В этом контексте становится особенно актуальным изучение методов полигонального моделирования, так как примитив в виде «полигона» не требует особых мощностей для обработки.

Цель настоящей работы — обзор принципов построения полигональных моделей.

Основы построения полигональной модели. Полигональный объект — объект, состоящий из набора так называемых «пластин», которые называются полигонами, ломаных линий и отдельных точек, которые описывают поверхность нашего объекта [1, 2].

Глобально, построение полигонального тела можно разделить на три шага:

- 1) аппроксимация моделируемого тела ограниченными плоскостями (плоскими многоугольниками общего вида);
- 2) триангуляция полученных многоугольников;
- 3) формирование оболочки тела.

Шаг 1. Аппроксимация тела ограниченными плоскостями. Основная задача полигонального моделирования — построение «упрощенной» копии моделируемого объекта с заданной точностью. Для этого требуется определить облако точек в пространстве, описывающих «упрощенную» полигональную оболочку тела.

В контексте вычислительной математики [3–5] это классическая задача локальной интерполяции — разделение поверхности тела на области, линейная интерполяция которых приближается к исходной поверхности с заданной точностью. Формально данную задачу можно описать как оптимизационная задача минимакса. То есть минимизация максимального отклонения:

$$\min_{u,v} E_1(u, v) = \min_{u,v} \max_{u,v} |\mathbf{r}(u, v) - \mathbf{g}(u, v)|,$$

где $E_1(u, v)$ — целевая функция со значениями в пространстве R^3 ; u, v — скалярные параметры; $\mathbf{r}(u, v)$ — векторная функция аналитической поверхности; $\mathbf{g}(u, v)$ — векторная функция плоскости аппроксимации.

Шаг 2. Триангуляция полученных многоугольников. После второго шага получили замкнутую оболочку тела, состоящую из плоских многоугольников общего вида. В частном случае все данные многоугольники могут быть треугольными. Рассмотрим задачу в общем виде.

Одним из простых и действенных методов триангуляции многоугольника является «ушной» метод [6], визуализация которого представлена на рис. 1, 2.

Вершина A_1 называется «ухом», если диагональ A_0A_2 лежит строго во внутренней области многоугольника. На рис. 3 представлен результат применения данного алгоритма для триангуляции многоугольника общего вида.

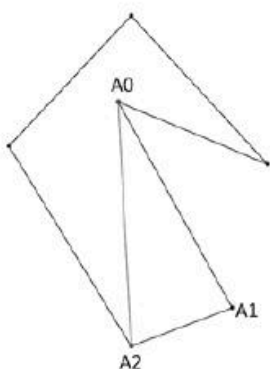


Рис. 1. «Ушной» метод триангуляции

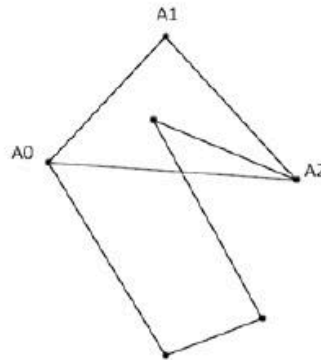


Рис. 2. «Ушной» метод триангуляции

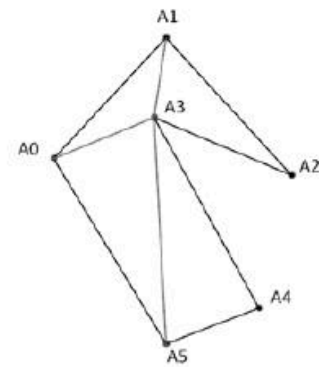


Рис. 3. Триангуляция многоугольника общего вида «ушным» методом

Шаг 3. Формирование оболочки тела. Полученные наборы полигонов являются лишь математическими абстракциями, являющимися тройками точек, описывающих вершины полигонов в пространстве.

Топологию полигонального тела удобно представить в виде графа. Вершина графа является номер полигона в общем массиве полученных полигонов. Ребро графа показывает, что данные полигоны имеют общее ребро. Вес ребра является номером отрезка из общего массива отрезков, из которых состоят полигоны.

Геометрическое ядро C3D. АСКОН является основной российской компанией по разработке программного обеспечения для систем автоматизированного проектирования. C3D Labs представляет собой дочернюю компанию АСКОН. C3D сосредотачивает в себе программную реализацию математических методов построения численных моделей геометрии объектов, а также математических методов анализа и является одним из пяти коммерческих ядер в мире.

C3D состоит из пяти модулей: геометрического ядра C3D Modeler, параметрического ядра C3D Solver, модуля обмена данными C3D Converter, модуля визуализации C3D Vision и C3D B-Shaper, осуществляющего преобразование полигональных моделей в твердотельные с граничным представлением (B-Rep). C3D предназначен для использования в системах автоматизированного проектирования в качестве программного компонента [7, 8].

В геометрическом ядре C3D реализован класс MbMesh, представляющий полигональный объект в ядре C3D Modeler. Объект данного класса описывается:

- множеством триангуляций `RPAArray<MbGrid>grids;`
- множеством ребер `RPAArray<MbPolygon3D>wires;`
- множеством апексов `RPAArray<MbApex3D>peaks;`

Полигональное тело можно строить как прямыми методами и алгоритмами, описанными в предыдущем разделе, так и реализованными в C3D методами аппроксимации трехмерных тел.

Построение параметризованной призмы. Спроецируем алгоритм построения полигонального тела для построения параметризованной модели призмы.

Призма — это многогранник, две грани которого являются равными многоугольниками, лежащими в параллельных плоскостях, а остальные грани — параллелограммы. В рамках данной работы использовался класс MbMesh как базовый класс полигонального объекта и реализованный класс объекта «Призма», в основании которого лежит правильный n -угольник.

Для однозначного определения призмы требуется задать количество углов правильного n -угольника, радиус описанной окружности R вокруг n -угольника, высоту призмы H и угол наклона призмы, относительно нижнего основания.

Шаг 1. Аппроксимация исходного тела. Так как исходное тело не аппроксимируем, а строим его на основе параметров, то первый шаг будет вычисление координат апексов, описывающих набор многоугольников в пространстве.

Определим точки нижнего основания через цикл, конец которого определяется обходом описанной окружности заданного радиуса по часовой

стрелке и инкрементом которого является приращение угла обхода на угол, равный $\frac{2\pi}{n}$, где n — число углов правильного n -угольника.

Точки верхнего основания определим, как точки нижнего основания, смещенные по координате z на высоту H , а также по координате x на $H \cdot \cot \alpha$, где α — параметр, определяющий угол наклона призмы.

Шаг 2. Создание полигональной сетки. Из определения призмы понятна форма многоугольников, точно описывающих форму тела.

Боковые грани являются четырехугольниками и разбиваются на два полигона. В основаниях определим еще одну точку, являющуюся центром описанной окружности данных правильных n -угольников, и разобьем их на n полигонов, которые содержат центр описанной окружности и две точки многоугольника, соединенные ребром. Таким образом получаем $n \cdot 4$ полигонов, точно описывающих объект типа «Призма».

Для формирования оболочки полигонального тела воспользуемся классом MbMesh геометрического ядра C3D. Для визуализации был использован модуль геометрического ядра C3D Vision. На рис. 4, 5 представлен результат построения объекта «Призма» с различными параметрами.



Рис. 4. 7-угольная призма с углом наклона 75° , построенная по принципам полигонального моделирования

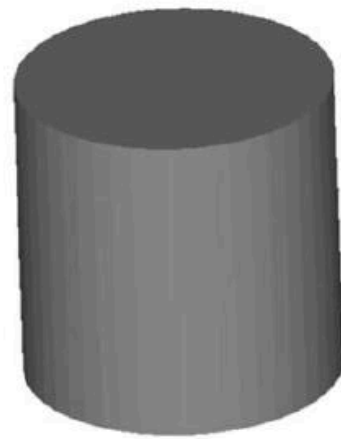


Рис. 5. 49-угольная призма с углом наклона 90° , построенная по принципам полигонального моделирования

Заключение. Приведены результаты работы алгоритма построения объекта класса «Призма» с использованием принципов полигонального моделирования на основе инструментов геометрического ядра C3D. Были рассмотрены способы построения полигональных тел, а также методы, реализованные в модуле геометрического ядра C3D Modeler.

Литература

- [1] Голованов Н.Н. *Геометрическое моделирование*. Москва, ИНФРА-М, 2016, 400 с.
- [2] Голованов Н.Н., Ильютко Д.П., Носовский Г.В., Фоменко А.Т. *Компьютерная геометрия*. Москва, Академия, 2006, 512 с.

- [3] Фокс А., Пратт М. *Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве*. Москва, Мир, 1982, 304 с.
- [4] Препарата Ф., Шеймос М. *Вычислительная геометрия. Введение*. Москва, Мир, 1989, 478 с.
- [5] Болодурина И.П., Анциферова Л.М., Парфенов Д.И., Гришина Л.С. *Вычислительная математика и информационные технологии*. Оренбург, ОГУ, 2021, 132 с.
- [6] Скворцов А.В., Мирза Н.С. *Алгоритмы построения и анализа триангуляции*. Томск, Изд-во Томского университета, 2006, 168 с.
- [7] *Геометрическое ядро-C3D Modeler*. URL: <https://c3dlabs.com/ru/products/c3d-toolkit/modeler> (дата обращения 29.05.2025).
- [8] C3D Toolkit: *построение тел*. URL: https://c3d.ascon.ru/doc/math/group___solid___modeling.html (accessed 29.05.2025).

Construction of a parameterized prism model using the principles of polygonal modeling based on the geometric core of C3D

Yurchenko Aleksandr Alexeevich

Burkov Paul Viktorovich (*scientific advisor*)

BMSTU, Moscow, Russia

The process of constructing a geometric model in the context of polygonal modeling was demonstrated. A polygonal object is a set of triangular and quadrangular plates, polylines, and individual points. Working with objects consisting of complex surfaces requires complex calculations. Polygonal modeling can help speed up these processes. Using the example of a parameterized prism model, all the stages of constructing its polygonal representation are shown.

Keywords: geometric modeling, polygonal modeling, geometric core C3D, triangulation, parameterization