

УДК 62-233

Применение генетических алгоритмов при решении задачи приближенного профилирования эвольвентных зубьев

Цекулин Глеб Михайлович

Подчасов Евгений Олегович (научный руководитель)

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Описан приближенный способ построения профиля зубчатого колеса. В качестве функции, аппроксимирующей эвольвентный профиль на заданном участке, используется дуга окружности. Поставленная задача решается с использованием генетического алгоритма оптимизация в математическом пакете MATLAB. Целевая функция для данной задачи задана с использованием метода наименьших квадратов. Дополнительно добавлены ограничения на отсутствие подрезания и заострения зубчатого колеса и оценено их влияние на конечный результат.

Ключевые слова: генетический алгоритм, эвольвента, заострение, подрезание, MATLAB

Введение. Зубчатое колесо является неотъемлемой частью практически любого современного механизма или устройства. Их широкое использование обусловлено высокой надежностью и точностью [1]. Зубчатая передача — механизм, который при помощи вращения двух зубчатых колес передает мощность. В настоящее время существует большое количество различных зубчатых передач, отличающихся между собой геометрией зубцов и схемой расположения валовых осей. В частности, зубчатые колеса классифицирует по форме профиля зуба.

Наибольшее распространение в современном машиностроении получили эвольвентные зубчатые передачи. Они отличаются компактностью, высоким КПД, постоянством передаточного отношения, надежностью работы, высокой долговечностью и простотой обслуживания. Теория эвольвентного зубчатого зацепления была построена на идеях унификации технологий производства [2] и стандартизации. Стремительное развитие современных технологий в области машиностроения позволило применить новые методы к построению профиля зубчатых колес в целях повышения заданных геометрических показателей зубчатого зацепления. Одним из таких подходов является использование современных методов оптимизации, для поиска оптимальной геометрии профиля зубчатого колеса.

В рамках данной работы ставится задача о применение генетических алгоритмов для решения задачи приближенного профилирования эвольвентных зубьев. Для разработки алгоритма по поиску оптимального решения используется математический пакет MATLAB с возможностью гибкой настройки различных алгоритмов оптимизации.

Для успешного выполнения поставленной задачи необходимо выполнить следующие цели:

Формулировка задачи оптимизации без учета ограничений. На первом этапе задача оптимизации формулируется следующим образом:

$$\min f(X) = \sum_{i=1}^N [(x - x_{teor.i})^2 + (y - y_{teor.i})^2], \#(3)$$

где $f(X)$ — целевая функция, построенная на основе метода наименьших квадратов; X — вектор проектных переменных размерностью 1×3 . Здесь $X(1;1) = x_0, X(1;2) = y_0, X(1;3) = r$; $x = x_0 + \sqrt{r^2 - (y - y_0)^2}$ и $y = y_0 - \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}$ — координаты точек дуги окружности, лежащей в IV четверти.

В качестве алгоритма оптимизации был выбран генетический алгоритм. Этот выбор обоснован простотой реализации в математическом пакете MATLAB, возможностью задания нелинейных ограничений, а также независимости от начального приближения. Некоторые примеры использования генетического алгоритма в задачах проектирования эвольвенты зубчатого колеса приведены в работах [4, 5].

Для работы алгоритма размерности векторов координат участка эвольвенты и дуги окружности должны совпадать. Для увеличения точности решения по поиску минимума целевой функции (3), шаг разбиения для дуги окружности и эвольвенты должен совпадать. В случае разбиения дуги окружности на $N - 1$ равных участков, согласно формуле (4), для одинаковых центральных углов окружности β_j , длины соответствующих $L_{circ.j}$ дуг будут так же равны:

$$L_{circ.j} = \frac{\pi r \beta_j}{180^\circ}, j = 1 \dots N - 1. \#(4)$$

Поэтому для окружности достаточно задаться равномерным разбиением центрального угла β_j . Для эвольвенты задача усложняется тем, что для одного и того же значения центрального угла длина соответствующей дуги будет отличаться:

$$L_{inv.j} = \frac{1}{2} r_b (\alpha_{j+1}^2 - \alpha_j^2), j = 1 \dots N - 1. \#(5)$$

Тогда, для равномерного разбиения эвольвенты на $N - 1$ равных участков необходимо разбивать всю длину кривой, которая вычисляется как

$$L_{inv.} = \frac{1}{2} r_b (\alpha_N^2 - \alpha_1^2) = \frac{1}{2} r_b \alpha_N^2.$$

Результаты работы алгоритма приведены на рис. 2.

Координаты центра окружности, ее радиус, а также значение целевой функции представлены в табл. 1.

Таблица 1

Результаты работы алгоритма без учета ограничений:
значения проектных переменных и целевой функции

Параметр	Значение
x_0	1,91
y_0	8,56
r	9,13
$f(x_0, y_0, r)$	0,056

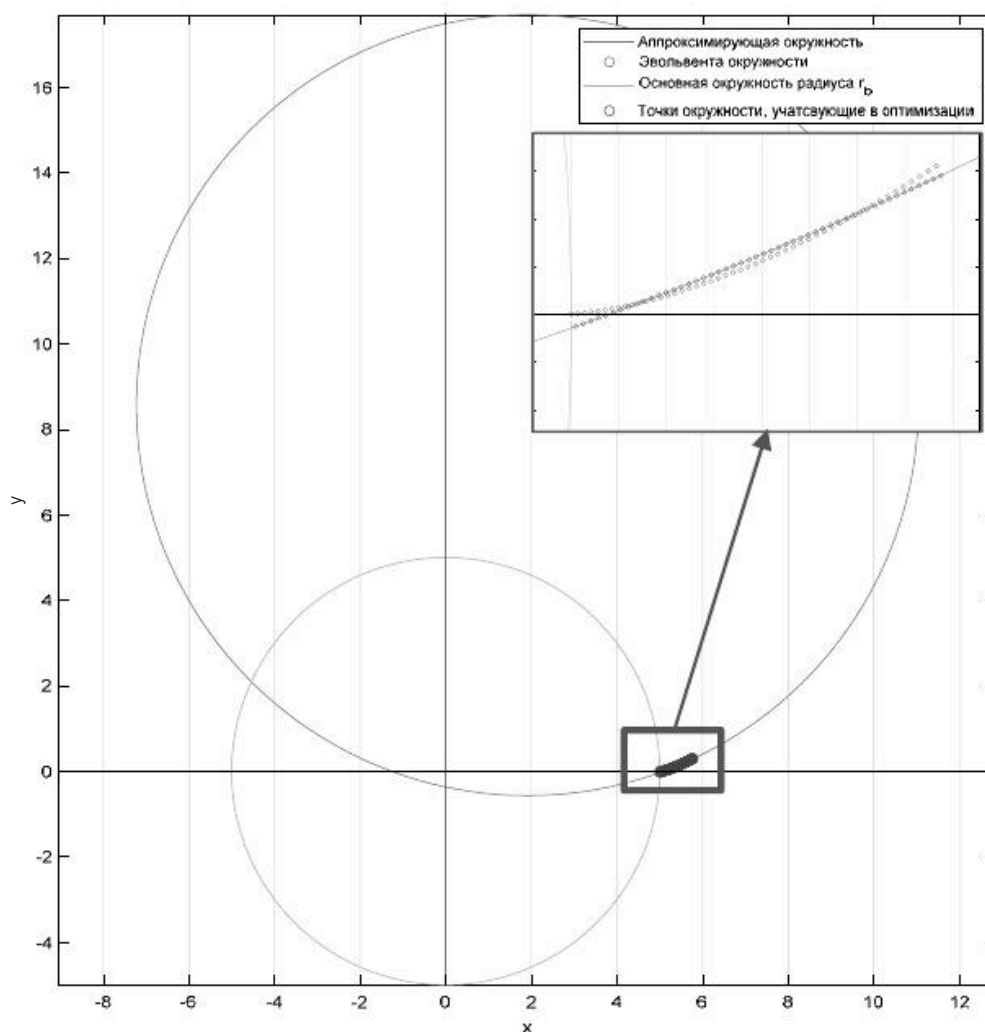


Рис. 2. Результаты работы алгоритма без учета ограничений:
вид аппроксимирующей окружности

Формулировка задачи оптимизации с учетом ограничений. Необходимо реализовать ограничение, связанное с отсутствием подрезания зуба. Это ограничение напрямую влияет на качество зубчатой передачи. При подрезании зуба уменьшается его прочность и увеличивается износ рабочей части. Также необходимо исключить заострение зуба, которое негативно влияет на зубчатое зацепление.

В рамках данной работы были дополнительно проанализированы три расчетных случая.

Учитывается только условие отсутствия подрезания ножки зуба. Это условие означает, что точка дуги окружности с координатами (x_1, y_1) должна совпадать с соответствующей точкой на эвольвенте окружности с координатами $(x_{teor.1}, y_{teor.1})$ или, что равносильно, должно выполняться условие

$$\sqrt{(x_{teor.1} - x_o)^2 + (y_{teor.1} - y_o)^2} - r^2 = 0.$$

Результаты работы алгоритма приведены на рис. 3.

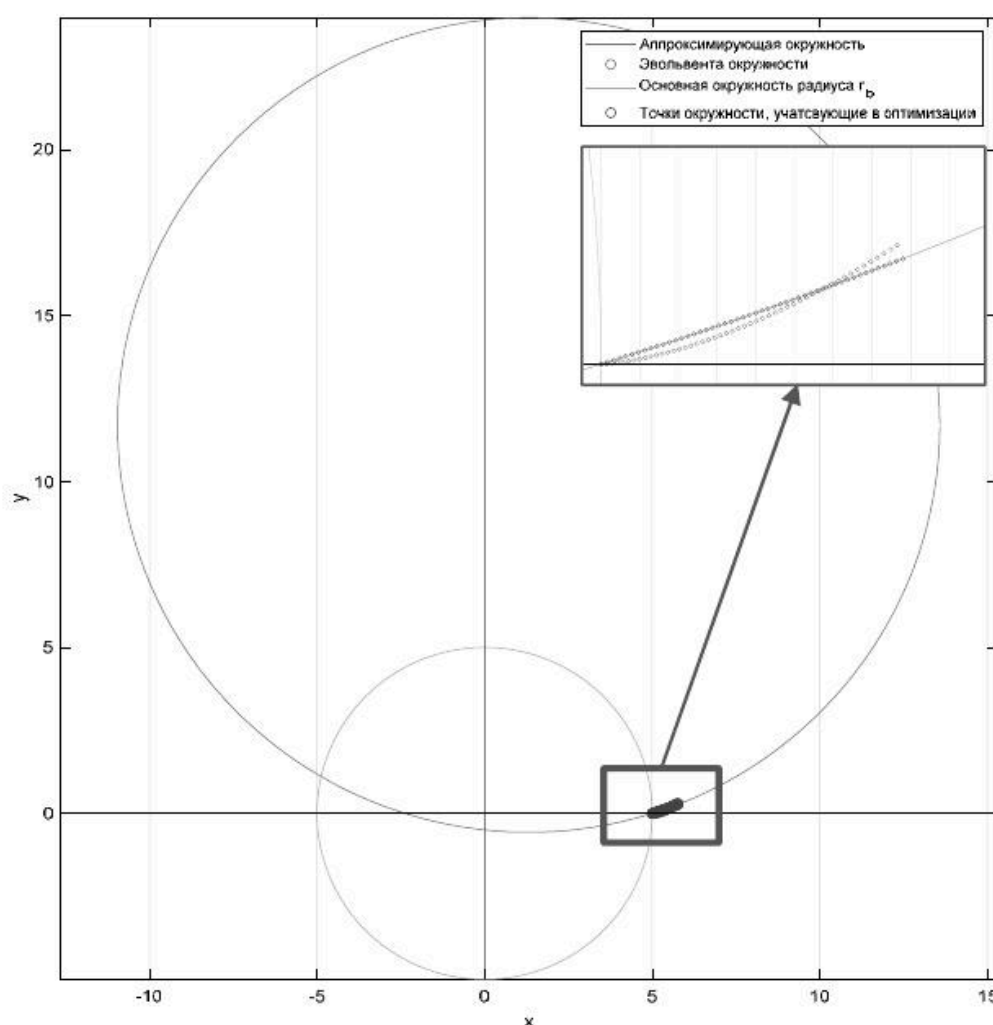


Рис. 3. Результаты работы алгоритма с условием отсутствия подрезания: вид аппроксимирующей окружности

Координаты центра окружности, ее радиус, а также значение целевой функции представлены в табл. 2.

Учитывается только условие отсутствия заострения вершины зуба. Это условие схоже с предыдущим и означает, что точка дуги окружности с координатами (x_N, y_N) должна совпадать с соответствующей точкой

на эвольвенте окружности с координатами $(x_{teor.N}, y_{teor.N})$ или, что равносильно, должно выполняться условие

$$\sqrt{(x_{teor.N} - x_o)^2 + (y_{teor.N} - y_o)^2} - r^2 = 0.$$

Результаты работы алгоритма приведены на рис. 4.

Таблица 2

**Результаты работы алгоритма с условием отсутствия подрезания:
значения проектных переменных и целевой функции**

Параметр	Значение
x_0	1,32
y_0	11,70
r	12,27
$f(x_0, y_0, r)$	0,203

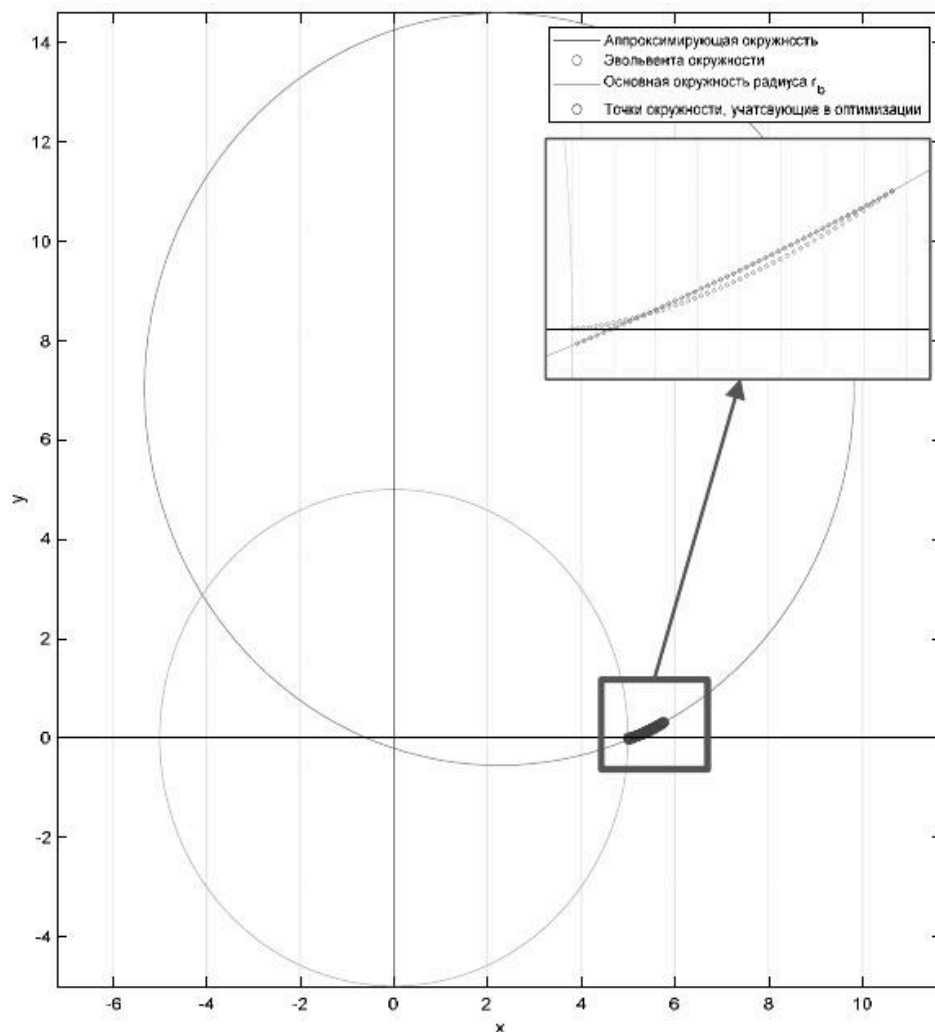


Рис. 4. Результаты работы алгоритма с условием отсутствия заострения:
вид аппроксимирующей окружности

Координаты центра окружности, ее радиус, а также значение целевой функции представлены в табл. 3.

Таблица 3

**Результаты работы алгоритма с условием отсутствия заострения:
значения проектных переменных и целевой функции**

Параметр	Значение
x_0	2,25
y_0	7,02
r	7,57
$f(x_0, y_0, r)$	0,084

Учитываются оба ограничения. Данный расчетный случай представляет собой комбинацию двух предыдущих. Результаты работы алгоритма приведены на рис. 5. Координаты центра окружности, ее радиус, а также значение целевой функции представлены в табл. 4.

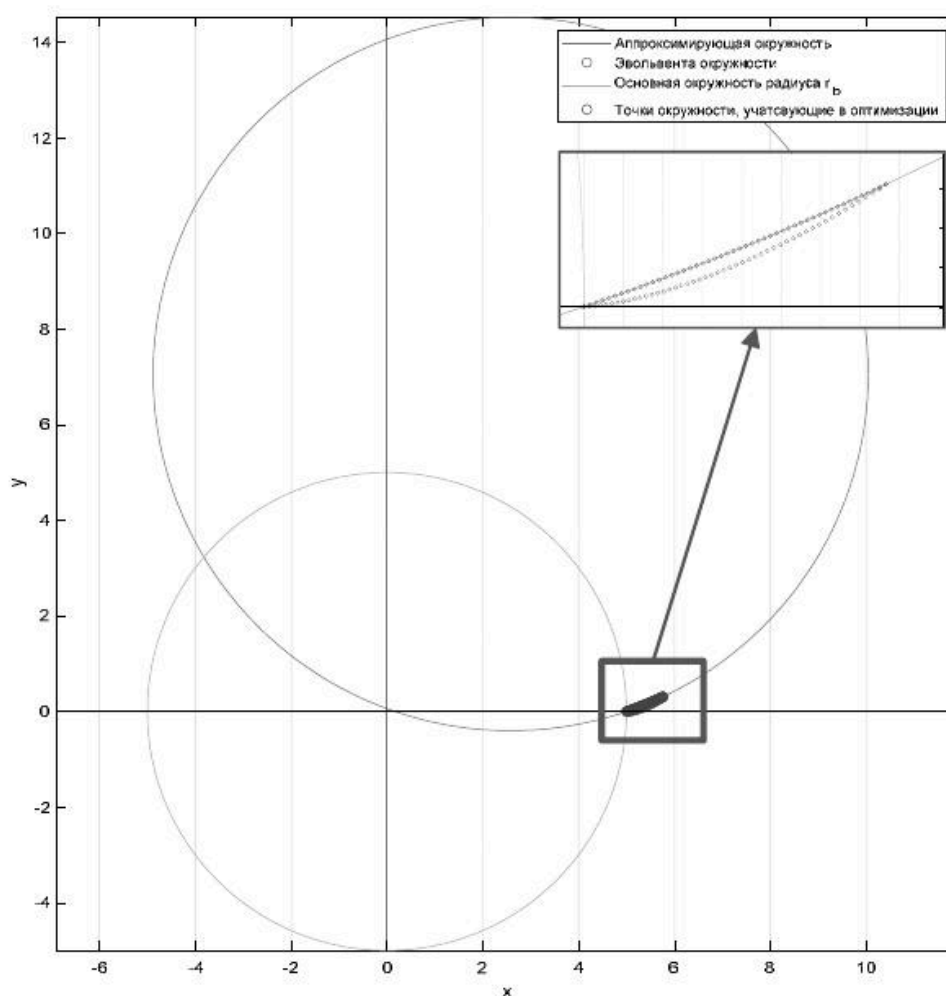


Рис. 5. Результаты работы алгоритма с учетом обоих ограничений:
вид аппроксимирующей окружности

Таблица 4

**Результаты работы алгоритма с учетом обоих ограничений:
значения проектных переменных и целевой функции**

Параметр	Значение
x_0	2,58
y_0	7,06
r	7,46
$f(x_0, y_0, r)$	0,304

Анализируя результаты работы алгоритма, можно сделать вывод, что программный код успешно справляется с поставленной задачей. Динамика изменения целевой функции $f(x_0, y_0, r)$ по сравнению с первым расчетным случаем представлена в таблице 5.

Таблица 3

Анализ изменения целевой функции

Расчетный случай	Значение $f(x_0, y_0, r)$
Отсутствие ограничения	0,056
Отсутствие подрезания	0,203
Отсутствие заострения	0,084
Учет обоих ограничений	0,304

Заключение. В результате проделанной работы удалось выполнить основную задачу — провести оптимизацию поверхности зубчатого колеса с учетом накладываемых на нее ограничений. Из результатов работы алгоритма можно сделать вывод, что введение ограничения по подрезанию ножки зуба оказало большее влияние на точность получаемого решения, нежели ограничение по заострению. Тем не менее, текущая точность вычислений является более чем достаточной для работы с этим алгоритмом. В дальнейшем предполагается добавление дополнительных ограничений и улучшение точности решения за счет модификации работы алгоритма.

Литература

- [1] Фролов К.В., Попов С.А., Мусатов А.К. *Теория механизмов и механика машин*. Москва, Высшая школа, 1987, 496 с.
- [2] Вулгаков Э.Б. *Теория эвольвентных зубчатых передач*. Москва, Машиностроение, 1995, 320 с.
- [3] Тимофеев Г.А. *Теория механизмов и машин: учебник и практикум для прикладного бакалавриата*. Москва, Издательство Юрайт, 2014.

- [4] Spitas V., Spitas C. Optimizing involute gear design for maximum bending strength and equivalent pitting resistance, 2007.
- [5] Pillai K.A., Ray A.G., Kaul S. Design optimisation of spur gear using genetic algorithm. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. IOP Publishing, 2021. vol. 1123. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/1123/1/012011>

Application of genetic algorithms in solving the problem of approximate profiling of involute gear teeth

Tsekulin Gleb Mikhailovich

Podchasov Eugene Olegovich (*scientific advisor*)

BMSTU, Moscow, Russia

The paper describes an approximate method for constructing a gear profile. The arc of a circle is used as a function approximating the involute profile in a given area. The problem is solved using the genetic optimization algorithm in the MATLAB mathematical package. The objective function for this problem is set using the least squares method. Additionally, restrictions on the absence of clipping and sharpening of the gear wheel have been added and their impact on the final result has been assessed.

Keywords: genetic algorithm, involute, gear tooth pointing, gear tooth undercutting, MATLAB