

УДК 519.6

Сравнительный анализ методов глобальной оптимизации gravitational search algorithm и его модификации

Цокуренко Семен Владимирович

Карпенко Анатолий Павлович (научный руководитель)

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Проведен систематический сравнительный анализ базового Gravitational Search Algorithm (GSA) и его модификации Manifold-guided GSA (MGGSA) на стандартном наборе многоэкстремальных тестовых функций (sphere, Rosenbrock, Rastrigin, Ackley). Формализованы математические модели обоих алгоритмов. С помощью реализованного на C++ выполнены масштабные эксперименты по метрикам точности (абсолютная ошибка), средней итерационной и процессорной затратам (CPU-time). Результаты демонстрируют, что MGGSA обеспечивает существенно более низкую среднюю ошибку при росте размерности за счет адаптивного сокращения эффективной размерности пространства, однако требует большего числа итераций и увеличенного CPU-time (в 3–5 раз медленнее при малых d и до десятков секунд при больших d). Для практических применений предложено гибридное использование: предварительный прогон GSA для быстрой оценки и последующий запуск MGGSA для высокоточного решения.

Ключевые слова: gravitational search algorithm, manifold-guided GSA, многомерные тестовые функции, абсолютная ошибка, время сходимости, CPU-time

Введение. В инженерной практике и прикладной математике нередко приходится искать глобальный минимум функции

$$f: R^d \rightarrow R, f(X^*) = \min_{x \in \Omega} f(X),$$

где $\Omega \subseteq R^d$ — допустимое пространство поиска; X^* — искомое глобально оптимальное решение.

Классические градиентные методы показывают высокую скорость сходимости лишь для выпуклых и гладких задач, но при наличии множества экстремумов, шумов и ограничений часто «застревают» в локальных минимумах. Поэтому в последние десятилетия получили развитие стохастические эволюционные алгоритмы (PSO, DE, ABC и др.) [1–3].

Особый интерес представляет Gravitational Search Algorithm (GSA), в котором агенты-«частицы» перемещаются под действием сил, пропорциональных качеству решений. В задачах высокой размерности базовая версия GSA склонна к преждевременной сходимости. Для ее преодоления предложен Manifold-guided GSA (MGGSA), в котором перемещение агентов ограничено адаптивным субпространством $\mathcal{M} \subseteq R^d$, аппроксимирующим локальную геометрию уровня $f(x) = \text{const}$.

Цель работы — выполнить сравнительный анализ алгоритмов GSA и MGSA применительно к стандартному набору тестовых функций глобальной оптимизации с использованием следующих критериев:

- абсолютная ошибка (точность решения);
- среднее время сходимости;
- среднее затраченное процессорное время (CPU-time).

Исходные данные: популяция: N агентов; параметры GSA: G_0, α — начальная гравитационная константа и ее скорость затухания; параметры MGSA: порядок локального многообразия $r \leq d_k$ и алгоритм построения проекции $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$.

Алгоритм GSA. GSA моделирует популяцию вычислительных «тел» как систему небесных объектов, притягивающихся друг к другу по закону Ньютона. Каждое «тело-агент» одновременно играет две роли:

- исследователь (probe) — тело перемещается в пространстве поиска, «зондируя» поверхность целевой функции;
- источник гравитации — чем ниже значение функции $f(X)$, тем массивнее агент и тем сильнее он притягивает соседей.

Наблюдаемая эволюция популяции напоминает самоорганизацию звездного скопления: худшие агенты быстро попадают под влияние «тяжелых» лидеров, постепенно приближая траекторию популяции к глобально наиболее перспективным регионам [4–6].

Пусть $X_i(t) \in R^d$ — позиция i — го агента на итерации t ; его притягивает агент j с силой

$$F_{ij}^{(k)}(t) = G(t) \frac{M_i(t) M_j(t)}{\|X_j(t) - X_i(t)\| + \varepsilon} \left(X_j^{(k)}(t) - X_i^{(k)}(t) \right), \quad (1)$$

где $k = 1, \dots, d$ — индекс координаты; $G(t)$ — гравитационная константа; $M_i(t), M_j(t)$ — массы агентов; ε — малое число, предотвращающее деление на ноль; $\|X_j(t) - X_i(t)\|$ — евклидова норма.

Алгоритма MGSA. В то время как классический GSA эффективен для умеренных размерностей d , при переходе к задачам высокой размерности он сталкивается с преждевременной сходимостью: агенты рано формируют плотное скопление, теряя диверсификацию поиска. Manifold-guided GSA (MGSA) устраняет этот недостаток, вводя адаптивное подпространство $\mathcal{M}(t)$, аппроксимирующее локальные уровни целевой функции и направляющее движение агентов вдоль наиболее информативных направлений.

Пусть в окрестности точки $C(t)$ существуют r ортонормированных собственных векторов $U_1, \dots, U_r$ Гессiana $\nabla^2 f(C(t))$, соответствующих наименьшим собственным значениям. Их линейная оболочка формирует «направляющее» многообразие

$$\mathcal{M}(t) = \{C(t) + \sum_{j=1}^r \alpha_j U_j \mid \alpha_j \in R\} \subseteq R^d, \quad (2)$$

на которое агенты будут проецироваться. Здесь a_j — скалярные коэффициенты. Выбор $r < d$ уменьшает эффективную размерность, сохраняя основные градиентные направления.

Для произвольного вектора $z \in R^d$ введем ортогональную проекцию

$$\mathcal{P}_{\mathcal{M}(t)}(z) = C(t) + \sum_{j=1}^r \langle (z - C(t)), U_j \rangle U_j.$$

Каждую парную силу (1) сначала вычисляем в полном пространстве, затем проецируем на многообразие:

$$\widehat{F}_{ij}(t) = \mathcal{P}_{\mathcal{M}(t)}(F_{ij}(t)).$$

Суммарная сила $\widehat{F}_i(t) = \sum_j r_j \widehat{F}_{ij}(t)$ приводит к ускорению

$$a_i(t) = \frac{\widehat{F}_i(t)}{M_i(t)}.$$

Обновляем скорость и позицию, но добавочно корректируем ортогональной демпфирующей компонентой, гасящей отклонение от $\mathcal{M}(t)$ [6, 7] (2):

$$X_i(t+1) = \mathcal{P}_{\mathcal{M}(t)}(X_i(t) + v_i(t+1)).$$

Центр $C(t)$ выбираем как центроид лучших $K \leq N$ агентов; векторы U_j — первые r векторы матрицы смещений этих агентов. Проекцию пересчитываем каждые Δt итераций, обеспечивая подстройку к меняющейся топологии f .

Анализ эффективности алгоритмов. Для сравнительного анализа эффективности базового алгоритма гравитационного поиска (GSA) и его модификации с многообразным направлением (MGSA) проведена серия вычислительных экспериментов на стандартном наборе многоэкстремальных функций оптимизации: сферическая функция (sphere); функция Розенброка (rosenbrock); функция Растргина (rastrigin); функция Экли (ackley) [8, 9].

Параметры эксперимента:

- размерности пространства поиска: $d = 2, \dots, 10, 20 \dots 100$;
- число агентов: $N=10, 20, \dots, 100$;
- максимальное количество итераций $T_{max} \approx 500000$;
- каждый запуск алгоритма повторялся $S = 50000$ раз с разными начальными условиями для повышения статистической достоверности результатов.

Для количественного анализа использовались следующие критерии:

- абсолютная ошибка (точность решения)

$$\xi = |f(\widetilde{X}^*) - f_{min}|,$$

где f_{min} известное значение глобального минимума; $f(\widetilde{X}^*)$ — лучшее решение, найденное алгоритмом;

- среднее время сходимости

$$T_{avg} = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S T_s,$$

где T_s — число итераций до достижения заданного порога точности на s -м запуске;

– среднее затраченное процессорное время (CPU-time)

$$CPU_{avg} = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S CPU_s, \quad (3)$$

где CPU_s — процессорное время s -го запуска.

На графиках (рис. 1) изображена зависимость средней абсолютной ошибки от размерности d для классического GSA и его модификации MGGSA (логарифмическая шкала по оси ординат) для четырех тестовых функций.

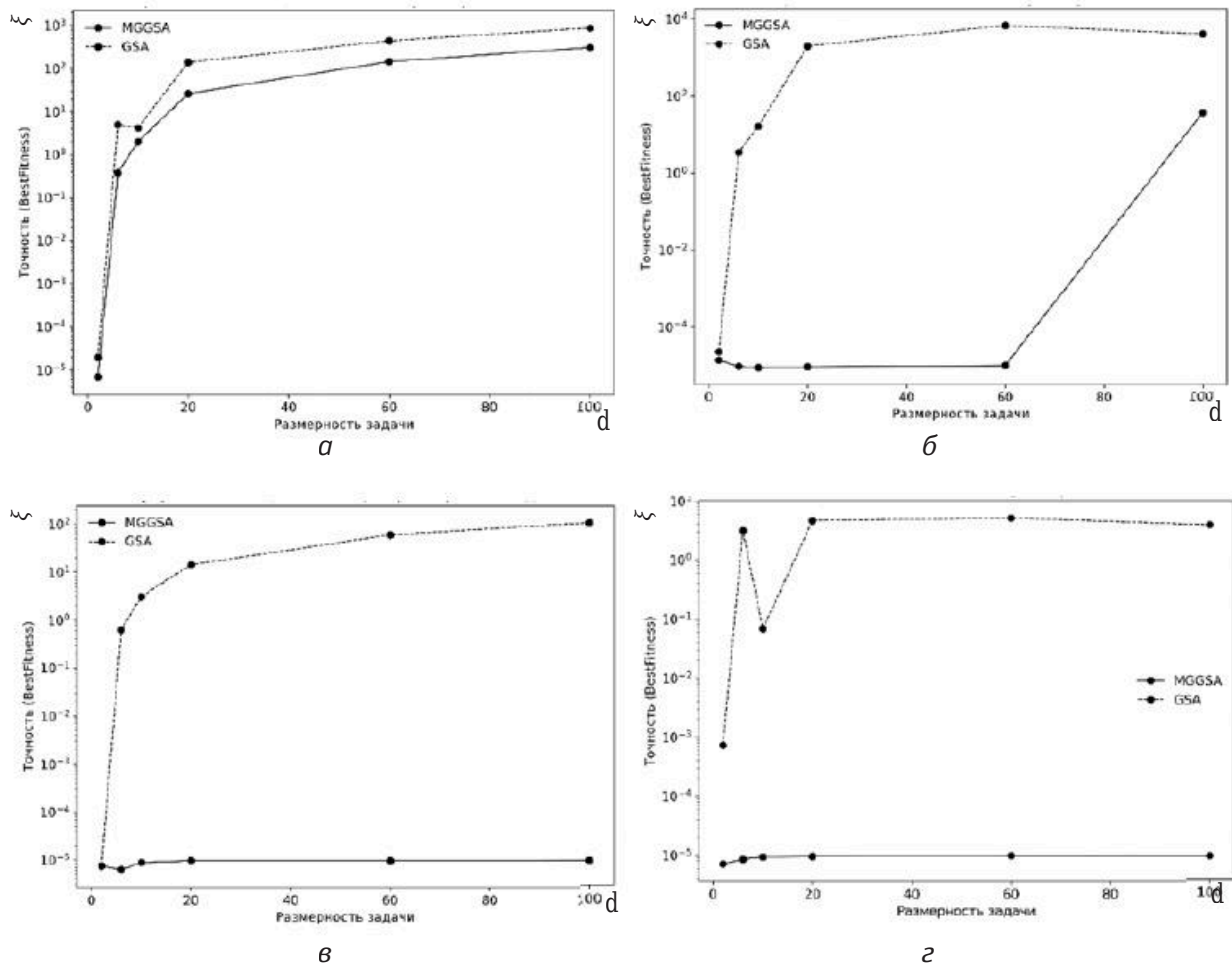


Рис. 1. Зависимость средней абсолютной ошибки от размерности:

а — функция Растригина; б — функция Розенброка; в — функция сфера; з — функция Экли

Для выпуклых и немногомодальных функций (сфера, Экли) выигрыш от использования проекции на многообразие резко растет с ростом d на несколько порядков, тогда как в мультимодальных (Растригин) и сильно нелинейных (Розенброк) задачах относительный выигрыш менее выражен и при больших размерностях может снижаться.

Базовый GSA теряет эффективность на многомерных задачах. MGGSA демонстрирует более устойчивую и высокую точность, что делает его пред-

почтительным инструментом для глобальной оптимизации в пространствах с $d \gg 10$. Флуктуации кривой MGGSA указывают на возможное переусреднение проекций в некоторых диапазонах d , что требует дополнительной настройки параметров r и Δt .

На графиках (рис. 2) изображена зависимость средней абсолютной ошибки от числа частиц N для классического GSA и его направляемой модификации MGGSA (логарифмическая шкала по оси ординат) для четырех тестовых функций.

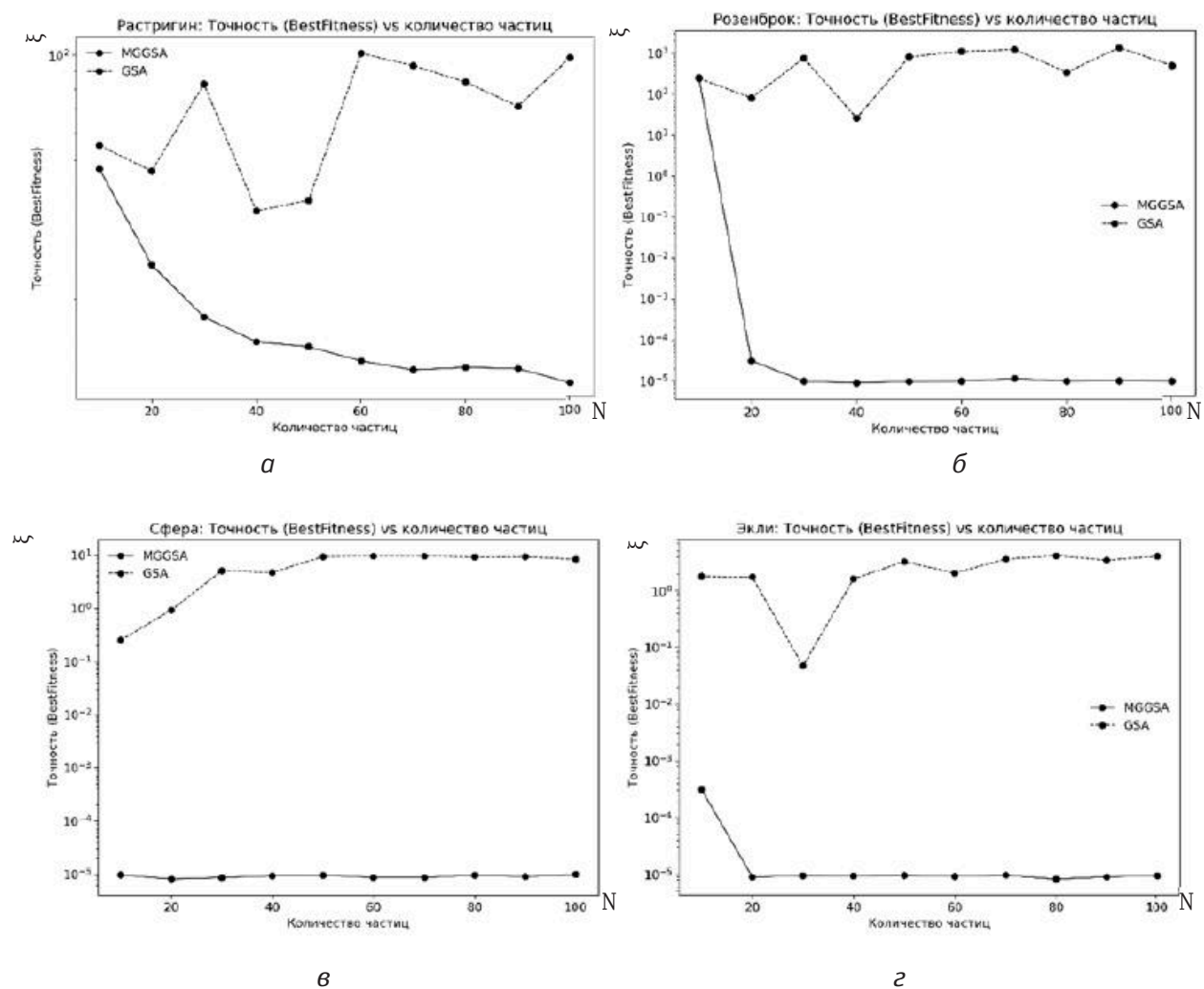


Рис. 2. Зависимость средней абсолютной ошибки от размерности:

a — функция Растригина; b — функция Розенброка; $в$ — функция сфера; $г$ — функция Экли

Применение проекции на многообразие позволяет MGGSA очень быстро достигать точности порядка 10^{-5} уже при $N \approx 20$ и сохранять этот уровень при дальнейшем увеличении числа агентов, что подчеркивает устойчивость подхода в задачах с гладким (сфера, Экли) и мультимодальным (Растринг, Розенброк) ландшафтом. Классический GSA без коррекции демонстрирует значительные флуктуации в зависимости от N , требует гораздо большего числа агентов для приближения к той же точности и часто «застывает» в ло-

кальных минимумах. Таким образом, MGGSA обеспечивает более быстрый и стабильный обход поискового пространства, снижая эффект преждевременной сходимости и повышая качество решений в глобальной оптимизации.

Рассмотрим числа итераций по функциям и алгоритмам представленном на графике, изображенном на рисунке (рис. 3).

Проекция на многообразии неизменно увеличивает число итераций по сравнению с классическим GSA — от примерно в 1,6 раза (Растрингин) до 3–4 раз (сфера и Розенброк).

На рис. 4 показано среднее процессорное время выполнения одного запуска GSA и MGGSA в зависимости от размерности d .

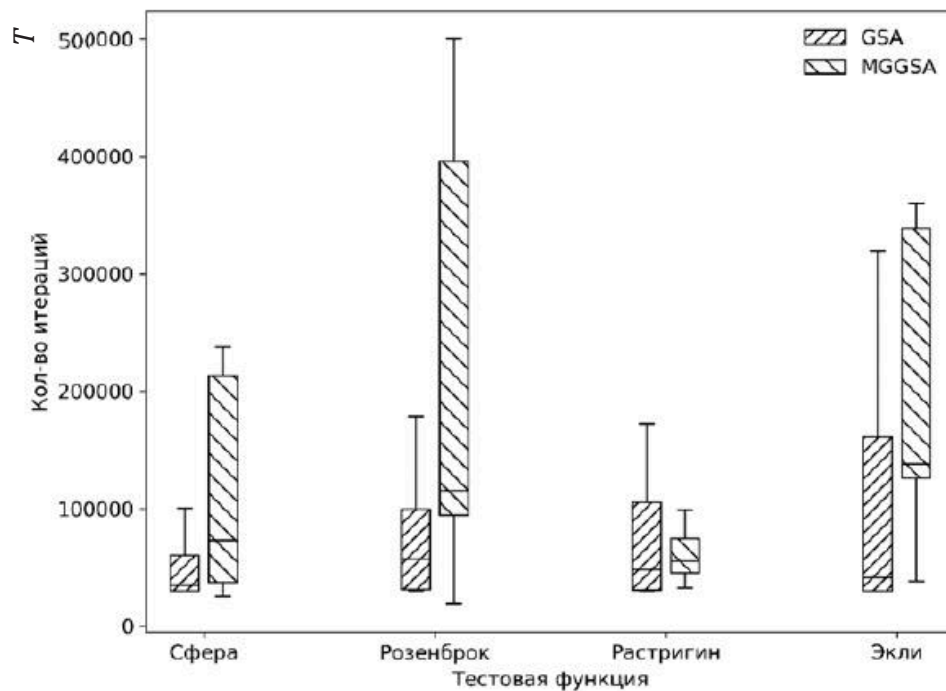


Рис. 3. Распределения числа итераций T для достижения заданного порога точности

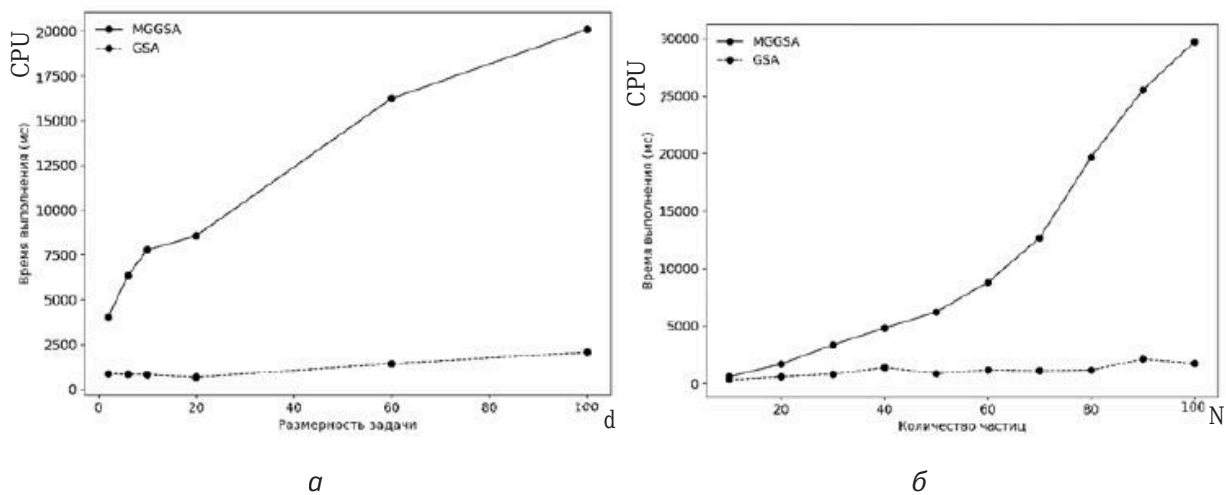


Рис. 4. Среднее CPU время:
а — от размерности d ; б — от количества агентов N

Для обоих алгоритмов наблюдается почти линейная зависимость по формуле

$$CPU_{\text{avg}}(d) \approx \beta d,$$

где эмпирические коэффициенты оцениваются как $\beta_{\text{GSA}} \approx 20$ мс, $\beta_{\text{MGSA}} \approx 200$ мс.

Заключение. Таким образом, накладные расходы проекции и работы с многообразием создают значительный вклад, растущий вместе с d . При небольших размерностях ($d < 10$) MGSA оказывается лишь в 3–5 раз медленнее, что компенсируется заметным приростом точности. Для $d \geq 50$ время работы MGSA возрастает до десятков секунд, поэтому выбор MGSA оправдан лишь при критичных требованиях по качеству. GSA сохраняет быстроту «прогона» и может служить в качестве предварительного этапа перед запуском более «тяжелой» MGSA.

Литература

- [1] Rashedi E., Nezamabadi-Pour H., Saryazdi S. GSA: A Gravitational Search Algorithm. *Information Sciences*, 2009, vol. 179, no. 13, pp. 2232–2248.
- [2] Liu A., Wang J., Zhang X. A Manifold — Guided Gravitational Search Algorithm for High-Dimensional Global Optimization Problems. *Mathematical Problems in Engineering*, 2024, art. 5806437, 15 p.
- [3] Jiang X., Li Y. A Modified Gravitational Search Algorithm for Slope Stability Analysis. *International Journal of Geotechnical Engineering*, 2024, vol. 18, no. 2, pp. 145–156.
- [4] Mirjalili S., Hashim S.Z.M., Sardroudi H.M. A Comprehensive Survey on Gravitational Search Algorithm. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2017, vol. 32, pp. 1–34.
- [5] Карпенко А.П. *Современные алгоритмы поисковой оптимизации: алгоритмы, вдохновленные природой*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014, 246 с.
- [6] Sun Y., Wang Z.. A Modified Gravitational Search Algorithm for Continuous Optimization Based on Logarithm and Gaussian Signals. *GECCO Companion*, 2014, art. no. 1453.
- [7] Zhao L., Chen H., Gao Y. Improved Gravitational Search Algorithm Based on Adaptive Strategies. *Entropy*, 2024, vol. 26, no. 12, art. 1826.
- [8] Карпенко А.П. *Современные алгоритмы поисковой оптимизации*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014, 446 с.
- [9] Карпенко А.П. Гибридные популяционные алгоритмы параметрической оптимизации проектных решений. *Информационные технологии*, 2013, № 12, с. 6–15.

Comparative analysis of global optimization methods gravitational search algorithm and its modification

Tsokurenko Semyon Vladimirovich

Karpenko Anatoly Pavlovich (*scientific advisor*)

BMSTU, Moscow, Russia

The paper presents a systematic comparative analysis of the basic Gravitational Search Algorithm (GSA) and its Manifold-guided GSA (MGGSA) modification on a standard suite of multimodal test functions (sphere, Rosenbrock, Rastrigin, Ackley). The mathematical models of both algorithms are formalized. Using a C++ implementation, extensive experiments were carried out to evaluate accuracy (absolute error), average iteration count, and CPU time. The results show that MGGSA achieves a significantly lower average error as dimensionality grows-thanks to adaptive reduction of the effective search-space dimension-but requires more iterations and greater CPU time (3–5× slower for small D and up to tens of seconds for large D). For practical use, a hybrid strategy is proposed: run the classic GSA first for a quick estimate, then launch MGGSA for a high-precision solution.

Keywords: gravitational search algorithm, manifold-guided GSA, multidimensional test functions, absolute error, convergence time, CPU time

