

М 186906

Министерство высшего и среднего специального образования СССР

НА ДОМ
НЕ ВЫДАЕТСЯ

Московское
ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени
высшее техническое училище имени Н. Э. Баумана

В. А. КНЯЗЕВА

РАСЧЕТ ОРТОТРОПНЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ДЕТАЛЕЙ

(Специальность 05.025—Динамика и прочность машин,
приборов и аппаратуры)

Диссертация написана на русском языке

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Работа выполнена в Московском ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени высшем техническом училище имени Н. Э. Баумана.

Научный руководитель —
доктор технических наук, профессор Бидерман В. Л.

Официальные оппоненты:

доктор технических наук Балабух Л. И.,
кандидат технических наук Бояршинов С. В.

Ведущее предприятие: ЦИАМ.

Автореферат разослан « » 1972 г.

Защита диссертации состоится « » 1973 г.
на заседании машин по адресу: Москва, МВТУ.

Ваши атью, просим нап

С дис еке МВТУ
им. Н. Э

Учен

к. т.

Демидов.

M 186906

В современном машиностроении наряду с изотропными материалами широко используются анизотропные материалы. Применение новых материалов заставляет искать новые методы расчёта. Для определения напряжений и деформаций в анизотропном теле необходимо применять уравнения теории упругости, учитывающие различие свойств материала в разных направлениях.

Основной задачей данной работы являлась разработка метода расчёта ортотропного бруса большой кривизны прямоугольного поперечного сечения, находящегося под действием сил, перпендикулярных его плоскости. Эта задача возникает в связи с расчётом на прочность и жёсткость деталей, имеющих форму кривого бруса прямоугольного поперечного сечения. К таким деталям относятся замкнутые опорные кольца электротрансформаторов изготовленных либо из слоистого бумагопластика, либо из стеклопластика и нагруженные силами перпендикулярными их плоскости. К аналогичной расчётной схеме приводятся анизотропные кольцевые и прорезные пружины. Вопросу изготовления пружин из анизотропных пластмасс придаётся важное значение. Это объясняется тем, что пластики, как материалы для пружин, имеют ряд преимуществ. Они немагнитны, имеют низкую электро- и теплопроводность и высокую коррозионную стойкость.

В настоящей работе получены основные расчётные зависимости общей теории ортотропного бруса; разработан метод расчёта ортотропных кольцевых замкнутых деталей при антиплоском нагружении и дан метод расчёта винтовых цилиндрических пружин прямоугольного поперечного сечения, когда угол подъёма витков мал. Рассмотрена также методика экспериментального исследования упругих свойств ортотропного материала и приведены результаты эксперимента. Результаты расчётов на прочность замкнутых колец по разработанной теории сопоставлены с результатами, полученными по формулам теории ортотропного прямого бруса, и с результатами экспериментального исследования напряжений.

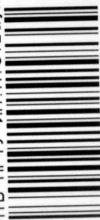
Диссертация содержит введение, шесть глав, выводы и список литературы.

В первой главе сформулирована задача и дан обзор литературы по вопросу исследования напряжённого состояния в криволинейном бруске прямоугольного сечения, изготовленном из изотропного и ортотропного материала.

Вторая глава посвящена выводу основных расчётных зависи-

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ

НТБ МГТУ им. Н. И. Баумана



1186906

Расчет ортоп
Князева В. А.

мостей для ортотропного бруса большой кривизны и для кольцевых ортотропных деталей, находящихся под действием сил, перпендикулярных их плоскости. Кольцевые детали из анизотропных пластиков большей частью изготавливаются методами намотки. В этом случае структура слоистого материала получается симметричной, причём, радиальная плоскость и две перпендикулярные к ней плоскости, являются плоскостями симметрии. При изучении распределения напряжений и деформаций в упругом ортотропном теле, материал считается сплошным и подчиняющимся закону Гука. При решении задачи использована система осей координат x, z, t (рис. I)

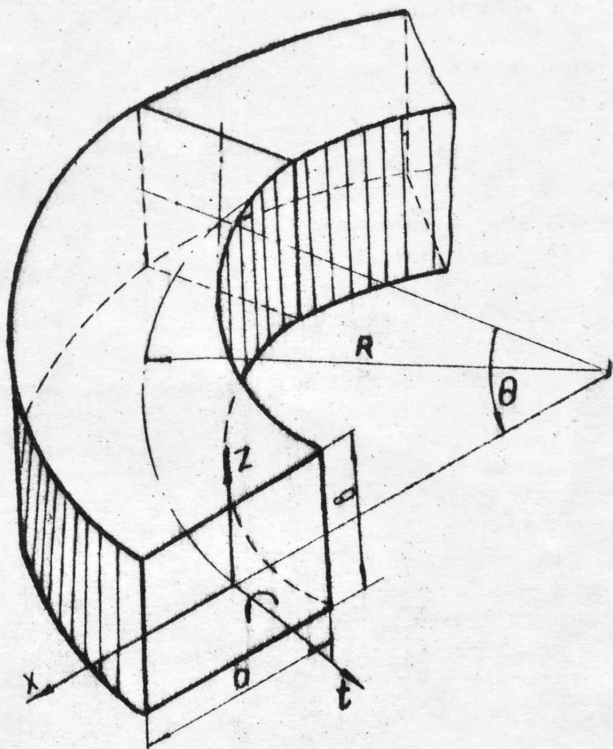


рис. I

Компоненты смещений произвольной точки бруса в направлении осей x, z, t обозначены соответственно через ρ, w, u . Для решения задачи был использован приближённый вариационный метод, поскольку решение точным методом теории упругости связано с большими трудностями. Решение основано на следующих кинематических гипотезах:

1. деформации в плоскости поперечного сечения стержня считаются пренебрежимо малыми; перемещения точек сечения складываются из перемещения всего сечения как жёсткого целого и перемещений за счёт деформации сечения в направлении перпендикулярном его плоскости;
2. перемещение сечения характеризуется смещением $w_0(\theta)$ его центра по оси z и углами поворота: $f(\theta)$ вокруг оси x , $\psi(\theta)$ вокруг оси z ;
3. принимается, что деформация сечения пропорциональна произведению двух функций $V(\theta)\psi(x,z)$, из которых первая характеризует интенсивность деформации по углу θ , а вторая определяет форму деформации поперечного сечения. При $R \rightarrow \infty$ функция $\psi(x,z)$ должна стремиться к функции деформации поперечного сечения прямого прямоугольного бруса. Кроме того, нормальные напряжения стеснённого кручения, пропорциональные производной от деформации по углу θ должны быть самоуравновешенными. Этому требованию удовлетворяет функция $\psi = \psi_0(1 + \frac{x^2}{R^2})$. Наряду с кинематическими гипотезами, используются допущения о малости напряжений $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$ по сравнению с напряжениями $\sigma_t, \tau_{tx}, \tau_{tz}$.

На основании принятых гипотез, получены следующие выражения для перемещений:

$$\rho = \psi(\theta) \cdot z$$

$$w = w_0(\theta) - \psi(\theta)x$$

$$u = \frac{V(\theta)}{R} \psi(x,z) + f(\theta)z$$

Функции $f(\theta), \psi(\theta), w_0(\theta), V(\theta)$ определяются на основе вариационного принципа Лагранжа, согласно которому полная энергия системы

$$\Pi = \int_{\theta_1}^{\theta_2} F d\theta + U_2$$

(U_2 - потенциал поверхностных сил, приложенных в краевых сечениях бруса - рис. 2) должна быть минимальной.

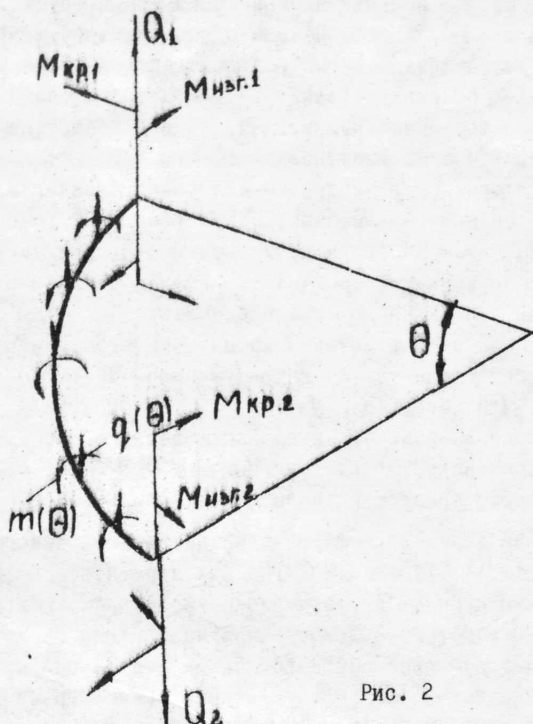


Рис. 2

Для того, чтобы это условие выполнялось, подынтегральная функция должна удовлетворять уравнению Эйлера. Так как F зависит от четырёх неизвестных функций, то уравнения Эйлера приводят к системе четырёх дифференциальных уравнений.

$$\begin{aligned}
 2B_6 w_0'' + B_{10} \psi'' + B_9 f' &= -qR \\
 B_{10} w_0'' + 2B_4 \psi'' - 2B_5 \psi + B_3 v' + (B_8 - 2B_5) f' &= -mR \\
 -B_5 \psi' + 2B_1 v'' - 2B_2 v + B_3 f &= 0 \\
 -B_9 w_0' - (B_8 - 2B_5) \psi' + B_3 v + 2B_5 f'' - 2B_7 f &= 0
 \end{aligned}
 \tag{I}$$

Общее решение этих уравнений складывается из решения системы однородных уравнений и частного решения уравнений с правой частью. Останавливаемся на решении системы однородных уравнений. Это решение ищется в виде:

$$V(\theta) = A e^{\lambda \theta}; f(\theta) = A_1 e^{\lambda \theta}; \varphi(\theta) = A_2 e^{\lambda \theta}; W_0(\theta) = A_3 e^{\lambda \theta}$$

Подстановка этих функций в систему однородных дифференциальных уравнений (I) приводит к характеристическому уравнению восьмого порядка, корни которого

$$\lambda_1 = 0; \lambda_2 = 0; \lambda_3 = i; \lambda_4 = -i; \lambda_5 = i; \lambda_6 = -i; \lambda_7 = i; \lambda_8 = -i$$

где

$$i = \sqrt{\frac{B_2(B_9^2 - 4B_6B_7) + B_3^2B_6}{B_1(B_{10}^2 - 4B_4B_5)}}$$

В соответствии с этими значениями корней решение системы однородных уравнений имеет вид:

$$W_0 = C_1 + C_2 \cos \theta + C_3 \sin \theta + C_4 \theta + C_5 \theta \sin \theta + C_6 \theta \cos \theta + C_7 e^{i\theta} + C_8 e^{-i\theta}$$

$$\varphi = -C_2 \frac{\cos \theta}{R} - C_3 \frac{\sin \theta}{R} + C_5 (k_1 \sin \theta - \frac{\theta \cos \theta}{R}) + C_6 (-k_1 \cos \theta - \frac{\theta \sin \theta}{R}) + C_7 k_4 e^{i\theta} + C_8 k_4 e^{-i\theta}$$

$$f = C_2 \frac{\sin \theta}{R} - C_3 \frac{\cos \theta}{R} + C_4 \frac{2B_4B_9}{B_5^2 - 4B_2B_7} - C_5 (k_2 \cos \theta - \frac{\theta \sin \theta}{R}) - C_6 (k_2 \sin \theta + \frac{\theta \cos \theta}{R}) + C_7 k_5 e^{i\theta} - C_8 k_5 e^{-i\theta} \quad (2)$$

$$V = C_4 \frac{B_3B_9}{B_5^2 - 4B_2B_7} + C_5 k_3 \cos \theta + C_6 k_3 \sin \theta + C_7 k_6 e^{i\theta} - C_8 k_6 e^{-i\theta}$$

Постоянные $C_1 - C_8$ определяются из граничных условий на торцах. Естественные граничные условия позволяют связать силовые факторы со значениями функций $W_0(\theta)$, $\varphi(\theta)$, $V(\theta)$, $f(\theta)$ и их производных.

$$M_{изг.} = 2B_5(\psi + f')$$

$$M_{кр} = B_{10} w_0' + 2B_4 \psi' + B_8 f + B_3 V \quad (3)$$

$$Q = 2B_6 w_0' + B_{10} \psi' + B_9 f$$

$$B = 2B_1 R V'$$

Коэффициенты B_j ($j = 1, 2 \dots 10$) выражаются определёнными интегралами. Они зависят от упругих свойств материала, от отношения сторон сечения и от кривизны бруса. Формулы для вычисления B_j приведены в работе. При расчёте замкнутых колец при произвольной нагрузке заданные нагрузки и искомые функции раскладывались в ряды Фурье. При внесении рядов в дифференциальные уравнения (I) для n -ого члена ряда получается система алгебраических уравнений. Решение последней позволяет определить неизвестные коэффициенты разложения. далее определяются деформации:

$$\begin{aligned} \xi_t = & \frac{1}{R^2(1+\frac{x}{R})} \left[\psi_0(x,z) \left(\sum_n n V_n \cos n\theta - \sum_n \hat{V}_n \sin n\theta \right) \left(1 + \frac{x}{R} \right) + \right. \\ & \left. + z R \left(\sum_n n f_n \cos n\theta - \sum_n \hat{f}_n \sin n\theta + \sum_n \psi_n \cos n\theta + \sum_n \hat{\psi}_n \sin n\theta \right) \right] \\ \chi_{tz} = & \frac{(1+\frac{x}{R})}{R} \frac{d\psi_0(x,z)}{dz} \left(\sum_n V_n \sin n\theta + \sum_n \hat{V}_n \cos n\theta \right) + \sum_n f_n \sin n\theta + \\ & + \sum_n \hat{f}_n \cos n\theta + \frac{1}{R(1+\frac{x}{R})} \left[\sum_n n W_{on} \sin n\theta + \sum_n \hat{W}_{on} \cos n\theta + \right. \\ & \left. + x \left(\sum_n n \psi_n \sin n\theta - \sum_n \hat{\psi}_n \cos n\theta \right) \right] \quad (4) \\ \chi_{tx} = & - \frac{z}{R(1+\frac{x}{R})} \left[\left(\sum_n n \psi_n \sin n\theta - \sum_n \hat{\psi}_n \cos n\theta \right) + \left(\sum_n f_n \sin n\theta + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_n \hat{f}_n \cos n\theta \right) \right] + \frac{1}{R} \left(1 + \frac{x}{R} \right) \frac{d\psi_0(x,z)}{dx} \left(\sum_n V_n \sin n\theta + \sum_n \hat{V}_n \cos n\theta \right) \end{aligned}$$

и по закону Гука напряжения

$$\sigma_t = E_t \epsilon_t ; \tau_{tz} = G_{tz} \gamma_{tz} ; \tau_{tx} = G_{tx} \gamma_{tx}$$

При расчёте ортотропных цилиндрических пружин растяжения-сжатия используются выражения (2), в которых слагаемые, содержащие коэффициенты $C_1, C_2, C_3, C_5, C_6, C_7, C_8$ отсутствуют. Слагаемые, содержащие коэффициенты C_4 , соответствуют деформациям аналогичным деформациям, возникающим при растяжении-сжатии цилиндрической пружины. По перемещениям определяются деформации

$$\gamma_{tz} = C_4 \left[\frac{B_3 B_9}{B_3^2 - 4B_2 B_7} \left(1 + \frac{x}{R}\right) \frac{d\psi(x, z)}{dz} + \frac{2B_2 B_9}{B_3^2 - 4B_2 B_7} + \frac{1}{R \left(1 + \frac{x}{R}\right)} \right]$$

$$\gamma_{tx} = C_4 \frac{1}{R} \frac{B_9}{B_3^2 - 4B_2 B_7} \left[B_3 \left(1 + \frac{x}{R}\right) \frac{d\psi_0(x, z)}{dx} - 2B_6 \frac{z}{\left(1 + \frac{x}{R}\right)} \right]$$

$$\epsilon_t = 0$$

Коэффициент C_4 определяется из 2 или 3 выражения (3), после чего становится возможным по формулам закона Гука определить напряжения и представить их в общепринятом в теории пружин виде. В точке, расположенной посередине внутренней стороны сечения

$$\tau_{tz} = \kappa \tau \frac{R}{Ba^2}$$

где

$$\begin{aligned} \kappa \tau = & \frac{G_{tz}}{4} \frac{a}{R} \frac{a}{b} \frac{b^2}{[B_6 (B_3^2 - 4B_2 B_7) + B_9^2 B_2]} \times \\ & \times \left[\frac{B_3 B_9}{2} \frac{a}{R} \left(1 - \frac{a}{2R}\right) \left(1 - \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{k^2 c h \frac{k \pi a b}{2a}}\right) + \right. \\ & \left. + 2B_2 B_9 + \frac{a}{R} \frac{b}{a} \frac{1}{\left(1 - \frac{a}{2R}\right)} \frac{(B_3^2 - 4B_2 B_7)}{B} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

Глава 3 посвящена экспериментальному исследованию упругих свойств ортотропного материала.

Материал кольцевых деталей представляет собой слоистую структуру, в которой слои пропитанной полимером бумаги

чередуются со слоями полимерного связующего. Свойства материала рассмотрены в предположении, что связующее и бумага являются упругим материалом, в котором высокоэластические деформации не наблюдаются. Упругие постоянные E_x , E_z , E_t и коэффициенты поперечной деформации определялись путём испытания образцов на одноосное растяжение и сжатие с замером продольной и поперечной деформации. Для испытания на сжатие из полого цилиндра вырезались кубические образцы. Сжимающая сила попеременно прикладывалась в направлениях x , z , t ; деформации замерялись в каждом случае в трёх направлениях. Для испытаний на растяжение из полого цилиндра были вырезаны образцы по направлениям осей x , z , t . Образцы закреплялись в специальном приспособлении и подвергались растяжению; деформации измерялись в трёх направлениях. Это давало возможность определить соответствующие упругие постоянные материала. Для определения модулей сдвига G_{tz} , G_{tx} , G_{zx} из толстостенного полого цилиндра были вырезаны пластинки $100 \times 100 \times 15$ мм параллельно координатным плоскостям tox , tox , zox . Пластинки испытывались в специальном приспособлении. При приложении нагрузки в образцах возникало напряжённое состояние "чистый сдвиг". С помощью тензодатчиков измерялись линейные деформации по трём направлениям. По линейным деформациям вычислялась угловая деформация. Касательное напряжение, возникающее в пластинке, определялось по формуле:

$$\tau = \frac{P}{2a\sqrt{2}\delta}$$

где δ - толщина пластинки,
 a - длина сторон пластинки, работающей в условиях "чистого сдвига".

Значения соответствующего модуля сдвига определялось по формуле закона Гука

$$G = \frac{E}{\chi}$$

С целью проверки и уточнения значений модулей G_{tz} и G_{tx} были проведены испытания тонкостенного цилиндра на кручение, а так же кольца на концентрическое кручение. Угловые деформации определялись по линейным, замеренным по трём направлениям с помощью тензодатчиков. Касательные напряжения τ_{tz} определялись по формуле:

$$\tau_{tz} = \frac{2M}{\pi R \phi \delta}$$

где δ - толщина трубы,

D_{cp} - средний диаметр тонкостенной трубы. Испытание тонкостенной трубы проводилось в специальном приспособлении. Испытание на концентрическое кручение образца, выполненного в виде кольца, проводилось в специальном приспособлении; крутящий момент прикладывался по внутренним и наружным поверхностям. На торце кольца замерялись линейные деформации в трёх направлениях; и по ним определялась угловая деформация. Для вычисления напряжения τ_{tx} использовалась формула:

$$\tau_{tx} = \frac{M}{2\pi r^2 b}$$

где r - радиус окружности расположения тензодатчиков,
 b - ширина образца.

Полученные значения упругих постоянных сведены в таблицу.

В 4 главе приведены примеры расчётов на прочность кольцевых ортотропных деталей большой кривизны.

По изложенной во второй главе методике были определены напряжения в кольце, нагруженном осевыми сосредоточенными силами. Сосредоточенные силы раскладывались в ряды Фурье и деформации определялись по зависимостям (5). В работе рассмотрено несколько схем нагружения кольца. Одновременно проводились расчёты по формулам теории ортотропного прямого бруса, построенной без учёта сдвигов. Значения максимальных напряжений в опасных сечениях найдены в зависимости от схемы нагружения, от соотношения сторон прямоугольного сечения, от кривизн и сведены в таблицы. В числителе приводятся значения, полученные по разработанной теории, в знаменателе - по формулам прямого ортотропного бруса. Сравнение результатов показывает, что погрешность расчёта по формулам прямого бруса зависит от схемы нагружения кольца, от соотношения сторон сечения и от кривизны. Наибольшие ошибки возникают в том случае, когда кольцо нагружено часторасположенными сосредоточенными силами и когда поперечное сечение сильно отличается от квадратного. Результаты расчётов показывают, что кольца нельзя рассчитывать по формулам прямого бруса, так как при соотношении сторон $\frac{b}{a} \leq 0,5$ и при $\frac{R}{a} = 6,25$ погрешность расчёта по формулам прямого бруса при наиболее благоприятной схеме нагружения превышает 10%.

Для оценки влияния стеснённого кручения на напряжённое состояние бруса большой кривизны были вычислены изгибные нормальные напряжения, нормальные напряжения стеснённого кручения, а так же суммарные напряжения. В таблицах даны значения этих

напряжений в угловых точках в зависимости от соотношения сторон прямоугольника для ортотропного и изотропного кольца. Величина напряжений стеснённого кручения соизмерима с величиной напряжений изгиба. В некоторых случаях напряжение стеснённого кручения достигает 30% от напряжения изгиба. Для изотропного бруса при $\frac{b}{a} > 2$ напряжение стеснённого кручения достигает 10% от изгибного.

Разработанная теория была применена для определения напряжений в пружинах, изготовленных из изотропного и ортотропного материала. По формулам (5) вычислены значения коэффициента K_t при различных соотношениях сторон сечения и при различной кривизне витков. Для сравнения коэффициенты K_t подсчитывались также по формулам теории деформации прямого изотропного и ортотропного бруса. Расхождение результатов расчёта по формулам прямого бруса и кривого бруса с учётом деформации и сдвигов, зависит от геометрии пружин и от материала. В случае изотропного материала расхождение получается приблизительно в два раза меньше.

Определение напряжений в изотропном кривом брусом методами теории упругости выполнено в работе С.П. Демидова. Значения напряжений в цилиндрической винтовой пружине, вычисленные по предлагаемой теории, практически совпадают с результатами, полученными в работе С.П. Демидова.

Пятая глава посвящена исследованию деформаций ортотропного бруса прямоугольного сечения малой кривизны. Получено решение, аналогичное приведённому во второй главе. По полученным формулам для бруса малой кривизны определялись касательные напряжения для винтовых цилиндрических пружин растяжения-сжатия. Сравнение их с напряжениями, подсчитанными по формулам, полученным во второй главе, позволяет сделать вывод, что при учёте сдвигов и деформации теория бруса малой кривизны не намного проще, чем теория бруса большой кривизны, в тоже время она менее точная.

В главе шестой приведено описание экспериментального исследования напряжений в кольцах, рассчитанных по изложенному методу. Было испытано два кольцевых образца следующих размеров: $R=25$ см, $b=8$ см, $a=4$ см; $R=32$ см, $b=8$ см, $a=4$ см. Кольцо, установленное на 4 опоры, нагружалось 4-мя силами между опорами. Нагрузка увеличивалась ступенями и при

каждом значении нагрузки производилось измерение деформаций. Использовался метод тензометрирования. По деформациям на основании найденных значений упругих постоянных материала определялись напряжения. В таблицах приведены результаты, полученные теоретически по методу, предложенному в данной работе и экспериментальные. Сравнение показывает, что точность результатов, полученных на основе предлагаемого метода практически достаточная.

ВЫВОДЫ

1. В данной работе предложен метод расчёта ортотропного бруса большой кривизны прямоугольного поперечного сечения, находящегося под действием сил, перпендикулярных его плоскости. Метод учитывает эффект сдвигов и стеснённого кручения.
2. На основании разработанного метода получены расчётные зависимости для определения напряжений и деформаций в замкнутых ортотропных кольцах, нагруженных сосредоточенными силами. Разработанная теория использована при расчёте опорных колец трансформаторов, а также для определения напряжений и деформаций в винтовых цилиндрических пружинах растяжения-сжатия с малым углом подъёма витков.
3. Разработана методика испытания ортотропного материала на растяжение, сжатие и сдвиг. Исследованы механические свойства материала, полученного методами намотки и представляющего собой слоистую структуру, в которой слои бумаги чередуются со слоями полимерного связующего. Определены упругие постоянные и характеристики прочности материала при различных видах нагружения.
4. Проведены расчёты тех же деталей по теории ортотропного прямого бруса. Сопоставление результатов расчёта по различным теориям показывает, что использование теории прямого бруса приводит к значительным погрешностям.
5. Разработанный метод расчёта может быть применён также и к деталям, выполненным из изотропного материала. В этом случае он позволяет учесть влияние эффектов сдвига и стеснённого кручения.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующей работе:

Бидерман В.Л., Князева В.А. Антиплоская деформация ортотропного кривого бруса прямоугольного сечения, "Известия вузов, Машиностроение", 1972, №6.