

М 453415

МОСКОВСКОЕ ОРДЕНА ЛЕНИНА,
ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ВЫСШЕЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ УЧИЛИЩЕ
ИМЕНИ Н. Э. БАУМАНА

НА ДОМ
НЕ ВЫДАЕТСЯ

На правах рукописи

БРАГИН Вениамин Васильевич

УДК 621.833:539.4.001.24

**ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ
СОПРЯЖЕННЫХ ЗУБЧАТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КОЛЕС
И СИНТЕЗ ГЕОМЕТРИИ ЗУБЬЕВ**

Специальность 05.02.02 — Машиноведение и детали машин

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора технических наук

Москва — 1986 г.

Работа выполнена в Ярославском политехническом институте.

Официальные оппоненты:

д. т. н., профессор Э. Л. Айрапетов,

д. т. н., профессор Э. Б. Вулгаков,

д. т. н., профессор Г. А. Снесарев.

Ведущая организация — Ярославский моторный завод.

Защита состоится *«20» ноября* 1986 г. в 14.30 час. на заседании специализированного совета Д 053.15.06 «Машиностроение» в Московском высшем техническом училище имени Н. Э. Баумана; 107005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского высшего технического училища имени Н. Э. Баумана.

Автореферат разослан

Ученый секретарь
специализированного

М4534/15

МН 53415

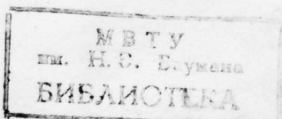
Актуальность. В программе Коммунистической партии Советского Союза и Основных направлениях экономического и социального развития СССР на 1986-1990 годы и на период до 2000 года намечено решительное повышение роли науки и техники в качественном преобразовании производительных сил, переводе экономики на рельсы всесторонней интенсификации и повышении эффективности общественного производства. Среди основных направлений работы в области естественных и технических наук определены работы по созданию систем автоматизированного проектирования (САПР), повышению технического уровня и качества промышленной продукции, снижению ее материалоемкости. Успешное решение намеченных партией и правительством задач, в частности, зависит от уровня математической теории расчетов машин, деталей и, прежде всего, расчетов по оценке их нагрузочной способности. Необходимость разработки совершенных теоретических основ расчета зубчатых передач обусловлена еще и тем, что зубчатые механизмы являются самыми распространенными в технике и относятся к числу наиболее напряженных. От их нагрузочной способности и надежности зависят технико-экономические показатели многих современных машин.

В расчетах по оценке нагрузочной способности зубчатых передач основными и наиболее сложными являются задачи определения объемного напряженно-деформированного состояния зубчатых колес, площадок контакта зубьев и удельных нагрузок на них. Эти задачи неразрывно связаны между собой и образуют, по существу, одну комплексную задачу, которую можно назвать задачей определения напряженно-деформированного состояния сопряженных зубчатых колес. Подход к определению нагрузок и деформаций (напряжений) из условий их неразрывной связи не получил достаточного развития. Со значительными допущениями решается и частная задача определения объемного напряженно-деформированного состояния каждого из зубчатых колес при заданных граничных условиях. Учитывая также, что без уточненного решения комплексной задачи нельзя установить действительную нагрузочную способность передач, поэтому разработка теории решения комплексной задачи является актуальной проблемой. Актуальными являются и вопросы подбора геометрии зубьев и совершенствования инженерных методик расчета зубчатых передач. Разработка этих вопросов, основывающаяся на решении комплексной задачи, имеет большое практическое значение, т.к.

НТБ МГТУ им. Н.Э. Баумана



1453415



позволяет снизить народнохозяйственные затраты на проектирование, изготовление и эксплуатацию машин высокого технического уровня, качества и минимальной материалоемкости.

Цель работы. Разработка теории напряженно-деформированного состояния сопряженных цилиндрических зубчатых колес, включающая решение задач определения напряжений и прогибов зубьев каждого из парных колес, размеров площадок контакта и распределения нагрузок по ним. Приложение этой теории к синтезу геометрии зубьев с эвольвентным зацеплением и совершенствованию инженерных методик расчета на прочность.

Методы исследования: 1. Теоретические - на основе теории зубчатых зацеплений, теории упругости, вариационных принципов механики, линейной алгебры, теории сплайнов, теории оптимизации и теории вероятности; 2. Экспериментальные исследования напряжений и прогибов - поляризационно-оптическим методом на "замороженных" моделях, методами статической тензометрии. Исследования влияния геометрии зубчатых колес на долговечность - на стендах с замкнутым контуром и гидропульсаторе. Статистические исследования погрешностей изготовления и твердости материалов зубчатых колес на основе теории математической статистики.

Научная новизна. Разработаны вопросы построения уравнений поверхности зубьев, нарезанных по методу обкатки режущим инструментом с произвольным производящим исходным контуром. Исходный контур образован набором кривых, описанных уравнениями одинаковой структуры. Предложена аппроксимация уравнений поверхности зубьев интерполяционными сплайнами - явными непрерывно дифференцируемыми функциями, позволившими организовать обобщенные расчеты зазоров между зубьями и напряженно-деформированных состояний сопряженных колес независимо от вида их зацепления.

Разработаны криволинейные системы координат с геометрией координатных линий, обеспечивающей простоту учета граничных условий при решении дифференциальных уравнений теории упругости и описания распределения перемещений и напряжений в зубчатых колесах. Криволинейные системы координат отображают исследуемые области в прямоугольные параллелепипеды, а при наличии тонкостенного обода - в совокупности прямоугольных параллелепипедов.

Разработаны теории построения математических моделей напряженно-деформированного состояния зубчатых колес при заданных

граничных условиях, учитывающие особенности распределения напряжений и перемещений в исследуемых областях.

Создана теория напряженно-деформированного состояния сопряженных колес, включающая определение полных взаимозависимых объемных напряженно-деформированных состояний каждого из зубчатых колес, размеров площадок контакта их зубьев и функций плотности нагрузки, распределенной по площадкам. Теория инвариантна по отношению к видам зацеплений зубьев.

Построены целевые функции, обеспечивающие подбор рациональной геометрии зубьев при разных соотношениях запасов контактной и изгибной прочности согласно задаваемой вероятности неразрушения. Подбор модификации зубьев, влияющий на распределение напряжений по ширине венца, сведен к оптимизации геометрии продольного зазора по задаваемому переменному режиму нагружения, ступкам контакта, жесткости деталей передачи и самих зубчатых колес.

Разработаны вопросы построения и совершенствования инженерных методик расчетов зубчатых передач с учетом различных требований к точности, универсальности и вида используемых средств вычислений.

Практическая ценность. Теория напряженно-деформированного состояния сопряженных зубчатых колес позволяет установить напряжения в зубчатых колесах с различной геометрией и наличии ошибок контакта. На основе использования теории установлены направления совершенствования инженерных методик. Определено влияние геометрических параметров зубьев на напряженно-деформированное состояние. Получен большой объем справочного материала по определению показателей прочности и жесткости передач. Разработаны комплексы программ для оценки на ЭВМ напряженного состояния.

Комплексы программ для ЭВМ и справочный материал в виде номограмм, таблиц и эмпирических формул обеспечивают три методики расчетов зубчатых передач. Первая - универсальная, реализующая в самом общем виде решение системы уравнений теории напряженно-деформированного состояния сопряженных колес. Предназначена для ответственных передач и передач со специальной геометрией исходного контура. Вторая - уточненная (детализированная) методика для массовых расчетов на ЭВМ эвольвентных передач с различными геометрическими параметрами исходного контура. Третья - упрощенная, построенная на использовании в основном номограмм, таблиц

и служащая для приближенной оценки прочности передач с наиболее часто встречающимися параметрами исходных контуров.

На основе использования результатов статистических исследований, а также полученных расчетных зависимостей предложено оценивать надежность передач по параметрам распределений исходных факторов влияния (внешних нагрузок, ошибок контакта, свойств материалов).

Разработаны вопросы синтеза геометрии зубчатых колес на основе задаваемой вероятности безотказной работы по контактным и изгибным напряжениям.

Реализация результатов работ. Разработаны руководящие технические материалы по проектированию зубчатых колес коробок передач автомобилей, включающие комплекс программ для ЭВМ и методики оценки нагрузочной способности зубчатых передач, а также подбора геометрии зубьев. Руководящие материалы используются Ярославским объединением "Автодизель", при модернизации выпускаемых и проектировании новых коробок передач автомобилей большой грузоподъемности.

Показатели прочности, определенные на основе разработанной теории, используются в подготовке материалов для стандарта СЭВ по расчету на прочность зубчатых передач. Часть материалов включена в проект стандарта.

Программы расчетов передач на ЭВМ и справочный материал применяется НПО ЦНИИТМАШ для проектирования зубчатых передач энергетических машин и некоторыми другими предприятиями страны.

Апробация. Результаты работы доложены и обсуждены на 23-й-32-й научно-технических конференциях профессорско-преподавательского состава Ярославского политехнического института в 1971-1985 гг.; на межвузовской научно-технической конференции "Инженерный метод расчета на прочность и жесткость, основанный на гипотезе неплоских сечений", Горький, 1972 г.; на научно-техническом семинаре "Применение вычислительной техники в области конструирования, расчета и изготовления зубчатых передач", Свердловск, 1974 г.; на XI научно-технической конференции "Пути повышения прочности, надежности и долговечности выпускаемых машин и оборудования", Свердловск, 1976 г.; на научно-технической конференции "Повышение надежности и ресурса зубчатых передач в тракторном и сельскохозяйственном машиностроении", Харьков, 1979 г.;

на всесоюзном совещании "Динамика зубчатых передач", Ереван, 1979 г.; на заседании секции зубчатых передач ЦП НТО Машпром, Москва, 1979 г.; на научно-технической конференции "Автоматизированное проектирование механических передач", Ижевск, 1982 г.; на республиканской научно-технической конференции "Повышение надежности и снижение металлоемкости зубчатых передач и редукторов общего машиностроительного применения", Севастополь, 1983 г.; на Всесоюзном семинаре "Автоматизированное проектирование зубчатых передач и редукторов", Брест, 1983 г.; на совещании-семинаре заведующих кафедрами деталей машин высших учебных заведений страны, Киев, 1984 г.; на научно-технической конференции "Снижение металлоемкости зубчатых передач и редукторов", Свердловск, 1984 г.; на Всесоюзной научно-технической конференции "Несущая способность и качество зубчатых передач и редукторов машин", Алма-Ата, 1985г.; на национальной конференции с международным участием "Зубчатые передачи, 85", Варна (Болгария), 1985; а также в ряде организаций.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 60 работ, в том числе две книги.

Объем. Диссертация состоит из введения, четырех разделов, содержащих восемь глав; заключения; списка литературы (348 наименований) и приложений. Изложена на 365 страницах машинописного текста, имеет 60 рисунков и 16 таблиц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение. Образование и развитие теории расчета зубчатых передач на нагрузочную способность происходит благодаря теоретическим и экспериментальным исследованиям многих отечественных и зарубежных ученых. Основоположающими являлись труды советских ученых А.И.Петрусевича, В.Н.Кудрявцева, Э.В.Зулгакова, Д.Н. Решетова, Г.А.Снесарева, К.И.Заблоского, Э.Л.Айрапетова, М.Д.Генкина, В.Л.Устипенко, Ю.А.Державца, Я.Г.Кистьяна и др. Огромное значение имело появление стандарта по расчету передач (ГОСТ 21354-75), воплотившего наиболее совершенные достижения, имевшие место к началу 70-х годов в области теории расчетов, экспериментальных исследований и опыта проектирования.

Современная ситуация, касающаяся проектирования зубчатых передач, характеризуется следующими основными положениями. В связи с широким внедрением ЭВМ и их совершенствованием резко увеличились

возможности конструктора и исследователя в проведении глубокого и быстрого численного анализа. Значительно возросли требования к надежности передач, повышению их нагрузочной способности, уменьшению металлоемкости и сокращению сроков разработок. Все большее применение находят передачи с точечным первоначальным контактом, методы расчета которых еще находятся в начальной стадии становления. Возникла острая необходимость создания САПР зубчатых передач. В такой ситуации совершенствование методики расчета не может идти только по пути уточнения значений коэффициентов, составляющих расчетные формулы для рабочих (местных) напряжений, и увеличения объема нормативного материала, так как невозможно разработать нормативный материал для передач при всех допустимых сочетаниях геометрических параметров исходных контуров. Разработка нормативного материала целесообразна лишь для некоторых перспективных контуров. Кроме этого, расчетные формулы стандартной методики не обеспечивают решение всех задач, с которыми встречается конструктор в процессе проектирования передач высокой нагрузочной способности. Вот почему основное внимание должно быть уделено созданию обобщенных методик, эффективных с позиций: достижения высокой надежности результатов расчетов; универсальности и пригодности к оценке нагрузочной способности различных передач и оптимизации геометрии зубчатых колес; приспособленности к алгоритмизации на ЭВМ и построению САПР.

Определяется цель работы и формулируются основные задачи.

Первая глава посвящена описанию геометрии поверхностей зубьев цилиндрических колес и зазоров в зоне контакта. Для построения расчетов на ЭВМ по определению напряженно-деформированного состояния зубчатых колес при различной геометрии исходных контуров необходимо профили и поверхности исследуемых зубьев представить обобщенными уравнениями, удовлетворяющими требованиям: приспособленности к алгоритмизации на ЭВМ с наличием возможности изменения геометрии зубьев вариацией значений небольшого числа параметров; уравнения должны иметь явный вид и одинаковую структуру, инвариантную по отношению к геометрии зубьев.

Исходный производящий контур образован набором кривых. Каждая кривая описана параметрически уравнениями одинаковой структуры,

отличающимися числовыми значениями постоянных величин. Постоянные определяют вид кривой и ее расположение в выбранной системе координат. Сделан вывод уравнений торцового профиля зубьев проектируемого колеса при нарезании методом обкатки инструментом реечного типа. Получены также уравнения профилей зубьев с наружным и внутренним зацеплением, формируемых долбяками. Параметрические уравнения торцового профиля зубьев аппроксимированы функциями

$$X_3 = f(x_1), \quad (1)$$

где $f(x_1) \approx f$ - интерполяционный сплайн.

Исследована возможность построения явных функций с помощью эрмитовых сплайнов, функций гладкого восполнения и кубических сплайнов. Предпочтение отдано эрмитовым сплайнам, обеспечивающим наиболее точную аппроксимацию с максимальными ошибками при вычислении профиля не более чем $10^{-6}\%$, а третьей производной - $6 \cdot 10^{-2}\%$.

Геометрия зазора входит в число факторов, от которых зависят размеры площадок контакта и распределение нагрузок по ним. В первый момент времени, когда еще зубья не воспринимают нагрузку, они касаются обычно в одной точке K . Это бывает обусловлено либо геометрией зубьев, либо ошибками их контакта. Под действием нагрузки зубья деформируются и зубчатые колеса поворачиваются на некоторый угол. Для учета этого обстоятельства первоначальный зазор определен при положении зубьев с "внедренными" недеформированными поверхностями. В торцовых сечениях зазор рассчитывается по формуле

$$\delta_{tr}(\xi^{(n)}) = w_{or} - w_{tm}(\xi^{(n)}), \quad (2)$$

где $w_{tm}(\xi^{(n)})$ - глубина внедрения поверхностей, измеряемая по нормали к торцовому профилю зуба шестерни в точке с максимальным внедрением;

$\xi^{(n)}$ - текущая точка на поверхности зуба шестерни;

$$w_{or} = \max w_{tm}(\xi^{(n)}), \quad \xi^{(n)} \in S_r^*. \quad (3)$$

В (3) S_r^* обозначает площадку, выделенную линией пересечения поверхностей зубьев. Определен зазор δ_r и в направлении нормали проведенной к поверхности зуба шестерни в точке о w_{or} .

Во второй главе рассмотрены криволинейные системы координат и особенности распределения напряжений и перемещений по элементам в виде координатных линий. Выбор систем координат имеет решающее значение для трудоемкости и точности решения уравнений теории упругости при определении напряженно-деформированного состояния областей со сложной геометрией. Причем системы координат оказывают влияние на наиболее важные и ответственные этапы решения — учет граничных условий и распределения перемещений и напряжений в исследуемой области. Вот почему на построение криволинейных систем координат в работе уделялось большое внимание.

Наибольшее применение нашла разработанная автором криволинейная система координат S_{ξ} (координатные линии ξ_i , $i = 1, 2, 3$) с постоянной формой линий ξ_3 , названных нормализованными кривыми (рис. 1). Нормализованные кривые в виде дуг окружностей в каждом торцовом сечении пересекают среднюю линию зуба и его профиль под прямым углом. Линии ξ_1 характеризуются постоянным значением отношения $\xi_3 = \nu / \nu_n$, где ν — угол между радиусом-вектором r_3 нормализованной кривой и осью зуба, ν_n — предельное значение ν . На рис. 1 показаны также прямоугольные системы координат η_i и x_i ($i = 1, 2, 3$). Система η_i жестко связана с зубчатым колесом, а x_i — с текущим торцовым сечением.

Координаты точек нормализованной кривой определяются по соотношениям: в системе η_i —

$$\eta_{01} = (x_1 - f/f_x + c_f \cos \nu) \cos \theta - c_f \sin \nu \sin \theta \quad (4)$$

$$\eta_{02} = \xi_2 \theta_w, \quad \eta_{03} = (x_1 - f/f_x + c_f \cos \nu) \sin \theta + c_f \sin \nu \cos \theta$$

в системе ξ_i —

$$\xi_1 = \frac{1}{a_1} (x_{01} + c_f + \sqrt{(f/f_x)^2 + f^2 - x_{03}^2} - x_{01a}) \quad (5)$$

$$\xi_2 = \eta_{02} / \theta_w, \quad \xi_3 = \nu / \nu_n$$

где a_1 — расстояние по оси x_1 между граничными нормализованными кривыми с параметрами $x_{1a, b}$;

θ — угол между осями x_1 и η_1 ;

$$f_x = df/dx, \quad c_f = f(1 + f_x^2)^{1/2} / f_x; \quad (6)$$

η_{0i}, x_{0i} — координаты точек при $\nu < \nu_n$. Если $\nu = \nu_n$, то ин-

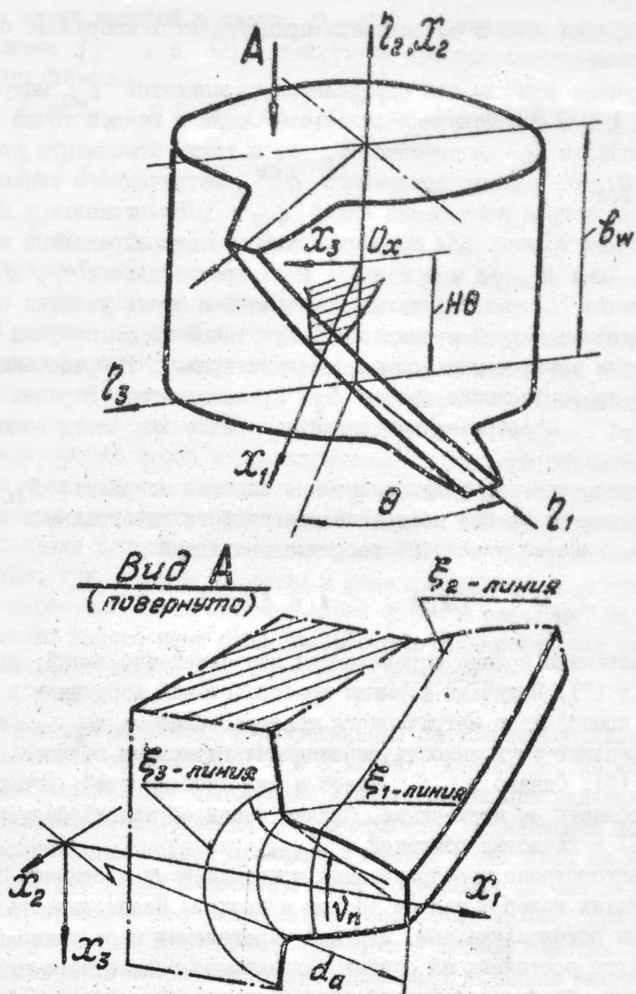


Рис. I. К построению прямоугольных x_i, η_i и криволинейных ξ_i ($i=1, 2, 3$) систем координат.

декс нуль в обозначении прямоугольных координат опускается.

Получены формулы для определения компонентов l_{im} матрицы перехода L , определяющей локальный базис в каждой точке исследуемой области Ω в системе ξ_i , а также компоненты ковариантного g_{ik} и контрвариантного g^{ik} метрического тензора. Рассмотрен вопрос построения линий ξ_{in} , ортогональных к нормализованным кривым. Для ортогональной системы определены коэффициенты Ляме H_i ($i = 1, 2, 3$) и их производные $\partial H_i / \partial \xi_j$.

Функция (I) может быть не монотонной и иметь участки с резким изменением первой производной. При такой форме профиля зубьев возможны пересечения нормализованных кривых. Разработаны специальные преобразования систем S_{ξ} , исключающие пересечения линий ξ_j . Преобразования вводятся только для части области Ω .

Разработаны также криволинейные системы координат $S_{\xi c}$, образующие на основе использования свойств интегральных кривых. Исходным является семейство координатных линий

$$x_{03} = \xi_3 \cdot f(\xi_1), \quad -1 \leq \xi_3 \leq 1. \quad (7)$$

Нормализованные кривые определяются как семейство линий, ортогональных к (7). Получены формулы преобразования координат и для расчета компонентов метрического тензора. Система $S_{\xi c}$ обеспечивает меньшую трудоемкость определения геометрии области, чем система (5). Однако $S_{\xi c}$ имеет и ряд особенностей, ограничивающих область ее применения. Сделан вывод об использовании системы (5) в качестве основной.

Предусмотрено преобразование криволинейных координат S_{ξ} для зубчатых колес с тонким ободом и диском. Необходимость преобразования обусловлена тем, что при определении напряженно-деформированного состояния на основе вариационно-разностного подхода необходимо, чтобы исследуемая область в системе криволинейных координат отображалась в простке по геометрии области с постоянными значениями координат на их граничных поверхностях. При наличии обода в Ω возникают вырезы, оформленные криволинейными поверхностями. В этом случае координатной поверхностью ξ_3 и двумя ξ_i из Ω выделяется часть Ω_1 . В область Ω вводится новая система координат $\xi_{i\varphi}$ ($i = 1, 2, 3$), координаты

натные линии которой в части $\Omega - \Omega_1$ совпадают с координатными линиями ξ_i . В Ω_1 действует преобразование координат согласно формулам

$$\left. \begin{aligned} \xi_i &= \xi_{i\varphi} - p \cdot c \cdot a_{i1}(\xi_{1\varphi}) \cdot a_{i3}^*(\xi_{3\varphi}), \quad i = 1, 3 \\ \xi_2 &= \xi_{2\varphi} \end{aligned} \right\}, \quad (8)$$

где $a_{i1,3}$ - сплайн;

c, p - характеристики геометрии $\xi_{i\varphi}$.

В результате преобразования (8) исследуемая область в системе $\xi_{i\varphi}$ образуется совокупностью параллелепипедов.

В результате анализа большого объема экспериментальных исследований установлены законы распределения некоторых компонентов напряжений по элементам в виде нормализованных кривых. Эти законы мало зависят от расположения торцового сечения. Распределение напряжений вдоль нормализованных кривых при объемном состоянии аналогично распределению тех же компонентов напряжений при плоском состоянии. При плоской средней поверхности зубьев распределение напряжений соответствует такому деформированному состоянию, при котором элементы в виде нормализованных кривых ξ_3 перемещаются, не искажая своей формы и размеров. На основании этого вывода нами была разработана кинематическая гипотеза о неискривляющихся криволинейных элементах.

Теория напряженно-деформированного состояния сопряженных зубчатых колес описана в 3, 4 и 5 главах, первые две из которых посвящены определению напряжений и перемещений при заданных граничных условиях, а последняя - комплексному определению напряжений сопряженных колес, площадк контакта и нагрузок на них.

В третьей главе изложена теория построения математических моделей напряженно-деформированного состояния зубьев, представляемых консольными пластинами. Применение теории пластин к расчету зубьев и по настоящее время привлекает внимание многих ученых благодаря возможности сведения трехмерной задачи упругости к двумерной, что существенно снижает трудоемкость численного решения. Среди трудностей, возникающих при распространении теорий пластин на расчет зубьев, является неприспособленность классических теорий тонких пластин и пластин средней толщины к учету резкого изменения толщины консолей и податливости тела зубчатого колеса. Эти трудности были преодолены в результате привлечения раз-

работанной гипотезы о недеформируемых криволинейных элементах в виде нормализованных кривых. Гипотеза представляется зависимостями

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0 \quad \text{при} \quad \xi_3 = 0 \\ \xi_{33} = 0, \quad \sigma_{33} \approx 0 \quad \text{при} \quad -1 \leq \xi_3 \leq 1 \end{aligned} \right\}, \quad (9)$$

где ε_{ij} - компоненты тензора деформаций.

В частном случае при постоянной толщине консолей нормализованные кривые становятся прямыми и положения (9) совпадают с соответствующими положениями известной гипотезы Кирхгофа-Лява.

Упругая податливость тела колеса учитывается путем включения в исследуемую область части диска, отсекаемой поверхностью $\xi_1 = \xi_{1a}$. В этом случае заземленный край пластины располагается на значительном расстоянии от основания зуба, увеличивая тем самым длину консоли l_K и делая отношение толщины зуба к l_K не менее, чем $1/4$.

Напряжения и перемещения в каждой точке ξ определяются в функции от прогибов W средней поверхности зубьев. В свою очередь, прогибы средней поверхности устанавливаются в результате решения уравнения

$$\begin{aligned} \frac{E}{1-\mu_1^2} \left(J_1 W + J_2 \frac{\partial W}{\partial \xi_1} + J_3 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_1^2} + J_4 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_2^2} + J_5 \frac{\partial^3 W}{\partial \xi_1^3} + J_6 \frac{\partial^3 W}{\partial \xi_1 \partial \xi_2^2} - \right. \\ \left. - J_7 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi_1^4} - J_8 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^2} - J_9 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi_2^4} \right) + \tau'_{31} J_{20} + \sigma'_3 J_{21} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

при граничных условиях: на краю, образованном поверхностью $\xi_1 = \xi_{1a}$, считается $W = 0$, а на остальных трех - приравняются нулю погонные нагрузки. В (10) обозначено: τ'_{31}, σ'_3 - удельная нагрузка на поверхности зубьев, J_i - постоянные.

Численное решение (10) выполнено методом конечных разностей при профиле зубьев, составленном из отрезков прямых. Программа для ЭМ на алгоритмическом языке ФОРТРАН-4 предусматривает расчет напряжений и прогибов от сосредоточенных сил, распределенных нагрузок и поиск закона распределения нагрузок по контактными линиям прямых зубьев эвольвентных передач.

Расчеты на ЭМ и последующие сравнения их результатов с экспериментальными данными показали на высокую точность определения прогибов и распределения напряжений от изгиба при экономном расходовании ресурсов ЭМ. Однако уравнения (10) не учитывают кон-

тактные деформации и их приходится определять самостоятельно, делая невозможным единое решение задачи установления полного напряженного состояния сопряженных колес. Появляются затруднения и при расчете зубьев с пространственным зацеплением. Область применения теории ограничивается преимущественно решением комплексной задачи для прямозубых передач. Она представляет интерес и для расчета других деталей или их элементов в виде пластин и оболочек переменной толщины.

В четвертой главе описана теория построения вариационно-разностных моделей напряженно-деформированного состояния зубчатых колес. При обосновании выбора подхода к построению математических моделей учитывалось, что зубчатые колеса представляют из себя области, ограниченные сложными по геометрии поверхностями, которые изобилуют наличием нерегулярных участков в виде ребер и вершин. Напряженно-деформированное состояние характеризуется большой интенсивностью напряжений и деформаций в сравнительно небольших объемах и, в первую очередь, в зоне контакта зубьев и у их оснований. Наиболее приспособленными для решения уравнений теории упругости при таких сложных условиях оказываются методы, построенные на вариационном подходе, который приводит к сохранению определенности исходных операторов при переходе к дискретным моделям и позволяет обеспечить контроль и устойчивость численного решения. Поэтому такой подход и выбран в качестве основного. Но применение его для сложных по геометрии областей с неравномерным распределением перемещений сопряжено с рядом трудностей, прежде всего, связанных с построением систем базисных функций. На преодоление этих трудностей и были направлены главные усилия.

Статическое равновесие упругой области описывается уравнением

$$\bar{A}\bar{u} = \bar{K}_0, \quad (II)$$

в котором $\bar{u}$ - вектор перемещений, $\bar{K}_0$ - вектор объемных сил, $\bar{A}$ - векторный дифференциальный оператор. Причем

$$\bar{A}\bar{u} = (\lambda + 2\mu)\text{grad div } \bar{u} + \mu\text{rot rot } \bar{u}, \quad (12)$$

где λ, μ - постоянные Ляме.

Исследуемая область Ω включает зуб, часть обода и диска. Можно подобрать поверхность S_I при $\xi_1 = \xi_{1a}$, для точек которой выполняется условие

$$\bar{u}|_{S_I} = 0. \quad (13)$$

На остальной части $S_{\bar{n}}$ поверхности S области Ω

$$\bar{t}|_{S_{\bar{n}}} = \bar{g}, \quad (I4)$$

где $\bar{t}$ - вектор напряжений;

$\bar{g}$ - задаваемая векторная функция.

При вариационном подходе решение (II) при указанных граничных условиях эквивалентно нахождению элемента $\bar{u}$, реализующего минимум функционала

$$J(\bar{u}) = (\bar{A}\bar{u}, \bar{u}) - 2(\bar{u}, \bar{u}). \quad (I5)$$

Единственное решение (I5) по отысканию минимума получается в энергетическом пространстве $F_{\bar{A}}$. Оператор теории упругости самосопряженный и положительно определенный, поэтому решение производится в конечномерных подпространствах $F_h \subseteq F_{\bar{A}}$, определяемых бесконечной последовательностью параметров $h_1, h_2, \dots, h_n \rightarrow 0$ при $K \rightarrow \infty$. Последовательность $\{F_h\}$ полна и обеспечивает с любой степенью точности аппроксимацию элементов $F_{\bar{A}}$ элементами F_h . Построение базиса F_h сведено к построению системы скалярных функций $(\varphi_i^h)_{i=1}^{n_h}$, образующих базис скалярного подпространства F_h .

Решение, реализующее минимум (I5), получено для произвольной неортогональной системы координат в виде разложения

$$\bar{u}^h = \sum_{i=1}^{n_h} \varphi_i^h L \bar{\alpha}_i, \quad (I6)$$

где $\bar{u}^h$ - вектор перемещений, представленный в ковариантных компонентах;

L - матрица преобразования координат, определяющая локальный базис в криволинейных координатах;

$\bar{\alpha}_i$ - вектор-столбец с компонентами $\alpha_i^{(1)}, \alpha_i^{(2)}, \alpha_i^{(3)}$.

Постоянные $\bar{\alpha}_i$ определяются при решении системы алгебраических уравнений

$$K \cdot \bar{\alpha} = \bar{\beta}, \quad (I7)$$

где K - матрица размерности $N_h \times N_h$ ($N_h = 3n_h$) с компонентами

$$K_{ij} = \int_{\Omega} B_i^T D B_j d\Omega, \quad (I8)$$

представляющими из себя квадратные матрицы 3×3 ;

$$\bar{\beta} - N_h - \text{мек-ий вектор, составленный из компонент векторов}$$

$$\bar{\beta}_j = \int_{S_H} \psi_j^h L \bar{g} ds, \quad 1 \leq j \leq n_h. \quad (19)$$

Система (17) учитывает только нагрузки, которые приложены к граничным поверхностям зубьев. Такие нагрузки обычно и являются единственной причиной возникновения деформированного состояния. При работе с большими скоростями (порядка 100 м/с и более) на деформированное состояние оказывают влияние объемные силы (центробежные силы инерции), которые вводятся в правую часть (17).

При построении базиса конечномерных подпространств учитывается, что в криволинейной системе координат исследуемая область представляется параллелепипедом

$$\Omega = \{ \xi_i : a_i \leq \xi_i \leq b_i, \quad i = 1, 2, 3 \} \quad (20)$$

или состоит из совокупности параллелепипедов. На каждом отрезке $[a_i, b_i]$ оси переменной ξ_i строится сетка узлов $\alpha_i = \xi_{i,1} < \xi_{i,2} < \dots < \xi_{i,k_i} < \dots < \xi_{i,n_i} = b_i$. Разработаны три вида подпространств F_h . Первое подпространство F_h образовано множеством $M_N^m(\Omega)$ функций в виде полиномов Лагранжа степени $m_{ki} \leq m \quad (i=1,2,3)$, второе подпространство - множеством $G_N^{(n)}(\Omega)$ функций гладкого восполнения класса гладкости C^1 и третье - множеством $H_N^1(\Omega)$ функций в виде интерполяционных полиномов Эрмита также класса гладкости C^1 . Системы функций базиса удовлетворяют главному граничному условию $\psi_i^h|_{S_T} = 0$. Показано, что эти виды подпространств обладают свойствами полноты и обеспечивают сходимость решения $\{\bar{u}^h\}$ к точному u_0 при уменьшении параметра h сетки. Системы базисных функций удовлетворяют и требованиям почти ортонормированности, создавая условия устойчивости численного решения (17).

Произведена оценка приспособленности каждого из видов подпространств к наиболее точной аппроксимации перемещений при наименьшей размерности N . Наилучшие показатели имеют подпространства M_N^2 и M_N^3 . Особенно заметны их преимущества при сетках с переменным шагом. При сравнительно небольшой размерности M_N^m удается создать густые сетки в опасных местах за счет увеличения шага в остальных частях исследуемой области.

Решены вопросы рационального построения алгоритма и программы численной реализации теоретических разработок с целью экономного расходования ресурсов ЭВМ, наименьшей потери точности при вычисле-

ниях и контроли за устойчивостью хода решения. К важнейшим вопросам относятся: выбор вида подпространств, его размерности и сеточной структуры; упорядочение матрицы K путем выбора соответствующей нумерации узлов и организации ее хранения в оперативной и внешней памяти ЭВМ; выбор хода решения системы уравнений с учетом расположения ненулевых элементов; определение чисел обусловленности и другие. Численная реализация организована в несколько этапов, на каждом из которых используются соответствующие блоки программ. Некоторые из блоков являются универсальными, обладающие свойствами инвариантности по отношению к геометрии областей и даже системам криволинейных координат. Имеются дублирующие блоки, рассчитанные на применение только при определенной геометрии областей, повышающие эффективность решения ряда задач, требующих многократного повторения расчетов.

Оценка скорости сходимости и точности результатов численного решения производилась несколькими способами: сравнение изменений результатов расчетов при постепенном увеличении размерности подпространств $\bar{F}_h$, изменение их вида и структуры сетки; сравнение с результатами аналитических решений методом конформного отображения при плоском напряженном состоянии; сравнение с экспериментальными значениями прогибов и напряжений, полученных поляризационно-оптическим методом и методами статической тензометрии. Показана высокая точность результатов численного решения даже при относительно небольшой размерности моделей.

Решение (17), так же как и (10), возможно при наличии сведений о граничных условиях (14). Однако установление граничных условий (14) является не менее сложной и ответственной задачей, нежели решение исходной задачи о расчете напряжений и перемещений при заданных нагрузках. В пятой главе дается комплексное определение напряженно-деформированного состояния каждого из сопряженных зубчатых колес, площадок контакта их зубьев и распределения нагрузок на площадках. Исходные данные: геометрия поверхностей зубчатых колес; параметры, характеризующие относительное расположение зубьев в рассматриваемый момент времени с учетом ошибок контакта; величина внешней нагрузки и механические свойства материалов. Сопряженные зубчатые колеса имеют взаимозависимые напряженно-деформированные состояния, о которых заранее можно сказать лишь только то, что в случае возникновения одной площадки контакта они должны удовлетворять уравнениям

$$\left. \begin{aligned} F_r - \iint_{S_r} q_r \bar{e}_F \cdot \bar{e}_r ds_r &= 0 \\ W_{\Sigma Mr} - W_{\Sigma r} - \delta_r &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

при сохранении требований, накладываемых (II) и (I3). В (2I) обозначено: S_r - поверхность зуба шестерни с нагрузкой (площадка контакта); $q_r = q_r(\bar{\xi}^{(n)})$ - искомая функция плотности нагрузки, определяющая удельную нагрузку в текущей точке. Направление q_r в $\bar{\xi}^{(n)}$ задается единичным вектором $\bar{e}_r$; $\bar{e}_F$ - единичный вектор, совпадающий по направлению с вектором внешней нагрузки F_r ; $\delta_r = \delta_r(\bar{\xi}^{(n)})$ - зазор между зубьями, зависящий от координат точек поверхности и ошибок контакта; $W_{\Sigma r} = W_{\Sigma r}(\bar{\xi}^{(n)})$ - суммарный прогиб зубьев в текущей точке площадки контакта; $W_{\Sigma Mr}$ - максимальное значение $W_{\Sigma r}$.

Разработан итерационный процесс совместного решения (2I) и (II). На каждом шаге процесса уточняется распределение нагрузки по площадке контакта

$$q_r^{(n, k+1)} = c_r^{(n, k)} (W_{or}^{(n)} - \delta_r^{(n)}), \quad (22)$$

где $c_r^{(n, k)}$ - коэффициент удельной жесткости, определяемый по данным предыдущего (n, k) шага

$$c_r^{(n, k)} = q_r^{(n, k)}(\bar{\xi}^{(n)}) / W_{\Sigma r}^{(n, k)}(\bar{\xi}^{(n)}); \quad (23)$$

переопределяются граничные условия

$$\bar{g} = \begin{cases} \bar{g}_{n\bar{\xi}} > 0, & \bar{\xi}^{(n)} \in S_r \\ 0, & \bar{\xi}^{(n)} \in S_{II} - S_r \end{cases} \quad (24)$$

и вновь определяется деформированное состояние зубчатых колес на основе решения (I7). Если второе уравнение (2I) удовлетворяется, а первое нет, то выбирается новое значение $W_{or}^{(n+1)}$, уточняется δ_r и вновь идет итерационный процесс по индексу K . Для установления очередного $W_{or}^{(n+1)}$ предложена кусочно-полиномиальная интерполяция полиномом Лагранжа. Доказана сходимость процесса. Приводятся примеры итерационных процессов с описанием каждого из (n, k) этапов.

В зацеплении зубьев может быть не одна, а $n' > 1$ площадок контакта. В этом случае системы (2I) и (I7) дополняются уравнением

$$F = \sum_{r=1}^{n'} F_r \dots \quad (25)$$

Вводится дополнительное условие и для описания совместных деформаций зубьев исходя из того, что в начальный момент времени возможна только одна из n' площадок с номером $l \leq n'$. В месте расположения остальных площадок, которые появляются только под нагрузкой, имеют место зазоры δ_{fr} ($r \neq l, 1 \leq r \leq n', \delta_{fl} = 0$). После приложения нагрузки зубья деформируются с максимальным значением прогибов W_0 . Тогда максимальные прогибы в зонах остальных площадок

$$W_{or} = W_0 - \delta_{fr}, \quad 1 \leq r \leq n'. \quad (26)$$

Итерационный процесс для этого более общего случая строится также, как и при $r=1$. Площадки S_r ($1 \leq r \leq n'$) рассматриваются как связанные подмножества не связного множества S_H ($S_r \in S_H$). Естественно, что при этом соблюдаются (26) при всех r .

Работа зубчатых передач характеризуется колебаниями скорости перемещения зубьев и появлением динамических нагрузок. В соответствии с теорией удара Герца, подтвержденной специальными исследованиями ряда ученых, в каждый момент времени напряженно-деформированное состояние может рассматриваться квазистатическим. Для диссипативной системы на основе использования принципа Даламбера уравнения (21) при $r \geq 1$ представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} M \ddot{W}_0 + K \dot{W}_0 + \sum_{r=1}^{n'} \iint_{S_r} q_r \cdot \bar{e}_r \cdot \bar{e}_r ds_r &= F \\ W_{\Sigma Mr} - W_{\Sigma r} - \delta_r &= 0, \quad W_{\Sigma Mr} = W_0 - \delta_{fr} \end{aligned} \right\}. \quad (27)$$

В (27) последовательно записаны слагаемые, представляющие силы: инерции, диссипативные, упругости и внешние. При увеличении числа степеней свободы число уравнений системы (27) возрастает.

Решение (27) заключается, по существу, в последовательном через малые промежутки времени определении квазистатических напряженно-деформированных состояний сопряженных колес с учетом непостоянства значений n' , δ_r , δ_{fr} , F . Многократное установление квазистатического состояния затруднено из-за большого объема вычислений и поэтому предложено решение (27) в два этапа. На первом этапе задача решается с некоторыми упрощениями, вводимыми при определении коэффициентов жесткости. При этом устанавливается

максимальная суммарная статическая и динамическая нагрузки и соответствующий опасный момент положения зубьев. Полученные результаты являются исходными данными для уточненного определения напряженно-деформированного состояния сопряженных колес на втором этапе с использованием (I) и (II). При увеличении технических возможностей ЭВМ необходимость поэтапного решения отпадет.

Все теоретические разработки реализованы на ЭВМ. Приводятся примеры расчетов, иллюстрирующие сходимость итерационного процесса. Для косозубой передачи с углом наклона зубьев 24° контактные и изгибные напряжения сопоставлены с опытными значениями, определенными поляризационно-оптическим методом на "замороженных" образцах. Теоретическая наработка до поломки зубьев прямозубых колес с разной толщиной обода показана в сравнении с экспериментальными данными, полученными при испытании на гидропульсаторе. Подсчитаны динамические нагрузки в зубчатой передаче, результаты испытаний которой опубликованы другими авторами. Результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Глава 6. Экспериментальные исследования

6.1. Статистические исследования погрешностей изготовления зубчатых колес и твердости их материалов. Исследованы распределения погрешностей основных и окружных шагов прямозубых и косозубых колес, выпускаемых серийно для автомобилей большой грузоподъемности. Зубчатые колеса подвергнуты цементации и закалке. Установлены также законы распределения разностей g_i погрешностей основных шагов смежных пар зубьев для зубчатых колес и $g_{i\Sigma}$ - для передач. Построена математическая модель распределения погрешностей зацепления зубьев. Считалось, что составляющая кинематической погрешности, характеризующая плавность работы передачи, является результатом проявления определенного закона распределения зазоров (натягов). При заданной функции зазоров $f_{zi} = f_z(\varphi_i)$ от угла φ_i поворота шестерни, определяющего положение i -ой пары зубьев в рабочем поле зацепления в произвольный момент времени, можно установить кинематическую погрешность как $f_{z\varphi 0} = \min f_{zi}$, $1 \leq i \leq n'$ (n' - число пар зубьев в зацеплении) и величину зазоров $\delta_{fi} = |f_{zi} - f_{z\varphi 0}|$. Построена функция зазоров в виде ряда Фурье, которая описывает неблагоприятное для напряженности зубьев распределение погрешностей шагов, разность которых последовательно изменяется на величину $g_{i\Sigma}$ (или $-g_{i\Sigma}$), обеспечивая амплитуду колебаний $f_{z\varphi 0}$ в соответствии с нормами госу-

дарственного стандарта. Математическая модель нашла применение при статических и динамических расчетах зубчатых передач.

Приведены результаты статистических исследований твердости поверхности и сердцевины зубьев.

6.2. Исследования влияния геометрии зубчатых колес на их долговечность.

6.2.1. Влияние геометрии исходного контура зубьев исследовано на стендах с замкнутым контуром Ярославского моторного завода (ЯМЗ). Объектом испытаний были зубчатые колеса второй передачи коробки передач ЯМЗ-236П. Испытаны зубчатые передачи с 5 вариантами геометрических параметров зубьев. Каждый вариант представлен пятью комплектами зубчатых колес. Варианты отличались углом профиля или коэффициентом высоты головки. Коэффициенты смещения подбирались из условия обеспечения одинаковой изгибной прочности зубьев шестерни и колеса. Все зубчатые колеса изготавливались по одной технологии, включающей чистовую обработку зубьев шевингованием. Зубчатые колеса подвергались цементации и закалке с последующим низкотемпературным отпуском. Перед испытаниями каждая пара проходила обкатку без нагрузки и под нагрузкой. Несмотря на то, что зубчатые колеса изготовлены по одной технологии, их погрешности изготовления были неодинаковыми. Наибольшие погрешности наблюдались у передач с малыми углами профиля. Максимальную наработку имели передачи с $\alpha = 24^\circ$ и $h_a^* = 1,15$.

6.2.2. Влияние толщины обода на долговечность зубьев при изгибе изучалось при испытаниях на гидропульсаторе типа МУП-50 производства Армагирского завода испытательных машин. Испытуемые зубчатые колеса модулем 4,25 мм, с числом зубьев 30 и шириной венца 50 мм имели толщину обода от 1 до 3 модулей при одинаковой толщине диска, смещенного к одному из торцов колес. При уменьшении толщины обода до 1,6м отмечено некоторое увеличение наработки. Зубчатые колеса выходили из строя из-за поломки зубьев. При дальнейшем уменьшении толщины обода ниже указанной границы происходило резкое падение наработки и выламывание зубьев вместе с частью обода.

6.3. Исследования распределения напряжений поляризационно-оптическим методом. Разработана технология изготовления моделей зубчатых колес из оптически активного материала по методу точного литья и механической обработкой. Методом "замораживания" деформаций определены напряжения в зоне контакта и у основания

зубьев пары зубчатых колес, имеющих одинаковое число зубьев $Z = 30$, модуль 6 мм, ширину венца по 50 мм и делительный угол наклона 24° . Установлены напряжения и у основания зубьев от сосредоточенных сил. Опытные значения напряжений использованы для сравнения с результатами теоретических исследований.

6.4. Исследования напряжений и прогибов методами статической тензометрии. Эксперименты проводились на моделях из органического стекла марки ОНС. Используются модели двух видов. Первый вид представлял модели одиночных зубьев модулем 20 и 30 мм. Модели второго вида – прямозубные и косозубные колеса, имеющие такие числа зубьев, которые обеспечивали близкие по геометрии нормальные профили прямых и косых зубьев. Исследовано влияние геометрии зубьев и видов нагружения на напряжения и прогибы. Экспериментальные исследования указали на сложную зависимость напряженно-деформированного состояния от геометрии зубьев, в том числе, и от угла их наклона и на необходимость учета последнего в уточненных расчетах передач. Результаты использованы для подтверждения правильности теоретических расчетов.

Приложение теории напряженно-деформированного состояния сопряженных колес к решению практических задач излагается в 7 и 8 главах.

Глава 7. Синтез геометрии зубьев. Выбор рациональной геометрии зубьев имеет исключительно большое практическое значение для повышения нагрузочной способности передачи и уменьшения ее металлоемкости. В серийном и массовом производствах в основном применяются зубчатые колеса с повышенной твердостью поверхностных слоев материала зубьев. При работе таких передач с постоянной смазкой нарушение работоспособности происходит из-за поломок зубьев и усталостного выкрашивания поверхностных слоев. Износ зубьев (включая схватывание) при скольжении в случае правильного подбора смазки значительно реже бывает причиной выхода из строя передачи. Поэтому в качестве критериев, характеризующих нагрузочную способность передачи, приняты эквивалентные (согласно гипотезе линейного суммирования усталостных повреждений) напряжения от изгиба σ_{EF} у основания зубьев и контактные σ_{EH} . Целевые функции

$$f(\bar{x}) = \frac{\sigma_E}{\sigma_p} = \max \left\{ \frac{\sigma_{EF}(\bar{x})}{\sigma_{FPj}}, j = 1, 2 \right. \\ \left. \frac{\sigma_{EH}(\bar{x})}{\sigma_{HP}} \right. \quad (31)$$

Причем

$$\sigma_{EF}(\bar{\xi}) = \max_{0 \leq \xi_2 \leq 1} [\sigma_{EF_j}(\bar{\xi}, \xi_2)], \quad \sigma_{EH}(\bar{\xi}) = \max_{0 \leq \xi_2 \leq 1} [\sigma_{EH}(\bar{\xi}, \xi_2)]; \quad (32)$$

$$\sup f(\bar{\xi}) = 1, \quad \inf f(\bar{\xi}) = 1 - \varepsilon_p. \quad (33)$$

В (32) и (33) обозначено: $\sigma_{(F,H)p}$ - предельные (допускаемые) напряжения, соответствующие заданной вероятности неразрушения; ε_p - величина, определяющая нижнюю границу $f(\bar{\xi})$; $\bar{\xi}$ - проектные параметры; ξ_2 - параметр текущего торцового сечения, в котором фиксируются наибольшие напряжения у основания зубьев и в зоне контакта. Ограничение (33) снизу преследует цель подбора таких $\bar{\xi}$, при которых передача приобретает близкие по величине вероятности неразрушения по введенным критериям. В этом случае переменными для (31) будут не только $\bar{\xi}$, но и уровни вероятностей неразрушения. Применение функций (31) вместе с границами (33) обусловлено необходимостью обеспечения передачи максимальной нагрузочной способностью путем варьирования параметрами, изменяющими геометрию профилей зубьев в торцовом сечении и плоскости зацепления при сохранении межосевого расстояния и ширины колес. Введение целевых функций в виде (31) с привлечением непосредственно критериев работоспособности и организацией проверочных расчетов позволяет наиболее полно учесть влияние разнообразных факторов на нагрузочную способность и установить ее с наибольшей точностью. Переход от абсолютных значений критериев к относительным делает сопоставимыми различные по природе критерии и дает возможность также объединить их одной функцией с последующей организацией поиска глобального экстремума. Передачи, имеющие вероятности неразрушения выше требуемых, а, следовательно, излишние коэффициенты безопасности пересчитываются с изменением a_w и b_w для получения наименьшей материалоемкости механизма.

Проектные параметры разделены на две группы $\bar{K}$ и $\bar{D}_g$. В группу $\bar{K}$ включены параметры, которые не предназначены непосредственно для регулирования законов распределения напряжений по ширине венца. К переменным этой группы отнесены геометрические параметры производящей детали (червячной фрезы, долбяка), а также некоторые параметры, которые изменяют геометрию зубьев независимо от производящей детали. Параметры $\bar{K}$, оказывающие влияние прежде всего на распределение напряжений в торцовых сечениях, для сокращения времени расчетов подбираются при постоянном уровне на-

грузки. Описана программа поиска $\bar{K}$ на ЭВМ. Производится анализ экспериментальной наработки зубчатых колес и результатов теоретических расчетов. Отмечается, что с уменьшением угла профиля α исходного контура и одновременным увеличением коэффициента h_a^* головки зубьев повышается плавность работы передачи. Изгибная прочность растет вместе с α и m . Одновременно высокие показатели изгибной и контактной прочности имеют передачи при $\alpha = 20-25^\circ$ и $h_a^* > 1$.

К параметрам $\bar{D}_3$ относятся параметры продольной модификации (по всей ширине венца или только у торцев) и профильной ко- сых зубьев. Показано значительное влияние $\bar{D}_3$ на распределение напряжений по ширине венца и их выравнивание. Подбор $\bar{D}_3$ сводится к оптимизации геометрии продольного зазора между зубьями в плоскости зацепления. Выбор вида модификации (продольной по всей ширине венца, на его части у торца, профильной или их комбинаций) зависит от соотношения ϵ_β и ϵ_α . Модификацию, заключающуюся в корректировке угла β на угол γ_0 целесообразно делать при любом соотношении ϵ_β и ϵ_α . Криволинейная модификация продольного профиля характеризуется величиной $\Delta S(\xi_a, \xi_2)$. В общем случае $\Delta S(\xi_a, \xi_2)$ описывается сплайном, который в узлах сетки принимает значения $a_1 = \Delta S(\xi_{a,1}, \xi_{2,1}), \dots, a_{n-1} = \Delta S(\xi_{a,n-1}, \xi_{2,n-1})$. Причем $a_n = \gamma_0$. Описана организация поиска параметров модификации $\bar{D}_3(a_1, \dots, a_n)$ на ЭВМ. Напряжения вычисляются с учетом переменного режима нагружения при решении уравнений теории напряженно-деформированного состояния сопряженных колес. Предложены формулы для определения параметров модификации при двумерном векторе $\bar{D}_3$.

Глава 8. Построение методик расчетов по оценке нагрузочной способности передач.

8.1. Анализ стандартных формул для расчета местных напряжений. Обсуждается структура расчетных формул стандартных методик (согласно ГОСТ 21354-75, проектам стандартов ИСО и ДИН). Определяются основные функции (назначения) используемых в расчетных формулах коэффициентов. Оценивается степень совершенства методов определения некоторых коэффициентов. Описываются различия в понимании коэффициентов в Советском стандарте и стандарте ИСО, а также изменения содержания коэффициентов в пределах каждого стандарта.

Предложено следующее правило построения расчетных формул ин-

женерных методик. Если искомая величина (напряжение, расчетная удельная нагрузка) является функцией от x_i ($i = 1, \dots, n$) переменных, т.е. $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$, то составляются функции $\varphi_i = \varphi_i(x_2, \dots, x_n)$ при $x_1 = \text{const}_1, \dots, \varphi_{n-1} = \varphi_{n-1}(x_n)$ при $x_i = \text{const}_i$ ($i = 1, \dots, n-1$) и комбинации (коэффициенты) этих функций $K_1 = \varphi/\varphi_1, \dots, K_{n-1} = \varphi_{n-2}/\varphi_{n-1}$ такие, что расчетная формула для φ представляется тождеством $\varphi = K_1 \cdot K_2 \cdot \dots \cdot K_{n-1} \cdot \varphi_{n-1}$. Указано на недостаточную точность формулирования назначения некоторых стандартных коэффициентов, их математического описания и на несоответствие указанному правилу.

8.2. Расчеты зубчатых передач при переменных режимах нагружения. В основу расчетов кладется гипотеза линейного суммирования усталостных повреждений, которая сводит напряжения при переменных уровнях нагрузки к напряжениям эквивалентных режимов с постоянным уровнем нагрузки. В стандартных методиках вводятся дополнительные допущения о пропорциональности напряжений крутящему моменту $T_y^{1/\alpha}$ и о неизменном положении опасных точек с максимальными напряжениями на всех уровнях нагрузки. Показано, что такие допущения приводят к ошибкам, поэтому нагрузочная способность ответственных и уникальных передач должна оцениваться без таких допущений с установлением эквивалентных напряжений на основе использования систем уравнений теории напряженно-деформированного состояния сопряженных колес (универсальная методика). Для массовых расчетов эвольвентных передач целесообразны две методики: уточненная (детализированная) с организацией расчетов на ЭМ при реализации традиционной схемы расчетов напряжений объемного состояния по скорректированным напряжениям плоского состояния; упрощенная, составленная с привлечением набора номограмм и таблиц.

8.3. Коэффициенты, учитывающие распределение нагрузки. К этой группе условно отнесены коэффициенты K_α , γ_ε , K_β и K_H , которые или непосредственно характеризуют величину и распределение нагрузки в зацеплении зубьев или устанавливают связь между напряженными состояниями при различных законах распределения нагрузки. При расчетах по универсальной методике необходимость в этих коэффициентах отпадает.

Коэффициенты K_α и $\gamma_\varepsilon(Z_\varepsilon)$ взаимозависимы и служат для определения распределения нагрузки между парами зубьев. В стандартных методиках не дается четкого определения назначения каждо-

го из этих коэффициентов и их взаимной связи. Показана целесообразность объединения этих коэффициентов одним $K_d^* = F_{nj} / F_{nc}$, где F_{nj} - нагрузка на j -ю пару зубьев, F_{nc} - полная нагрузка, включающая и динамическую составляющую. Коэффициент определяется для опасных (расчетных) моментов зацепления. Оценку изгибной прочности зубьев косозубых передач (аналогично прямозубым) предложено производить в два момента зацепления как для шестерни, так и для колеса. Приведены все необходимые сведения для аналитических расчетов K_d^* и приближенного определения с помощью номограмм.

Коэффициент K_v , учитывающий динамические нагрузки, $K_v = F_{nc} / F_n$ где F_n - статическая нагрузка. Применение этого коэффициента вместе с K_d^* возможно в приближенной методике. В уточненной методике целесообразен переход к определению нагрузки на рассчитываемую пару путем непосредственного решения уравнений вида (27), минуя коэффициенты K_v и K_d^* .

Коэффициенты $K_{(H,F)\beta}$, учитывающие неравномерное распределение нагрузки по длине контактных линий. Эти коэффициенты вместе с $\gamma_\beta (Z_\beta)$ осуществляют переход от показателей плоского состояния к показателям объемного напряженного состояния. Содержание $K_{(H,F)\beta}$ зависит от содержания коэффициентов $\gamma_\beta (Z_\beta)$. Показана возможность объединения этих взаимозависимых коэффициентов. Разработаны аналитические и графические зависимости для определения коэффициентов при наличии коррекции продольных заворов между зубьями и без нее.

8.4. Показатели напряженного состояния у основания зубьев. Описаны результаты обобщения большого объема расчетов коэффициентов, учитывающих форму зубьев, концентрацию напряжений, относительный градиент напряжений для зубьев с различными параметрами исходных контуров, коэффициентами смещений. Результаты расчетов представлены в виде формул и номограмм. Число независимых переменных в формулах доведено до пяти: α , h_a^* , x , z , h_m (h_m - расстояние в долях модуля от вершины зуба до линии с нагрузкой).

8.5. Оценка надежности зубчатых передач. Построены зависимости для определения коэффициентов вариации рабочих контактных и изгибных напряжений по коэффициентам вариации исходных факторов влияния - погрешностей изготовления, внешней нагрузки. Установлены коэффициенты вариации погрешностей изготовления для серийно

изготавливаемых цементированных зубчатых колес. Коэффициенты вариации предельных напряжений представлены в функции от коэффициентов вариации факторов влияния на основе использования материалов проекта стандарта ИСО.

По результатам работы делаются следующие основные выводы:

1. Получены уравнения торцового профиля и поверхности зубьев с различными видами зацеплений, нарезанных по методу обкатки реечным инструментом или долбяком. Параметрические уравнения профиля аппроксимированы функциями явного вида, что существенно упрощает определение координат точек профиля и их производных. Вид зацепления задается геометрией исходного контура, который образован набором кривых, описанных уравнениями одинаковой структуры.

2. Решена задача определения первоначального расчетного зазора между зубьями с произвольной геометрией профиля с учетом ошибок контакта и дополнительного поворота зубчатых колес вследствие деформации зубьев.

3. Разработаны криволинейные системы координат, облегчающие учет граничных условий и описание распределения напряжений и перемещений в исследуемых областях, а также отображающие последние в простейшие по геометрии области — параллелепипеды, а при наличии обода и диска — в совокупность параллелепипедов. Исследованы особенности геометрии криволинейных систем координат и установлены области их применения. Определены законы распределения напряжений и перемещений по элементам в виде криволинейных координатных линий.

4. Создана теория напряженно-деформированного состояния сопряженных зубчатых колес, включающая определение полного объемного напряженно-деформированного состояния каждого из колес вместе с установлением размеров площадок контакта и распределения нагрузок на них при произвольном виде первоначального контакта зубьев. При этом:

4.1. Выдвинута и подтверждена экспериментальными и теоретическими исследованиями гипотеза о неискривляющихся криволинейных элементах и на основе ее использования разработана теория определения напряжений и перемещений от изгиба в зубьях, рассматриваемых как консольные пластины переменной толщины.

4.2. Разработана теория построения математических моделей трехмерного напряженно-деформированного состояния зубчатых колес

на основе вариационного подхода к решению уравнений теории упругости. Теория построения, рассчитанная на основное применение, инвариантна по отношению к геометрии поверхностей зубьев и в общем виде описывает деформации и напряжения в произвольной неортогональной криволинейной системе координат при любой заданной нагрузке. При разработке теории выполнены следующие работы, имеющие первостепенное значение:

4.2.1. Решены вопросы построения базиса конечномерных подпространств. Базис, образованный множеством кусочно-полиномиальных функций, удовлетворяет всем требованиям, обеспечения сходимости приближенного решения к точному.

4.2.2. Исследовано влияние вида подпространств и его структуры на трудоемкость и точность решения. Установлен вид подпространства и его рациональная структура, обеспечивающие наименьшие затраты времени при решении с требуемой точностью.

4.2.3. Составлен блок программ для ЭМ, реализующий теорию построения математических моделей и осуществляющих последующее решение систем алгебраических уравнений.

4.2.4. Решен комплекс вопросов, направленных на сокращение времени вычислений на ЭМ и потери точности при вычислениях. К важнейшим относятся вопросы об упорядочении матрицы алгебраических уравнений математической модели; о оставлении дополнительного варианта программ расчета элементов матрицы алгебраических уравнений, учитывающего особенности геометрии зубьев с постоянным углом подъема винтовых линий; об организации контроля за устойчивостью хода решения системы уравнений и другие.

4.3. Построены уравнения, описывающие закономерности совместного деформирования зубчатых колес во время передачи движения и равновесия статических сил и даламберовых сил инерции. Эти уравнения вместе с системами алгебраических уравнений моделей деформированного состояния каждого из сопряженных зубчатых колес образуют замкнутую систему уравнений теории напряженно-деформированного состояния сопряженных зубчатых колес.

4.4. Разработан итерационный процесс совместного решения замкнутой системы уравнений при статическом равновесии и поэтапного уточнения удельной жесткости зубьев, размеров и положения площадок контакта, распределения нагрузок на них и геометрии зазора. Доказана сходимость итерационного процесса. Для случаев отсутствия статического равновесия с целью сокращения времени вы-

числений предложено решение систем уравнений в два этапа с приближенной оценкой жесткости зубьев на первом этапе и уточненным определением квазистатического состояния сопряженных колес на втором этапе.

5. Выполнены экспериментальные исследования статических прогибов зубьев, напряжений у их оснований и в зоне контакта. Установлено влияние условий нагружения и геометрии зубьев на законы распределения напряжений и прогибов, подтверждена достоверность результатов расчетов по разработанной теории.

6. Статистическими исследованиями установлены законы распределения погрешностей окружных и основных шагов прямозубых и косозубых цилиндрических колес, а также разностей погрешностей шагов смежных пар зубьев. Применительно к статическим и динамическим расчетам зубчатых передач разработана математическая модель распределения ошибок контакта зубьев в произвольный момент их зацепления.

Доказан нормальный закон распределения показателей твердости поверхностных слоев и сердцевины зубьев, подвергнутых цементации и закалке. Установлены показатели статистического распределения.

7. Разработан синтез геометрии зубьев, исходя из обеспечения наибольшей нагрузочной способности передачи по критериям контактной и изгибной прочности. При этом:

7.1. Построены целевые функции, позволяющие подобрать геометрические параметры при разных соотношениях запасов контактной и изгибной прочности в соответствии с задаваемой вероятностью безотказной работы. При подборе параметров группы K , предназначенных в основном для изменения распределения напряжений в направлении торцовых сечений зубчатых колес, расчет целевых функций организован при постоянном уровне нагрузки. Влияние переменных режимов нагружения на перераспределения напряжений в зубчатых колесах учтено при выборе параметров группы $\bar{D}_s$, обеспечивающих рациональную геометрию продольного зазора и необходимый закон распределения эквивалентных напряжений $\sigma_E(n, F)$ по ширине венца.

7.2. Теоретическими и экспериментальными исследованиями установлена зависимость нагрузочной способности передачи от геометрии исходного контура. Сопоставления экспериментальной долго-

вечности зубчатых колес с разной геометрией зубьев с теоретической долговечностью, определяемой по разработанной теории, показали их хорошую согласованность.

7.3. Разработаны рекомендации по выбору геометрических параметров группы K . Создана программа расчета K на ЭВМ.

7.4. Многомерный вектор $\bar{D}_5$, определяющий геометрию зазора между зубьями, представлен переменными параметрами, один из которых корректирует наклон зубьев, а остальные формируют криволинейную модификацию продольного профиля.

7.5. Разработаны методологические вопросы организации подбора $\bar{D}_5$ для прямозубых и косозубых колес. Составлены программы расчета $\bar{D}_5$ на ЭВМ.

7.6. Для практического использования рекомендована двухпараметровая модификация. Предложены формулы для определения значений параметров этой модификации.

8. Разработаны вопросы построения и совершенствования методик расчета на прочность зубчатых передач. При этом:

8.1. Обоснована необходимость оценки прочности ответственных передач, работающих в условиях переменных режимов нагружения, путем непосредственного решения уравнений теории напряженно-деформированного состояния сопряженных зубчатых колес и установления эквивалентного напряжения одновременно в нескольких сечениях по ширине венца.

Получены соответствующие расчетные зависимости и составлены программы расчета напряжений на ЭВМ.

8.2. Показана целесообразность стандартизации трех методик оценки прочности передач. Первая методика универсальная, построенная на использовании подхода, описанного в предыдущем пункте. Она предназначена в основном для расчета ответственных передач. Вторая и третья - уточненная и упрощенная инженерные методики массового применения, реализующие обычные подходы к определению компонентов напряжений объемного состояния исходя из напряжений плоского состояния с привлечением строго обоснованных коэффициентов. Уточненная методика должна состоять из аналитических зависимостей (или даже уравнений), легко алгоритмизируемых для ЭВМ с небольшими затратами машинного времени на последующие практические расчеты, а упрощенная в основном включать номограммы и таблицы. При внедрении и широком использовании ЭВМ четвертого поколения преимущественное применение найдет универсальная методика. Разра-

ботаны рекомендации по построению таких методов расчетов и обеспечению их программами для ЭВМ и нормативными материалами.

8.3. Составлены правила образования расчетных формул инженерных методов. Правила определяют структуру самих формул и их коэффициентов, вводимых для учета отдельных факторов влияния. Показано, что в стандартных методиках дается нечеткое определение назначения ряда коэффициентов и их взаимной связи. Назначение некоторых коэффициентов меняется в зависимости от соотношения геометрических параметров зубчатых колес и даже от рассматриваемых моментов зацепления.

8.4. Предложено увеличить число расчетных моментов зацепления при оценке изгибной прочности косозубых передач. Получены зависимости для определения всех величин, необходимых при расчете напряжений во вновь вводимые моменты зацепления.

8.5. Показано, что в случае традиционного подхода к построению расчетных формул с помощью комбинации соответствующих функций, целесообразно определять нагрузку на рассчитываемые зубья не парами коэффициентов γ_{ε} (Z_{ε}^2) и K_{α} , а одним коэффициентом $K_{\alpha}^*(j)$. Получены номограммы и расчетные зависимости для определения такого коэффициента.

8.6. Получены расчетные зависимости для определения коэффициентов K_{β} ($K_{H\beta}$; $K_{F\beta}$) и γ_{β} , осуществляющих переход от напряжений плоского состояния к напряжениям объемного состояния. Коэффициенты K_{β} представлены в функциональной зависимости также и от параметров продольной модификации. Разработаны номограммы для определения K_{β} .

8.7. Выполнен большой объем расчетов показателей прочности (коэффициентов, учитывающих форму зубьев, концентрацию напряжений, относительный градиент напряжений) и жесткости при объемном и плоском состояниях. Для удобства практического использования результатов расчетов, полученных в виде дискретных значений функций, построены интерполяционные формулы разной структуры и сложности. Некоторые из формул приспособлены для расчетов с привлечением простейших средств вычислений, а другие - в основном только для построения расчетов на ЭВМ. Последняя группа формул охватывает широкие пределы изменения независимых переменных, число которых доведено до 5. Для показателей с часто встречающимися значениями переменных разработаны номограммы.

9. Разработан расчет зубчатых передач на надежность. Пока-

затели распределения рабочих напряжений представлены непосредственно в функции от показателей распределения характеристик исходных факторов влияния - погрешностей изготовления и внешней нагрузки.

10. Практическое применение работы отражается в следующем:

10.1. Разработаны руководящие технические материалы по проектированию зубчатых колес коробок передач автомобилей, содержащие методику расчета, нормативные материалы и комплект программ по оценке нагрузочной способности и подбору геометрии зубьев. Руководящие материалы используются Ярославским объединением "Автодизель" при проектировании новых и модернизации серийно выпускаемых коробок передач автомобилей большой грузоподъемности. Стендовые испытания и опыт эксплуатации автомобилей показал, что применение передач с геометрией, определенной по разработанной методике, в среднем повышает долговечность в 1,5 - 2,5 раза.

10.2. Пакеты прикладных программ и конкретные материалы по расчету показателей прочности и жесткости используются НПО ЦНИИТМАШ и некоторыми другими предприятиями.

10.3. Для создаваемого стандарта СЭВ "Передачи зубчатые цилиндрические. Расчет на прочность" (Тема 01.416.24-80 Плана органов СЭВ по разработке стандартов СЭВ) разработаны формулы и номограммы для определения показателей напряженного состояния зубьев и жесткости. Часть материалов включена в проект стандарта.

Основное содержание диссертации отражено в работах:

1. Брагин В.В., Тайнов А.И. Расчет на прочность зубчатых передач.- Ярославль: Изд-во ЯПИ, 1975.- 144 с.

2. Брагин В.В., Зеленев В.В. Проектирование зубчатых механизмов коробок передач автомобилей.- Ярославль: Изд-во ЯПИ, 1980.- 90 с.

3. Брагин В.В., Тайнов А.И. К расчету консольных пластин переменной толщины, нагруженных сосредоточенными силами // Тр. Горьков. политехн. ин-та: Материалы межвузов. научн.-техн. конф.- Горький, 1972.- Т. XXIII, вып. 10.- С.51-55.

4. Брагин В.В., Хренов Е.И. Определение объемного напряженно-деформированного состояния зубьев цилиндрических колес при изгибе // Детали машин.- 1980.- вып. 30.- С.3-7.

5. Braghin V.V., Hrenov E.I. Calculul starilor spatiale tensionale si de deformare ale dinitilor rotilor cilindrice la incovovare // Bull. Univ. Brasov. - 1978. - №20-A. - P.137-144.

6. Брагин В.В. Определение напряженно-деформированного состояния зубьев цилиндрических колес // Изв. вузов. Машиностроение. - 1981. - №9. - С.31-34.

7. Брагин В.В. Уравнения поверхности зубьев конических и цилиндрических колес, изготовленных методом обкатки / Ярослав. политехн. ин-т. - Ярославль, 1981. - 12 с. - Деп. в НИИНавтопром 18.05.81, №Д627 Деп.

8. Брагин В.В. Спыт использования криволинейных систем координат для определения напряженно-деформированного состояния зубьев зубчатых колес / Ярослав. политехн. ин-т. - Ярославль, 1982. - 13 с. - Деп. в НИИНавтопром 15.07.82, №787 ат-Д82 Деп.

9. Брагин В.В., Маурин Н.Н. Определение объемного напряженно-деформированного состояния зубьев цилиндрических прямозубых колес // Изв. вузов. Машиностроение. - 1982. - №1. - С.36-40.

10. Брагин В.В. Определение нагрузок, деформаций и напряжений зубьев зубчатых колес // Изв. вузов. Машиностроение. - 1983. - №3. - С.13-17.

11. Брагин В.В., Маурин Н.Н., Ходычкин В.И. Выбор параметров продольной модификации зубьев цилиндрических прямозубых колес // Изв. вузов. Машиностроение. - 1983. - №3. - С.13-17.

12. Ходычкин В.И., Зеленев В.В., Брагин В.В. Выбор геометрических параметров профиля зубьев цилиндрических зубчатых колес с эвольвентным зацеплением // Изв. вузов. Машиностроение. - 1983. - №10. - С.42-45.

13. Брагин В.В., Решетов Д.Н., Маурин Н.Н. Определение удельных нагрузок и напряжений зубьев прямозубых цилиндрических колес // Вестн. машиностроения. - 1984. - С.3-6.

14. Брагин В.В., Решетов Д.Н., Маурин Н.Н. Показатели прочности и податливости зубьев при $17,5^\circ$ профильном угле исходного контура // Изв. вузов. Машиностроение. - 1985. - №6. - С.17-20.

15. Миханович В.М., Брагин В.В. Численная реализация задачи определения нагрузок и напряжений зубьев косозубых цилиндрических передач // Изв. вузов. Машиностроение. - 1981. - №9. - С.31-34.

16. Решетов Д.Н., Голлер Д.Э., Брагин В.В. Перспективы стандартизации расчетов зубчатых передач // Вестн. машиностроения. - 1985. - №11. - С.3-7.

Подписано в печать 30.05.86. АК 00147. Формат $60 \times 84^{1/16}$. Бумага
газетная. Офсетная печать. Печ. л. 2. Тираж 100. Заказ 2227.
Бесплатно.

Типография Ярославского политехнического института.
Ярославль, ул. Советская, 14а.