

УДК 621.865.8

Кинематический анализ сферического механизма параллельной структуры с одной степенью свободы и тремя регуляторами^{*}

С.Ю. Мисюрин, Ю.А. Семенов

ФГБУН Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук

Kinematic analysis of a spherical parallel-structure mechanism with a single degree of freedom and three regulators

S.Yu. Misyurin, Yu.A. Semenov

Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences

Создание новых классов и типов механизмов параллельной структуры представляет собой актуальную задачу для различных отраслей промышленности. Выполнен кинематический анализ сферического механизма параллельной структуры с одной степенью свободы и тремя кинематическими цепями с регулируемыми кривошипами. Используются как аналитические методы решения, так и численные. Решены прямая и обратная задачи кинематики. Получены положения выходного звена. Определены и проанализированы особые положения. Показано, что особые положения не оказывают влияния на подвижность рассмотренного механизма ввиду особенностей конструкции.

EDN: ZEXFUO, <https://elibrary/zexfu>**Ключевые слова:** механизм параллельной структуры, сферический механизм, кинематический анализ, регулируемые кривошипы

The development of new classes and types of parallel-structure mechanisms is a highly relevant task for various industries. This paper presents a kinematic analysis of a spherical parallel mechanism with a single degree of freedom and three kinematic chains featuring adjustable cranks. Both analytical and numerical methods were employed. The forward and inverse kinematic problems were solved, and the positions of the output link were determined. Singular configurations were identified and analyzed. It is shown that, due to specific design features, these singular configurations do not affect the mobility of the mechanism.

EDN: ZEXFUO, <https://elibrary/zexfu>**Keywords:** parallel-structure mechanism, spherical mechanism, kinematic analysis, featuring adjustable cranks

^{*} Работа выполнена за счет средств Государственного задания, код (шифр) научной темы, присвоенной учредителем (организацией) FFGU-2024-0016.

Механизмы параллельной структуры (МПС) обладают такими преимуществами перед механизмами последовательной структуры, как повышенная точность позиционирования и ориентации выходного звена (ВЗ) в пространстве, высокие механическая жесткость, несущая способность и скорость движения. Однако для практической реализации МПС требуют большего объема исследований и анализа особенностей кинематики [1–5].

Подвид МПС, называемых сферическими, способен обеспечить чистое вращательное движение с тремя степенями свободы аналогично движениям, реализуемым, например, в лучезапястных суставах руки человека или человеческого глаза. Сферические МПС являются альтернативой традиционным роботизированным запястьям, использующим последовательное расположение звеньев [6], обеспечивая большие углы поворота ВЗ [7].

Область применения сферических МПС достаточно обширна и включает в себя как крепления рабочих органов и несущих платформ с управляемым движением [8, 9], роботизированные хирургические системы [10, 11], технические средства медицинской реабилитации [12, 13], так и технику, используемую во многих других отраслях промышленности. Среди многочисленных типов сферических МПС [14–18] наиболее изученными являются механизмы, имеющие по три вращательные кинематические пары на каждой из трех параллельных кинематических цепей [19–21].

В упомянутых работах изложены основы проектирования и кинематического анализа сферических МПС, приведены подходы и методы решения прямой и обратной задач кинематики. Однако, несмотря на обширные теоретические исследования, к настоящему времени на практике разработано и изготовлено всего несколько моделей подобных механизмов [22, 23]. Причем в основном механизмов с ограниченным диапазоном перемещения, соответствующим повороту конечных секторов вокруг вектора нормали. Например, механизм Agile Eye [9] способен поворачиваться только на 30° в каждом направлении. Подобные ограничения не позволяют полноценно использовать такие механизмы в качестве активных шаровых шарниров или ориентирующих платформ для обрабатывающих инструментов [24].

Частный случай общего сферического МПС с коллинеарным (соосным) расположением его

входных осей, как правило, не имеет такого ограничения, что потенциально позволяет его использовать для решения упомянутых задач. Впервые соосный сферический МПС описан в статье [25], где проведена оценка статических и кинематических характеристик нескольких последовательных и параллельных звеньев, имитирующих лучезапястные суставы человека. В отличие от известных аналогов, преимуществом предложенного в работе [25] манипулятора является то, что его особые положения существуют только на границах, отсутствуя внутри рабочего пространства.

Такая конфигурация изучена С.М. Госселем с соавторами в работе [26], где показано, что подобные механизмы имеют восемь решений прямой задачи кинематики. Впоследствии МПС данного типа был использован при создании воздушных и морских движителей с регулируемым вектором тяги [27, 28] и роботизированного соединительного механизма [29].

Альтернативная механическая конструкция соосного сферического МПС со скользящими приводами предложена в работах [30, 31]. Такое конструктивное исполнение увеличивает жесткость механизма за счет наличия круговой направляющей. Последующие исследования [8, 32] сосредоточены на оптимизации конструкции коаксиального сферического МПС с точки зрения кинематики и динамики, причем о наличии физической модели данных нет.

Сферические МПС с неограниченным вращением ВЗ выполняли и с другим расположением шарниров [33].

Известны также конструкции соосных сферических МПС, основанные на кинематически асимметричных звеньях, т. е. с различным сочетанием кинематических пар в каждой цепи [34–36].

Сферический МПС с одной степенью свободы и тремя кинематическими цепями с регулируемыми кривошипами подробно описан в работе [37]. В состав МПС входят жестко закрепленный на неподвижном основании 1 двигатель с прикрепленным к нему коленчатым валом 2, ось вращения которого жестко соединена с валом двигателя. Коленчатый вал состоит из трех колен с регулируемыми с помощью ползунов 3 длинами. Колена также являются кривошипами трех плоских кривошипно-коромысловых механизмов, каждый из кото-

Путем алгебраических преобразований, принимая во внимание, что из конструктивных соображений l_{15} , l_6 и l_7 представляют собой египетский треугольник с соотношением сторон 5, 3 и 4 соответственно, решения можно представить как

$$\begin{cases} x_4 = \frac{l_7^2 x_1 \pm \sqrt{l_{15}^4 (x_1^2 + y_1^2) - l_7^4 y_1^2}}{x_1^2 + y_1^2}; \\ y_4 = \frac{l_7^2 y_1 \pm \sqrt{l_{15}^4 (x_1^2 + y_1^2) - l_7^4 x_1^2}}{x_1^2 + y_1^2}; \\ \\ x_5 = \frac{l_7^2 x_2 \pm \sqrt{l_{15}^4 (x_2^2 + y_2^2) - l_7^4 y_2^2}}{x_2^2 + y_2^2}; \\ y_5 = \frac{l_7^2 y_2 \pm \sqrt{l_{15}^4 (x_2^2 + y_2^2) - l_7^4 x_2^2}}{x_2^2 + y_2^2}; \\ \\ x_6 = \frac{l_7^2 x_3 \pm \sqrt{l_{15}^4 (x_3^2 + y_3^2) - l_7^4 y_3^2}}{x_3^2 + y_3^2}; \\ y_6 = \frac{l_7^2 y_3 \pm \sqrt{l_{15}^4 (x_3^2 + y_3^2) - l_7^4 x_3^2}}{x_3^2 + y_3^2}. \end{cases}$$

Каждая из систем уравнений имеет два возможных положения кинематической пары 56. Эти решения соответствуют двум вариантам сборки МПС, и выбор между ними осуществляется из конструктивных соображений.

Зная позицию кинематической пары 56, позицию кинематической пары 45 однозначно определяем по следующим выражениям:

$$\begin{cases} x_7 = -l_{51} \frac{x_4}{l_{15}}; \\ y_7 = -l_{51} \frac{y_4}{l_{15}}; \\ \\ x_8 = \frac{l_{51}}{l_{15}} [x_5 \cos(2\pi/3) - y_5 \sin(2\pi/3)]; \\ y_8 = \frac{l_{51}}{l_{15}} [y_5 \cos(2\pi/3) + x_5 \sin(2\pi/3)]; \\ \\ x_9 = \frac{l_{51}}{l_{15}} [x_6 \cos(2\pi/3) + y_6 \sin(2\pi/3)]; \\ y_9 = \frac{l_{51}}{l_{15}} [y_6 \cos(2\pi/3) - x_6 \sin(2\pi/3)]. \end{cases}$$

Определив положение кинематических пар 45, находим положение пары 34, а значит, и угол поворота двигателя φ из следующих систем уравнений:

$$\begin{cases} (x_{10} - x_7)^2 + (y_{10} - y_7)^2 = l_3^2; \\ (x_{10} - x_d)^2 + (y_{10} - y_d)^2 = \Delta_1^2; \\ \\ (x_{11} - x_8)^2 + (y_{11} - y_8)^2 = l_3^2; \\ (x_{11} - x_d)^2 + (y_{11} - y_d)^2 = \Delta_2^2; \\ \\ (x_{12} - x_9)^2 + (y_{12} - y_9)^2 = l_3^2; \\ (x_{12} - x_d)^2 + (y_{12} - y_d)^2 = \Delta_3^2, \end{cases} \quad (1)$$

где x_d , y_d — координаты оси вала двигателя.

В выбранной системе координат $y_d = 0$, а $x_d = -l_0$, где l_0 — расстояние между центрами неподвижных осей. С учетом соотношений

$$\begin{cases} x_{10} - x_d = \Delta_1 \cos \varphi; & y_{10} = \Delta_1 \sin \varphi; \\ x_{11} - x_d = \Delta_2 \cos \varphi; & y_{11} = \Delta_2 \sin \varphi; \\ x_{12} - x_d = \Delta_3 \cos \varphi; & y_{12} = \Delta_3 \sin \varphi \end{cases} \quad (2)$$

вторые уравнения обратятся в тождества, а первые примут вид

$$\begin{cases} (\Delta_1 \cos \varphi - x_7 + x_d)^2 + (\Delta_1 \sin \varphi - y_7)^2 = l_3^2; \\ (\Delta_2 \cos \varphi - x_8 + x_d)^2 + (\Delta_2 \sin \varphi - y_8)^2 = l_3^2; \\ (\Delta_3 \cos \varphi - x_9 + x_d)^2 + (\Delta_3 \sin \varphi - y_9)^2 = l_3^2. \end{cases}$$

Отсюда после алгебраических преобразований получаем

$$\begin{cases} \varphi = \sin^{-1} \left(\frac{\Delta_1^2 + l_0^2}{2\Delta_1 \sqrt{(x_7 - l_0)^2 + y_7^2}} \right) - \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{y_7}{x_7 - l_0} \right); \\ \varphi = \sin^{-1} \left(\frac{\Delta_2^2 + l_0^2}{2\Delta_2 \sqrt{(x_8 - l_0)^2 + y_8^2}} \right) - \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{y_8}{x_8 - l_0} \right); \\ \varphi = \sin^{-1} \left(\frac{\Delta_3^2 + l_0^2}{2\Delta_3 \sqrt{(x_9 - l_0)^2 + y_9^2}} \right) - \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{y_9}{x_9 - l_0} \right). \end{cases}$$

Таким образом, обратная задача кинематики имеет два решения, соответствующих двум вариантам сборки рассматриваемого МПС.

Прямая задача кинематики. В решении прямой задачи известен угол поворота двигателя φ и положения регуляторов Δ_1 , Δ_2 и Δ_3 . Чтобы определить x_7 , y_7 , x_8 , y_8 , x_9 и y_9 , учитывая соотношения (2), запишем следующие системы уравнений:

$$\begin{cases} (x_7 - \Delta_1 \cos \varphi + l_0)^2 + (y_7 - \Delta_1 \sin \varphi)^2 = l_4^2; \\ x_7^2 + y_7^2 = l_{51}^2; \\ \\ (x_8 - \Delta_2 \cos \varphi + l_0)^2 + (y_8 - \Delta_2 \sin \varphi)^2 = l_4^2; \\ x_8^2 + y_8^2 = l_{51}^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x_9 - \Delta_3 \cdot \cos \varphi + l_0)^2 + (y_9 - \Delta_3 \cdot \sin \varphi)^2 = l_4^2; \\ x_9^2 + y_9^2 = l_{51}^2. \end{cases}$$

Эти уравнения имеют два решения, выбор между которыми осуществляется из конструктивных соображений, например, путем установки ограничителя.

Зная x_7 , y_7 , x_8 , y_8 , x_9 и y_9 , однозначно получаем жестко связанные с ними значения x_4 , y_4 , x_5 , y_5 , x_6 и y_6 по выражениям

$$\begin{cases} x_4 = -l_{15} \frac{x_7}{l_{51}}; \\ y_4 = -l_{15} \frac{y_7}{l_{51}}; \\ x_5 = \frac{l_{15}}{l_{51}} [x_8 \cos(2\pi/3) - y_8 \sin(2\pi/3)]; \\ y_5 = \frac{l_{15}}{l_{51}} [y_8 \cos(2\pi/3) + x_8 \sin(2\pi/3)]; \\ x_6 = \frac{l_{15}}{l_{51}} [x_9 \cos(2\pi/3) + y_9 \sin(2\pi/3)]; \\ y_6 = \frac{l_{15}}{l_{51}} [y_9 \cos(2\pi/3) - x_9 \sin(2\pi/3)]. \end{cases}$$

Определив x_4 , y_4 , x_5 , y_5 , x_6 , y_6 и зная, что $z_4 = z_5 = z_6 = 0$, можно составить уравнения для точек (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) и (x_3, y_3, z_3) . Эти уравнения несколько отличаются от приведенных в работе [37] в сторону уменьшения степени системы. Для снижения степени использована конструктивная особенность, что угол между любыми двумя векторами из $[x_1, y_1, z_1]$, $[x_2, y_2, z_2]$ и $[x_3, y_3, z_3]$ равен 120° :

$$\begin{cases} (x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2 + z_1^2 = l_2^6; \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = l_7^2; \\ (x_2 - x_5)^2 + (y_2 - y_5)^2 + z_2^2 = l_2^6; \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = l_7^2; \\ (x_3 - x_6)^2 + (y_3 - y_6)^2 + z_3^2 = l_2^6; \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 = l_7^2; \\ x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = -l_7^2 / 2; \\ x_1 x_3 + y_1 y_3 + z_1 z_3 = -l_7^2 / 2; \\ x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = -l_7^2 / 2. \end{cases} \quad (3)$$

Для решения прямой задачи использована система Maple при значениях исходных параметров, приведенных в табл. 1. Значения координат промежуточных точек указаны в табл. 2.

Таблица 1

Исходные параметры

Параметр	Значение	Параметр	Значение
φ , рад	0	l_6 , мм	90
Δ_3 , мм	-40	Δ_2 , мм	50
l_{15} , мм	150	l_4 , мм	250
Δ_1 , мм	-30	l_{51} , мм	250
l_0 , мм	400	l_7 , мм	120

Таблица 2

Значения координат промежуточных точек

Координата	Значение, мм	Координата	Значение, мм
x_7	-215,000	x_4	129,000
y_7	-127,574	y_4	76,544
x_8	-175,000	x_5	40,270
y_8	178,536	y_5	-144,493
x_9	-220,000	x_6	-158,770
y_9	-118,743	y_6	37,372

В результате расчетов и выбора отрицательной сборки получаем координаты положения точек ВЗ, приведенные в табл. 3, где варианты решения задачи соответствуют рис. 2.

Как следует из табл. 3, четыре действительных решения системы уравнений образуют две пары, соответствующие двум вариантам сборки, а внутри пары решения симметричны относительно плоскости XOY.

Внешний вид ВЗ при решении прямой задачи показан на рис. 2, где окружностью обозначены возможные положения звена 5 (см. рис. 1).

Особые положения рассматриваемого МПС.

Для определения особых положений составляем матрицу Якоби системы (3)

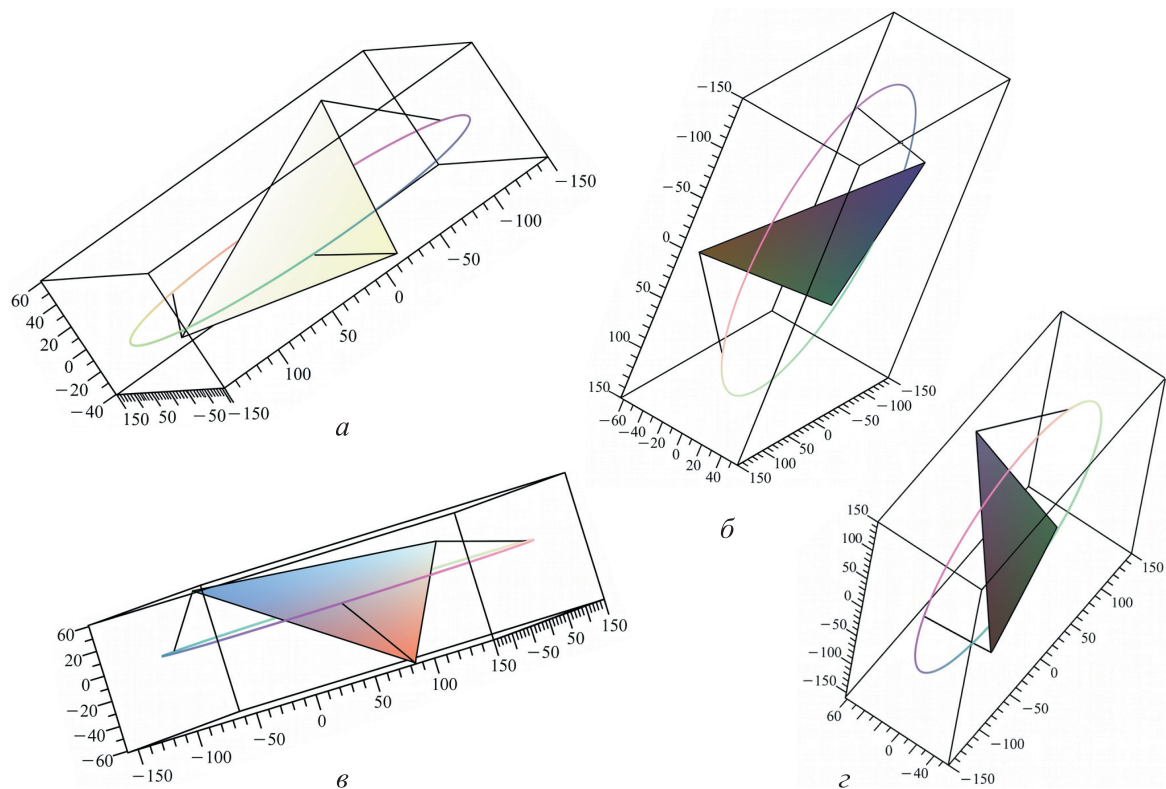
$$\begin{bmatrix} 2x_1 - 2x_4 & 2y_1 - 2y_4 & 2z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2x_1 & 2y_1 & 2z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_2 - 2x_5 & 2y_2 - 2y_5 & 2z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_2 & 2y_2 & 2z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x_3 - 2x_6 & 2y_3 - 2y_6 & 2z_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x_3 & 2y_3 & 2z_3 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 & y_3 & z_3 & x_2 & y_2 & z_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Очевидным представляется решение $z_1 = z_2 = z_3 = 0$, что соответствует нахождению ВЗ в плоскости XOY и подтверждает правильность решения прямой задачи. Это особое положение

Таблица 3

Координаты положения точек ВЗ

Вариант решения задачи	x_1 , мм	y_1 , мм	z_1 , мм	x_2 , мм	y_2 , мм	z_2 , мм	x_3 , мм	y_3 , мм	z_3 , мм
<i>a</i>	47,31	108,40	-20,29	62,47	-82,25	61,10	109,78	26,15	40,80
<i>б</i>	47,31	108,40	20,29	62,47	-82,25	-61,10	109,78	26,15	-40,80
<i>в</i>	100,71	18,40	-62,60	-17,36	-104,50	56,39	83,36	86,10	6,21
<i>г</i>	100,71	18,40	62,60	-17,36	-104,50	-56,39	83,36	86,10	-6,21

Рис. 2. Схемы положений ВЗ рассматриваемого МПС, соответствующих левой (*a*, *в*) и правой (*б*, *г*) сборкам

представляет собой переход от решений *a* и *в* к решениям *б* и *г* (см. рис. 2) и, наоборот.

Разложение определителя матрицы Якоби на сумму алгебраических дополнений представляем в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 2x_1 - 2x_4 & 2y_1 - 2y_4 & 2z_1 \\ 2x_1 & 2y_1 & 2z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix} \times \\
 & \times \begin{bmatrix} 2x_2 - 2x_5 & 2y_2 - 2y_5 & 2z_2 \\ 2x_2 & 2y_2 & 2z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \times \\
 & \times \begin{bmatrix} 2x_3 - 2x_6 & 2y_3 - 2y_6 & 2z_3 \\ 2x_3 & 2y_3 & 2z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \begin{bmatrix} 2x_1 - 2x_4 & 2y_1 - 2y_4 & 2z_1 \\ 2x_1 & 2y_1 & 2z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \times \\
 & \times \begin{bmatrix} 2x_3 - 2x_6 & 2y_3 - 2y_6 & 2z_3 \\ 2x_3 & 2y_3 & 2z_3 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix} \times \\
 & \times \begin{bmatrix} 2x_2 - 2x_5 & 2y_2 - 2y_5 & 2z_2 \\ 2x_2 & 2y_2 & 2z_2 \\ x_1 & x_1 & z_1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Анализ этого якобиана позволяет с достаточной уверенностью утверждать, что все прочие решения лежат вне рабочей зоны ВЗ, которое ограничено сферой радиусом l_7 .

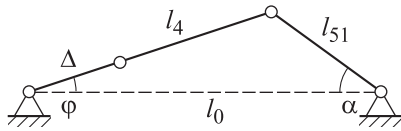


Рис. 3. Схема звеньев с максимальным значением угла α

Из решения обратной задачи кинематики следует, что $z_1 = z_2 = z_3 = 0$ соответствует $x_7 = x_8 = x_9$ и $y_7 = y_8 = y_9$, что соответствует $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3$. В этом случае ВЗ совершает поворот вокруг оси Z, и хотя МПС и находится в особом положении, избыточной подвижности не образуется. Однако часть МПС (звенья 1–5) представляет собой три расположенных параллельно плоских кривошипно-коромысловых механизма, обратная задача которых имеет два решения. Поэтому есть возможность попадания во второе решение при некоторых значениях φ и Δ . Очевидно, что при $\Delta_1 \neq \Delta_2 \neq \Delta_3$ особое положение не наступает, так как три различные точки не могут соответствовать двум решениям. Остается вариант $\Delta_1 = \Delta_2 \neq \Delta_3$, т. е. для наступления особого положения как минимум два регулятора должны быть в идентичном положении.

Решая систему (1) относительно Δ и применяя теорему Виета, получаем следующее выражение:

$$|\Delta_3| = \frac{2l_0 l_{51} \cos \alpha}{|\Delta_{1,2}|},$$

где α — угол между осью X и звеном 5;

Значение $|\Delta_3|$ будет минимальным, когда $|\Delta_{1,2}|$ максимальны, а $\alpha \rightarrow \pm\pi/2$. Наиболее близкое к $\pm\pi/2$ значение можно получить в случае, показанном на рис. 3.

В рассматриваемом случае зависимость принимает вид

$$|\Delta_3| = \frac{l_0^2 + l_{51}^2 - (|\Delta_{1,2}| + l_4)^2}{|\Delta_{1,2}|}.$$

С учетом того, что конструктивно наибольшее значение $|\Delta| = 100$ мм, и, исследовав эту функцию на минимум, минимальное значение $|\Delta_3| = 1000$ мм при $|\Delta_{1,2}| = 100$ мм, что находится вне допустимых значений конструктивных параметров.

Выводы

1. Выполнен кинематический анализ сферического МПС с одной степенью свободы и тремя регулируемыми кривошипами. Предложено решение прямой и обратной задач кинематики. Получены положения ВЗ. Обратная задача имеет аналитическое решение, которое позволяет подобрать длины варьируемых параметров для получения необходимой, заранее заданной, траектории ВЗ при изменении входных значений МПС. Прямую задачу можно решить только численно из-за высокого порядка системы уравнений кинематики механизма.

2. Проведено исследование особых положений МПС, основанное на исследовании матрицы Якоби, полученной из уравнений его связи. Показано, что полученный якобиан распадается на произведение матриц меньшей размерности, что дало возможность доказать единственность особого положения в рабочей зоне МПС. Отмечено, что в единственном особом положении не происходит ни потери подвижности, ни избыточной подвижности.

Литература

- [1] Huang T., Li Z., Li M. et al. Conceptual design and dimensional synthesis of a novel 2-DOF translational parallel robot for pick-and place operations. *J. Mech. Des.*, 2003, vol. 126, no. 3, pp. 449–455, doi: <https://doi.org/10.1115/1.1711822>
- [2] Wu J., Wang J., Wang L. et al. Dynamics and control of a planar 3-DOF parallel manipulator with actuation redundancy. *Mech. Mach. Theory*, 2009, vol. 44, no. 4, pp. 835–849, doi: <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2008.04.002>
- [3] Wu J., Wang J., Wang L. et al. Performance comparison of three planar 3-DOF parallel manipulators with 4-RRR, 3-RRR and 2-RRR structures. *Mechatronics*, 2010, vol. 20, no. 4, pp. 510–517, doi: <https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2010.04.012>
- [4] Dong W., Du Z., Xiao Y. et al. Development of a parallel kinematic motion simulator platform. *Mechatronics*, 2013, vol. 23, no. 1, pp. 154–161, doi: <https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2012.10.004>

- [5] Wu J., Gao Y., Zhang B. et al. Workspace and dynamic performance evaluation of the parallel manipulators in a spray-painting equipment. *Robot. Comput.-Integr. Manuf.*, 2017, vol. 44, pp. 199–207, doi: <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2016.09.002>
- [6] Bajaj N.M., Spiers A.J., Dollar A.M. State of the art in artificial wrists: a review of prosthetic and robotic wrist design. *IEEE Trans. Robot.*, 2019, vol. 35, no. 1, pp. 261–277, doi: <https://doi.org/10.1109/TRO.2018.2865890>
- [7] Bai S., Li X., Angeles J. A review of spherical motion generation using either spherical parallel manipulators or spherical motors. *Mech. Mach. Theory*, 2019, vol. 140, pp. 377–388, doi: <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2019.06.012>
- [8] Wu G., Bai S. Design and kinematic analysis of a 3-RRR spherical parallel manipulator reconfigured with four-bar linkages. *Robot. Comput.-Integr. Manuf.*, 2019, vol. 56, pp. 55–65, doi: <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2018.08.006>
- [9] Gosselin C.M., Hamel J.-F. The agile eye: a high-performance three-degree-of-freedom camera-orienting device. *IEEE ICRA*, 1994, vol. 1, pp. 781–786, doi: <https://doi.org/10.1109/ROBOT.1994.351393>
- [10] Saa H., Laribi M.A., Zeghloul S. Optimal torque distribution for a redundant 3-RRR spherical parallel manipulator used as a haptic medical device. *Robot. Auton. Syst.*, 2017, vol. 89, pp. 40–50, doi: <https://doi.org/10.1016/j.robot.2016.12.005>
- [11] Chaker A., Mlika A., Laribi M.A. et al. Synthesis of spherical parallel manipulator for dexterous medical task. *Front. Mech. Eng.*, 2012, vol. 7, no. 2, pp. 150–162, doi: <https://doi.org/10.1007/s11465-012-0325-4>
- [12] Du Y., Li R., Li D. et al. An ankle rehabilitation robot based on 3-RRS spherical parallel mechanism. *Adv. Mech. Eng.*, 2017, vol. 9, no. 8, doi: <https://doi.org/10.1177/1687814017718112>
- [13] Malosio M., Negri S.P., Pedrocchi N. et al. A spherical parallel three degrees-of-freedom robot for ankle-foot neuro-rehabilitation. *2012 Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, 2012, pp. 3356–3359, doi: <https://doi.org/10.1109/EMBC.2012.6346684>
- [14] Fang Y., Tsai L.-W. Structure synthesis of a class of 3-DOF rotational parallel manipulators. *IEEE Trans. Robot. Autom.*, 2004, vol. 20, no. 1, pp. 117–121, doi: <https://doi.org/10.1109/TRA.2003.819597>
- [15] Kong X., Gosselin C.M. Type synthesis of 3-DOF spherical parallel manipulators based on screw theory. *J. Mech. Des.*, 2004, vol. 126, no. 1, pp. 101–108, doi: <https://doi.org/10.1115/1.1637655>
- [16] Kong X., Gosselin C.M. Type synthesis of three-degree-of-freedom spherical parallel manipulators. *Int. J. Robot. Res.*, 2004, vol. 23, no. 3, pp. 237–245, doi: <https://doi.org/10.1177/0278364904041562>
- [17] Karouia M., Herve J.M. Non-overconstrained 3-DOF spherical parallel manipulators of type: 3-RCC, 3-CCR, 3-CRC. *Robotica*, 2006, vol. 24, no. 1, pp. 85–94, doi: <https://doi.org/10.1017/S0263574705001827>
- [18] Qi Y., Sun T., Song Y. et al. Topology synthesis of three-legged spherical parallel manipulators employing Lie group theory. *Proc. Inst. Mech. Eng. C*, 2015, vol. 229, no. 10, pp. 1873–1886, doi: <https://doi.org/10.1177/0954406214549787>
- [19] Gosselin C.M., Angeles J. The optimum kinematic design of a spherical three-degree-of-freedom parallel manipulator. *J. Mech. Transm. Autom. Des.*, 1989, vol. 111, no. 2, pp. 202–207, doi: <https://doi.org/10.1115/1.3258901>
- [20] Gosselin C.M., Lavoie E. On the kinematic design of spherical three-degree-of-freedom parallel manipulators. *Int. J. Robot. Res.*, 1993, vol. 12, no. 4, pp. 394–402, doi: <https://doi.org/10.1177/027836499301200406>
- [21] Gosselin C.M., Sefrioui J., Richard M.J. On the direct kinematics of spherical three-degree-of-freedom parallel manipulators of general architecture. *J. Mech. Des.*, 1994, vol. 116, no. 2, pp. 594–598, doi: <https://doi.org/10.1115/1.2919419>
- [22] Gosselin C.M., St-Pierre E., Gagne M. On the development of the Agile Eye. *IEEE Robot. Autom. Mag.*, 1996, vol. 3, no. 4, pp. 29–37, doi: <https://doi.org/10.1109/100.556480>

- [23] Birglen L., Gosselin C.M., Pouliot N. et al. SHaDe, a new 3-DOF haptic device. *IEEE Trans. Robot. Autom.*, 2002, vol. 18, no. 2, pp. 166–175, doi: <https://doi.org/10.1109/TRA.2002.999645>
- [24] Wu G., Zou P. Comparison of 3-DOF asymmetrical spherical parallel manipulators with respect to motion/force transmission and stiffness. *Mech. Mach. Theory*, 2016, vol. 105, pp. 369–387, doi: <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2016.07.017>
- [25] Asada H., Granito J. Kinematic and static characterization of wrist joints and their optimal design. *IEEE ICRA*, 1985, pp. 244–250, doi: <https://doi.org/10.1109/ROBOT.1985.1087324>
- [26] Gosselin C.M., Sefrioui J., Richard M. On the direct kinematics of spherical three-degree-of-freedom parallel manipulators with a coplanar platform. *J. Mech. Des.*, 1994, vol. 116, no. 2, pp. 587–593, doi: <https://doi.org/10.1115/1.2919418>
- [27] Cavallo E., Michelini R.C., Filaretov V.F. Conceptual design of an AUV equipped with a three degrees of freedom vectored thruster. *J. Intell. Robot. Syst.*, 2004, vol. 39, no. 4, pp. 365–391, doi: <https://doi.org/10.1023/B:JINT.0000026081.75417.50>
- [28] Sudki B., Lauria M., Noca F. Robotic penguin-like propulsor with novel spherical joint. *Proc. Third Int. Symposium on Marine Propulsors*, 2013. URL: https://www.researchgate.net/publication/262932918_Robotic_Penguin-like_Propulsor_with_Novel_Spherical_Joint
- [29] Lee J., Noh J., Lee S. et al. A novel 4-DoF robotic link mechanism with E-CoSMo: kinematics-based torque analysis. *IEEE/RSJ IROS*, 2019, vol. 18, pp. 3577–3582, doi: <https://doi.org/10.1109/IROS40897.2019.8967851>
- [30] Bai S., Hansen M.R. Evaluation of workspace of a spherical robotic wrist. *IEEE/ASME AIM*, 2007, doi: <https://doi.org/10.1109/AIM.2007.4412458>
- [31] Bai S. Optimum design of spherical parallel manipulators for a prescribed workspace. *Mech. Mach. Theory*, 2010, vol. 45, no. 2, pp. 200–211, doi: <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2009.06.007>
- [32] Wu G., Caro S., Bai S. et al. Dynamic modeling and design optimization of a 3-DOF spherical parallel manipulator. *Robot. Auton. Syst.*, 2014, vol. 62, no. 10, pp. 1377–1386, doi: <https://doi.org/10.1016/j.robot.2014.06.006>
- [33] Enferadi J., Shahi A. On the position analysis of a new spherical parallel robot with orientation applications. *Robot. Comput.-Integr. Manuf.*, 2016, vol. 37, pp. 151–161, doi: <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2015.09.004>
- [34] Karouia M., Herve J.M. Asymmetrical 3-dof spherical parallel mechanisms. *Eur. J. Mech. A Solids*, 2005, vol. 24, no. 1, pp. 47–57, doi: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2004.10.001>
- [35] Wu G., Caro S., Wang J. Design and transmission analysis of an asymmetrical spherical parallel manipulator. *Mech. Mach. Theory*, 2015, vol. 94, pp. 119–131, doi: <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2015.07.012>
- [36] Wu G. Parameter excited instabilities of a 2upu-RUR RPS spherical parallel manipulator with a driven universal joint. *J. Mech. Des.*, 2018, vol. 140, no. 9, pp. 292–303, doi: <https://doi.org/10.1115/1.4040351>
- [37] Семенов Ю.А. Структурный синтез сферического механизма с тремя регулируемыми кинематическими цепями. *Машиностроение и инженерное образование*, 2025, № 2-3, с. 35–43, doi: https://doi.org/10.52261/18151051_2025_2-3_35

References

- [1] Huang T., Li Z., Li M. et al. Conceptual design and dimensional synthesis of a novel 2-DOF translational parallel robot for pick-and place operations. *J. Mech. Des.*, 2003, vol. 126, no. 3, pp. 449–455, doi: <https://doi.org/10.1115/1.1711822>
- [2] Wu J., Wang J., Wang L. et al. Dynamics and control of a planar 3-DOF parallel manipulator with actuation redundancy. *Mech. Mach. Theory*, 2009, vol. 44, no. 4, pp. 835–849, doi: <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2008.04.002>
- [3] Wu J., Wang J., Wang L. et al. Performance comparison of three planar 3-DOF parallel manipulators with 4-RRR, 3-RRR and 2-RRR structures. *Mechatronics*, 2010, vol. 20, no. 4, pp. 510–517, doi: <https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2010.04.012>

- [4] Dong W., Du Z., Xiao Y. et al. Development of a parallel kinematic motion simulator platform. *Mechatronics*, 2013, vol. 23, no. 1, pp. 154–161, doi: <https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2012.10.004>
- [5] Wu J., Gao Y., Zhang B. et al. Workspace and dynamic performance evaluation of the parallel manipulators in a spray-painting equipment. *Robot. Comput.-Integr. Manuf.*, 2017, vol. 44, pp. 199–207, doi: <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2016.09.002>
- [6] Bajaj N.M., Spiers A.J., Dollar A.M. State of the art in artificial wrists: a review of prosthetic and robotic wrist design. *IEEE Trans. Robot.*, 2019, vol. 35, no. 1, pp. 261–277, doi: <https://doi.org/10.1109/TRO.2018.2865890>
- [7] Bai S., Li X., Angeles J. A review of spherical motion generation using either spherical parallel manipulators or spherical motors. *Mech. Mach. Theory*, 2019, vol. 140, pp. 377–388, doi: <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2019.06.012>
- [8] Wu G., Bai S. Design and kinematic analysis of a 3-RRR spherical parallel manipulator reconfigured with four-bar linkages. *Robot. Comput.-Integr. Manuf.*, 2019, vol. 56, pp. 55–65, doi: <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2018.08.006>
- [9] Gosselin C.M., Hamel J.-F. The agile eye: a high-performance three-degree-of-freedom camera-orienting device. *IEEE ICRA*, 1994, vol. 1, pp. 781–786, doi: <https://doi.org/10.1109/ROBOT.1994.351393>
- [10] Saa H., Laribi M.A., Zeghloul S. Optimal torque distribution for a redundant 3-RRR spherical parallel manipulator used as a haptic medical device. *Robot. Auton. Syst.*, 2017, vol. 89, pp. 40–50, doi: <https://doi.org/10.1016/j.robot.2016.12.005>
- [11] Chaker A., Mlika A., Laribi M.A. et al. Synthesis of spherical parallel manipulator for dexterous medical task. *Front. Mech. Eng.*, 2012, vol. 7, no. 2, pp. 150–162, doi: <https://doi.org/10.1007/s11465-012-0325-4>
- [12] Du Y., Li R., Li D. et al. An ankle rehabilitation robot based on 3-RRS spherical parallel mechanism. *Adv. Mech. Eng.*, 2017, vol. 9, no. 8, doi: <https://doi.org/10.1177/1687814017718112>
- [13] Malosio M., Negri S.P., Pedrocchi N. et al. A spherical parallel three degrees-of-freedom robot for ankle-foot neuro-rehabilitation. *2012 Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, 2012, pp. 3356–3359, doi: <https://doi.org/10.1109/EMBC.2012.6346684>
- [14] Fang Y., Tsai L.-W. Structure synthesis of a class of 3-DOF rotational parallel manipulators. *IEEE Trans. Robot. Autom.*, 2004, vol. 20, no. 1, pp. 117–121, doi: <https://doi.org/10.1109/TRA.2003.819597>
- [15] Kong X., Gosselin C.M. Type synthesis of 3-DOF spherical parallel manipulators based on screw theory. *J. Mech. Des.*, 2004, vol. 126, no. 1, pp. 101–108, doi: <https://doi.org/10.1115/1.1637655>
- [16] Kong X., Gosselin C.M. Type synthesis of three-degree-of-freedom spherical parallel manipulators. *Int. J. Robot. Res.*, 2004, vol. 23, no. 3, pp. 237–245, doi: <https://doi.org/10.1177/0278364904041562>
- [17] Karouia M., Herve J.M. Non-overconstrained 3-DOF spherical parallel manipulators of type: 3-RCC, 3-CCR, 3-CRC. *Robotica*, 2006, vol. 24, no. 1, pp. 85–94, doi: <https://doi.org/10.1017/S0263574705001827>
- [18] Qi Y., Sun T., Song Y. et al. Topology synthesis of three-legged spherical parallel manipulators employing Lie group theory. *Proc. Inst. Mech. Eng. C*, 2015, vol. 229, no. 10, pp. 1873–1886, doi: <https://doi.org/10.1177/0954406214549787>
- [19] Gosselin C.M., Angeles J. The optimum kinematic design of a spherical three-degree-of-freedom parallel manipulator. *J. Mech. Transm. Autom. Des.*, 1989, vol. 111, no. 2, pp. 202–207, doi: <https://doi.org/10.1115/1.3258901>
- [20] Gosselin C.M., Lavoie E. On the kinematic design of spherical three-degree-of-freedom parallel manipulators. *Int. J. Robot. Res.*, 1993, vol. 12, no. 4, pp. 394–402, doi: <https://doi.org/10.1177/027836499301200406>
- [21] Gosselin C.M., Sefrioui J., Richard M.J. On the direct kinematics of spherical three-degree-of-freedom parallel manipulators of general architecture. *J. Mech. Des.*, 1994, vol. 116, no. 2, pp. 594–598, doi: <https://doi.org/10.1115/1.2919419>

- [22] Gosselin C.M., St-Pierre E., Gagne M. On the development of the Agile Eye. *IEEE Robot. Autom. Mag.*, 1996, vol. 3, no. 4, pp. 29–37, doi: <https://doi.org/10.1109/100.556480>
- [23] Birglen L., Gosselin C.M., Pouliot N. et al. SHaDe, a new 3-DOF haptic device. *IEEE Trans. Robot. Autom.*, 2002, vol. 18, no. 2, pp. 166–175, doi: <https://doi.org/10.1109/TRA.2002.999645>
- [24] Wu G., Zou P. Comparison of 3-DOF asymmetrical spherical parallel manipulators with respect to motion/force transmission and stiffness. *Mech. Mach. Theory*, 2016, vol. 105, pp. 369–387, doi: <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2016.07.017>
- [25] Asada H., Granito J. Kinematic and static characterization of wrist joints and their optimal design. *IEEE ICRA*, 1985, pp. 244–250, doi: <https://doi.org/10.1109/ROBOT.1985.1087324>
- [26] Gosselin C.M., Sefrioui J., Richard M. On the direct kinematics of spherical three-degree-of-freedom parallel manipulators with a coplanar platform. *J. Mech. Des.*, 1994, vol. 116, no. 2, pp. 587–593, doi: <https://doi.org/10.1115/1.2919418>
- [27] Cavallo E., Michelini R.C., Filaretov V.F. Conceptual design of an AUV equipped with a three degrees of freedom vectored thruster. *J. Intell. Robot. Syst.*, 2004, vol. 39, no. 4, pp. 365–391, doi: <https://doi.org/10.1023/B:JINT.0000026081.75417.50>
- [28] Sudki B., Lauria M., Noca F. Robotic penguin-like propulsor with novel spherical joint. *Proc. Third Int. Symposium on Marine Propulsors*, 2013. URL: https://www.researchgate.net/publication/262932918_Robotic_Penguin-like_Propulsor_with_Novel_Spherical_Joint
- [29] Lee J., Noh J., Lee S. et al. A novel 4-DoF robotic link mechanism with E-CoSMo: kinematics-based torque analysis. *IEEE/RSJ IROS*, 2019, vol. 18, pp. 3577–3582, doi: <https://doi.org/10.1109/IROS40897.2019.8967851>
- [30] Bai S., Hansen M.R. Evaluation of workspace of a spherical robotic wrist. *IEEE/ASME AIM*, 2007, doi: <https://doi.org/10.1109/AIM.2007.4412458>
- [31] Bai S. Optimum design of spherical parallel manipulators for a prescribed workspace. *Mech. Mach. Theory*, 2010, vol. 45, no. 2, pp. 200–211, doi: <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2009.06.007>
- [32] Wu G., Caro S., Bai S. et al. Dynamic modeling and design optimization of a 3-DOF spherical parallel manipulator. *Robot. Auton. Syst.*, 2014, vol. 62, no. 10, pp. 1377–1386, doi: <https://doi.org/10.1016/j.robot.2014.06.006>
- [33] Enferadi J., Shahi A. On the position analysis of a new spherical parallel robot with orientation applications. *Robot. Comput.-Integr. Manuf.*, 2016, vol. 37, pp. 151–161, doi: <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2015.09.004>
- [34] Karouia M., Herve J.M. Asymmetrical 3-dof spherical parallel mechanisms. *Eur. J. Mech. A Solids*, 2005, vol. 24, no. 1, pp. 47–57, doi: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2004.10.001>
- [35] Wu G., Caro S., Wang J. Design and transmission analysis of an asymmetrical spherical parallel manipulator. *Mech. Mach. Theory*, 2015, vol. 94, pp. 119–131, doi: <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2015.07.012>
- [36] Wu G. Parameter excited instabilities of a 2upu-RUR RPS spherical parallel manipulator with a driven universal joint. *J. Mech. Des.*, 2018, vol. 140, no. 9, pp. 292–303, doi: <https://doi.org/10.1115/1.4040351>
- [37] Semenov Yu.A. Structural synthesis of a spherical mechanism with three adjustable kinematic circuits. *Mashinostroenie i inzhenernoe obrazovanie* [Mechanical Engineering and Engineering Education], 2025, no. 2-3, pp. 35–43, doi: https://doi.org/10.52261/18151051_2025_2-3_35 (in Russ.).

Статья поступила в редакцию 20.07.2026

Информация об авторах

МИСЮРИН Сергей Юрьевич — доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией механики и систем управления приводами. ФГБУН Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук (101000, Москва, Российская Федерация, Малый Харитоньевский переулок, д. 4, e-mail: ssmmrr@mail.ru).

СЕМЕНОВ Юрий Алексеевич — младший научный сотрудник лаборатории «Механики и систем управления приводами». ФГБУН Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук (101000, Москва, Российская Федерация, Малый Харитоньевский переулок, д. 4, e-mail: shooshpanovsky@gmail.com).

Information about the authors

MISYURIN Segrey Yurievich — Doctor of Science (Physics and Maths), Head of Laboratory of Mechanics and Control Systems of Drives. Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences (101000, Moscow, Russian Federation, Malyy Kharitonievskiy Pereulok, Bldg. 4, e-mail: ssmmrr@mail.ru).

SEMENOV Yuri Alekseevich — Junior Researcher, Laboratory of Mechanics and Control Systems of Drives. Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences (101000, Moscow, Russian Federation, Malyy Kharitonievskiy Pereulok, Bldg. 4, e-mail: shooshpanovsky@gmail.com).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Мисюрин С.Ю., Семенов Ю.А. Кинематический анализ сферического механизма параллельной структуры с одной степенью свободы и тремя регуляторами. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2026, № 10, с. 36–47.

Please cite this article in English as:

Misyurin S.Yu., Semenov Yu.A. Kinematic Analysis of a Spherical Parallel-Structure Mechanism with a Single Degree of Freedom and Three Regulators. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2026, no. 10, pp. 36–47.



Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
предлагает читателям монографию

«Технологии высокопроизводительных интеллектуальных систем мультимодальной аналитической обработки разнородных данных»

Авторы: А. Н. Алфимцев, Д. В. Березкин и др.

Представлены результаты исследований развития аппаратных и программных средств для создания высокопроизводительных интеллектуальных систем. Описаны перспективные технологии искусственного интеллекта, способные обрабатывать графы знаний, имеющие более совершенные аналитические возможности, приближенные к деятельности человека, в частности искусственные нейро-, синергетические и семантические сети. Рассмотрены методы эмерджентной самоорганизации мультиагентных систем. Проанализированы возможности применения технологий искусственного интеллекта для обеспечения безопасности авиаполетов.

Для профессорско-преподавательского состава вузов, научно-педагогических работников и исследователей цифровых технологий и искусственного интеллекта.

По вопросам приобретения обращайтесь:

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
Тел.: +7 499 263-60-45, факс: +7 499 261-45-97;
press@bmstu.ru; <https://press.bmstu.ru>