

УДК 629.7.023:539.3

Устойчивость подкрепленной некруговой цилиндрической оболочки при комбинированном нагружении изгибающим моментом и краевой поперечной силой

Л.П. ЖелезновФАУ «Сибирский научно-исследовательский институт авиации имени С.А. Чаплыгина»,
ФГБОУ ВО «Сибирский государственный университет путей сообщения»

Stability of a reinforced non-circular cylindrical shell under combined bending moment and marginal transverse force

L.P. ZheleznovChaplygin Siberian Scientific Research Institute of Aviation,
Siberian Transport University

В современных летательных аппаратах нередко применяют фюзеляжи с некруглым поперечным сечением. Чаще всего такую форму выбирают при проектировании широкофюзеляжных самолетов большой вместимости. Несмотря на то, что опубликовано большое количество работ по исследованию прочности таких конструкций, остаются нерешенными вопросы прочности и устойчивости при их нелинейном деформировании. Последнее особенно необходимо для тонкостенных конструкций фюзеляжей самолетов, где потеря устойчивости обшивки недопустима. Методы расчета на прочность и устойчивость тонкостенных конструкций с учетом нелинейности исходного напряженно-деформированного состояния развиты недостаточно. Большая часть исследований по устойчивости оболочек выполнена аналитическими методами или с использованием известных пакетов прикладных программ типа ANSYS, как правило, в линейной постановке и при раздельном действии внешних нагрузок. Кроме того, отсутствуют работы по исследованию некруговых оболочек с геометрическими параметрами, близкими к размерам современных широкофюзеляжных самолетов. В связи с этим разработка надежных и эффективных методов расчета оболочек, как и результаты их исследования на устойчивость, являются актуальной задачей. Приведено решение задачи прочности и устойчивости некруговых цилиндрических оболочек при произвольном неосесимметричном нагружении методами конечных элементов и линеаризации Ньютона — Канторовича. Исследована устойчивость подкрепленной некруговой цилиндрической оболочки при комбинированном нагружении изгибающим моментом и поперечной силой. В отличие от известных исследований, рассмотрены дискретно подкрепленные стрингерным набором и шпангоутами более тонкие оболочки (с отношением радиуса оболочки к толщине примерно 1500), для которых влияние нелинейности более существенно. Исследовано влияние нелинейности деформирования, овальности контура поперечного сечения оболочки на критические нагрузки потери ее устойчивости. Получены кривые взаимодействия критических внешних нагрузок, а также формы потери устойчивости.

EDN: EQGECE, <https://elibrary/eqgece>

Ключевые слова: некруговая цилиндрическая оболочка, нелинейность деформирования, устойчивость оболочки, метод конечных элементов, изгибающий момент, поперечная сила

In the designs of modern aircraft, the shape of the fuselage of a non-circular cross-section is very often used. This is especially noticeable when designing large-capacity wide-body aircraft. Despite the fact that a large number of papers have been published on the study of the strength of such structures, nevertheless, the issues of strength and stability under nonlinear deformation remain unresolved. The latter is especially necessary for thin-walled aircraft fuselage structures, in which loss of skin stability is unacceptable. Methods for calculating the strength and stability of thin-walled structures, taking into account the nonlinearity of the initial stress-strain state, are currently insufficiently developed. Most studies on shell stability have been performed either by analytical methods or using well-known application software packages such as ANSYS and other, as a rule, in a linear formulation and under the separate action of external loads. In addition, there are no studies in the literature on non-circular shells with geometric parameters close to the dimensions of modern wide-body aircraft. Therefore, the development of reliable and effective methods for calculating shells, as well as the results of their stability testing, is undoubtedly an urgent task. In this paper, the problem of strength and stability of non-circular cylindrical shells under arbitrary non-axisymmetric loading is solved by finite element methods and Newton–Kantorovich linearization. The stability of a reinforced non-circular cylindrical shell under combined bending moment and transverse force loading is investigated. In contrast to well-known studies, this work considered discretely reinforced stringer sets and frames and thinner shells (the ratio of the shell radius to the thickness of the order of 1,500), for which the influence of nonlinearity is more significant. In the presented work, the influence of the nonlinearity of deformation and the ovality of the contour of the shell cross-section on critical loads due to the loss of shell stability is investigated. The curves of interaction of critical external loads, as well as the forms of loss of stability, are treated.

EDN: EQGECE, <https://elibrary/eqgece>

Keywords: non-circular cylindrical shells, nonlinear deformation, shell stability, finite element method, bending moment, transverse force

В современных летательных аппаратах нередко применяют фюзеляжи с некруглым поперечным сечением. Чаще всего такую форму выбирают при проектировании широкофюзеляжных самолетов большой вместимости, таких как Boeing 777, Airbus A-380, «Экоджет». В программе развития авиационной отрасли России предусмотрено проектирование новых широкофюзеляжных магистральных самолетов большой вместимости.

Потеря устойчивости обшивки фюзеляжей самолетов является недопустимой. Методы расчета на прочность и устойчивость тонкостенных конструкций с учетом нелинейности исходного напряженно-деформированного состояния (НДС) развиты недостаточно. Большая часть исследований по устойчивости оболочек получена аналитическими методами [1–4] без учета моментности и нелинейности исходного НДС или с использованием известных пакетов прикладных программ типа ANSYS, как правило, в линейной постановке и при раздельном действии внешних нагрузок [5–9].

Имеется небольшое количество работ, где исследованы оболочки при нелинейном исходном НДС [10–12]. В них рассмотрены преимущественно относительно толстые оболочки (с отношением радиуса оболочки к толщине менее 500) и радиусом кривизны, меньшим 2000 мм. Поэтому разработка надежных и эффективных методов расчета как гладких оболочек, так и подкрепленных, а также исследование устойчивости некруговых оболочек с геометрическими параметрами, близкими к таковым отсеков широкофюзеляжных самолетов, при неоднородном неосесимметричном нагружении, является актуальной задачей.

Цель работы — решить задачу прочности и устойчивости подкрепленных продольным и поперечным наборами некруговых цилиндрических оболочек при произвольном нагружении методами конечных элементов и линеаризации Ньютона — Канторовича.

Приведены результаты исследования влияния нелинейности деформирования, овально-

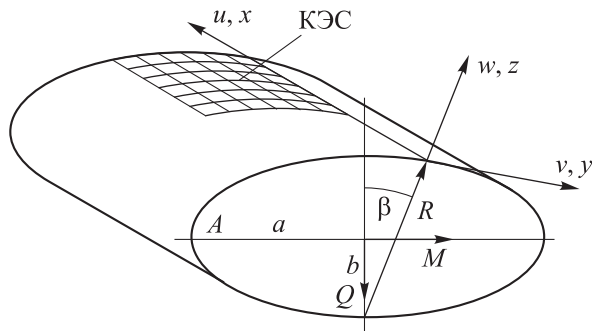


Рис. 1. Схема к расчету некруговой цилиндрической оболочки:
КЭС — конечно-элементная сетка

сти поперечного сечения на устойчивость подкрепленной овальной цилиндрической оболочки под действием изгибающего момента и краевой поперечной силы.

Рассмотрим некруговую цилиндрическую оболочку, находящуюся под действием неоднородной краевой нагрузки в виде изгибающего момента M и поперечной силы Q (рис. 1).

Кратко изложим основные соотношения для конечных элементов (КЭ) некруговой цилиндрической оболочки и подкреплений. При выводе основных соотношений воспользуемся ранее разработанным алгоритмом [12–14].

Конечный элемент неподкрепленной цилиндрической оболочки. Разобьем оболочку линиями главных кривизн по образующей на m частей, а по направляющей на n . Таким образом, оболочку представим набором $m \times n$ криволинейных прямоугольных КЭ. Используя билинейную аппроксимацию деформационных тангенциальных перемещений, бикубическую аппроксимацию для прогиба и выражения для перемещений элемента оболочки как жесткого целого [12], запишем выражения для полных перемещений точек КЭ:

$$\begin{aligned} u &= a_1xy + a_2x + a_3y + a_4 + a_6\psi_1s + a_{20}\psi_2c; \\ v &= a_5xy + a_6xc + a_7y + a_8(\psi_1c + \psi_2s) - \\ &- a_{20}xs + a_{23}c - a_{24}s; \\ w &= a_9x^3y^3 + a_{10}x^3y^2 + a_{11}x^3y + a_{12}x^3 + \\ &+ a_{13}x^2y^3 + a_{14}x^2y^2 + a_{15}x^2y + a_{16}x^2 + \\ &+ a_{17}xy^3 + a_{18}xy^2 + a_{19}xy + a_{20}xc + a_{21}y^3 + \\ &+ a_{22}y^2 + a_{23}s + a_{24}c + a_6xc + a_8(\psi_1s - \psi_2c); \end{aligned} \quad (1)$$

где a_i — коэффициенты полиномов;

$$s = \sin\beta; \quad \psi_1 = \int Rsd\beta; \quad \psi_2 = -\int Rcd\beta; \quad c = \cos\beta.$$

В матричной форме система (1) имеет вид

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{Pa}, \quad (2)$$

где $\tilde{\mathbf{u}}$ — вектор перемещений точек срединной поверхности конечного элемента, $\tilde{\mathbf{u}} = \{u, v, w\}^T$; $\mathbf{P}$ — матрица связи размера 3×24 , элементами которой являются множители при коэффициентах a_i в функциях (1); $\mathbf{a}$ — вектор неизвестных коэффициентов полиномов, $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_{24}\}^T$.

Выражая коэффициенты a_i через узловые неизвестные, получаем

$$\mathbf{a} = \mathbf{B}^{-1}\bar{\mathbf{u}}. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{B}$ — матрица размера 24×24 ; $\bar{\mathbf{u}}$ — вектор узловых перемещений, углов поворотов и смешанных производных прогиба,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}} &= \{u_i, v_i, w_i, \vartheta_{1i}, \vartheta_{2i}, w_{xyi}, u_j, v_j, w_j, \vartheta_{1j}, \vartheta_{2j}, \\ &w_{xyj}, u_k, \dots, w_{xyk}, u_n, \dots, w_{xyn}\}^T, \end{aligned}$$

где индексы « x » и « y » означают дифференцирование по соответствующим переменным.

Подставляя выражение (3) в формулу (2), получаем зависимость перемещений точек элемента от узловых неизвестных

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{PB}^{-1}\bar{\mathbf{u}}.$$

В каждом узле есть шесть неизвестных, поэтому КЭ имеет 24 степени свободы.

Нелинейные соотношения Коши для деформаций и изменений кривизн срединной поверхности оболочки определяются как [12]

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_l + \mathbf{e}_n.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_l &= \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \chi_1, \chi_2, \chi_3\}^T; \\ \mathbf{e}_n &= \{\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{2n}, \varepsilon_{3n}, 0, 0, 0\}^T, \end{aligned}$$

где

$$\varepsilon_1 = u_x; \quad \varepsilon_2 = k_2(v_\beta + w); \quad \varepsilon_3 = v_x + k_2u_\beta;$$

$$\chi_1 = -w_{xx}; \quad \chi_2 = k_2[k_2(v - w_\beta)]_\beta;$$

$$\chi_3 = k_2(v - w_\beta)_x;$$

$$\varepsilon_{1n} = \frac{1}{2}\vartheta_1^2 = \frac{1}{2}w_x^2; \quad \varepsilon_{2n} = \frac{1}{2}\vartheta_2^2 = \frac{1}{2}k_2^2(v - w_\beta)^2;$$

$$\varepsilon_{3n} = \vartheta_1\vartheta_2 = -k_2w_x(v - w_\beta);$$

индексы « x » и « β » означают дифференцирование по соответствующим переменным.

Соотношения упругости для оболочки имеют вид [12]

$$\mathbf{T} = \mathbf{De}.$$

Здесь $\mathbf{T}$ — вектор внутренних усилий и моментов, $\mathbf{T} = \{T_1, T_2, T_3, M_1, M_2, M_3\}^T$; $\mathbf{D}$ — матрица упругих жесткостей,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix};$$

$$B_{11} = Eh/(1-\nu^2); \quad B_{12} = \nu B_{11}; \quad B_{33} = (1-\nu)B_{11}/2;$$

$$D_{11} = D_{22} = Eh^3/12(1-\nu^2); \quad D_{12} = \nu D_{11};$$

$$D_{33} = (1-\nu)D_{11}/2,$$

где E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона; h — толщина оболочки.

Рассмотрим элемент оболочки, на который действует система неоднородной поверхностной нагрузки $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, q_3\}^T$, система контурных сил $\mathbf{R}_k = \{P_{1k}, P_{2k}, P_{3k}, M_{1k}, M_{2k}, M_{3k}\}^T$ и система локальных сил и моментов $\mathbf{R}_l = \{P_l, P_{2l}, P_{3l}, M_{1l}, M_{2l}, M_{3l}\}^T$. Здесь индексы «1», «2» и «3» соответствуют направлениям осей x , y и z . В этом случае потенциальная энергия неподкрепленного КЭ имеет вид

$$\Pi = W - V.$$

Здесь W — энергия деформации элемента; V — работа внешних сил [12],

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \iint_s \mathbf{T}^T \mathbf{e} ds = \frac{1}{2} \iint_s (\mathbf{T}^T \mathbf{e}_l + \mathbf{T}^T \mathbf{e}_n) ds = \\ &= \frac{1}{2} \iint_s (\mathbf{e}_l^T \mathbf{D} \mathbf{e}_l + \mathbf{e}_l^T \mathbf{D} \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_n^T \mathbf{D} \mathbf{e}_l + \mathbf{e}_n^T \mathbf{D} \mathbf{e}_n) ds; \\ V &= \iint_s \mathbf{q}^T \mathbf{u} ds + \int_{l_k} \mathbf{R}_k^T \mathbf{u}_k dl_k + \mathbf{R}_l^T \mathbf{u}_l, \end{aligned}$$

где $\mathbf{u}_k = \{u, v, w, \vartheta_1, \vartheta_2, w_{xy}\}^T$.

Конечный элемент подкрепленной цилиндрической оболочки. Рассмотрим КЭ оболочки, подкрепленный шпангоутами и стрингерами. Положение стрингера фиксировано координатой y , а шпангоута — координатой x . При выводе основных соотношений для подкреплений воспользуемся гипотезой, что плоское сечение КЭ подкрепления до деформации остается плоским и после деформации.

Запишем выражения для перемещений произвольной точки поперечного сечения КЭ подкрепления (рис. 2)

$$\bar{u}_p = u_p + z\varphi_y; \quad \bar{v}_p = v_p + z\varphi_x + x\varphi_z;$$

$$\bar{w}_p = w_p - x\varphi_y,$$

где u_p , v_p и w_p — перемещение точки центра тяжести поперечного сечения КЭ подкрепления в направлении оси x , y и z соответственно; φ_x , φ_y и φ_z — угол поворота поперечного сечения вокруг оси x , y и z соответственно; индекс $p = l$ относится к стрингеру, а $p = s$ — к шпангоуту.

Используя данные работы [8], запишем выражение для деформаций в произвольной точке поперечного плоского сечения КЭ подкрепления

$$\bar{\epsilon}_p = \epsilon_p + x\chi_{px} + z\chi_{pz}, \quad p = l, s.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \epsilon_p &= \frac{1}{r_p} w_p + \frac{1}{r_p} (v_p)_\beta + \frac{1}{2} (\varphi_x^2 + \varphi_z^2); \\ \chi_{px} &= \frac{1}{r_p} \left[-\frac{1}{r_p} (u_p)_{\beta\beta} + \frac{(r_p)_\beta}{r_p^2} (u_p)_\beta - \varphi_y \right]; \\ \chi_{pz} &= \frac{1}{r_p} \left\{ \frac{1}{r_p} [(v_p)_\beta - (w_p)_{\beta\beta}] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(r_p)_\beta}{r_p^2} [v_p - (w_p)_\beta] \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где r_p — расстояние от центра кривизны оболочки до центра тяжести КЭ подкрепления.

Нормальные σ_p и касательные τ_p напряжения связаны с деформациями соотношениями

$$\sigma_p = E\bar{\epsilon}_p; \quad \tau_p = G\chi_p.$$

Здесь

$$G = \frac{1}{2(1+\nu)} E; \quad \chi_p = \frac{1}{r_p} (\varphi_y)_\beta + \varphi_z.$$

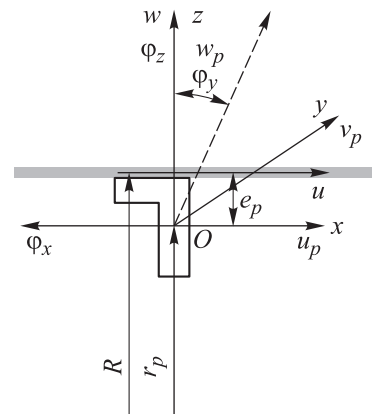


Рис. 2. Схема поперечного сечения КЭ подкрепления (e_p — эксцентриситет центра тяжести поперечного сечения КЭ подкрепления)

Запишем выражения для усилия

$$T_p = \iint_s \sigma_p ds$$

и моментов КЭ подкрепления

$$M_{px} = \iint_s \sigma_p x ds; \quad M_{pz} = \iint_s \sigma_p z ds; \quad M_{py} = \iint_s \tau_p \rho ds,$$

где ρ — расстояние от центра тяжести поперечного сечения до произвольной точки поперечного сечения КЭ подкрепления.

Интегрируя, получаем следующие выражения для усилия и моментов:

$$\begin{aligned} T_p &= C\varepsilon_p; \quad M_{px} = C_x \chi_{px} + C_{xz} \chi_{pz}; \\ M_{pz} &= C_z \chi_{pz} + C_{xz} \chi_{px}; \quad M_{py} = C_k \chi_p, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} C &= EF; \quad C_x = EJ_x; \quad C_z = EJ_z; \quad C_{xz} = EJ_{xz}; \quad C_k = EJ_k; \\ F &= \iint_s ds; \quad J_x = \iint_s x^2 ds; \quad J_z = \iint_s z^2 ds; \\ J_{xz} &= \iint_s xz ds; \quad J_k = \iint_s \rho^2 ds. \end{aligned}$$

Выразим перемещения точек центра тяжести КЭ подкрепления через перемещения точек срединной поверхности элемента оболочки. Учитывая, что для элемента шпангоута $\varphi_y = \vartheta_1$, а для элемента стрингера $\varphi_y = \vartheta_2$, получаем основные соотношения для КЭ подкреплений.

Согласно рис. 2, для элемента шпангоута имеем

$$\begin{aligned} u_s &= u + e_s \vartheta_1; \quad v_s = v + e_s \vartheta_2; \quad w_s = w; \\ \vartheta_1 &= -w_x; \quad \vartheta_2 = \frac{1}{r_s}(v - w_\beta); \quad \vartheta_3 = -\frac{1}{r_s} u_\beta. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя выражения (6) в соотношения (4), для элемента шпангоута получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \frac{1}{r_s} \left[v_\beta + e_s (\vartheta_2)_\beta + w \right] + \frac{1}{2} (\varphi_x^2 + \varphi_z^2); \\ \chi_{sx} &= \frac{1}{r_s} \left\{ -\frac{1}{r_s} [u_{\beta\beta} + e_s (\vartheta_1)_{\beta\beta}] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(r_s)_\beta}{r_s^2} [u_\beta + e_s (\vartheta_1)_\beta] - \vartheta_1 \right\}; \\ \chi_{sz} &= \frac{1}{r_s^2} \left[v_\beta + e_s (\vartheta_2)_\beta - w_{\beta\beta} \right] - \frac{(r_s)_\beta}{r_s^3} (v + e_s \vartheta_2 - w_\beta); \\ \chi_s &= \frac{1}{r_s} \left\{ (\vartheta_1)_\beta - \frac{1}{r_s} [u_\beta + e_s (\vartheta_1)_\beta] \right\}; \quad \varphi_y = \vartheta_1 = -w_x; \\ \varphi_z &= -\frac{1}{r_s} (u_\beta + e_s \vartheta_{1\beta}); \quad \varphi_x = \frac{1}{r_s} (v + e_s \vartheta_2 - w_\beta), \end{aligned}$$

где e_s — эксцентриситет центра тяжести поперечного сечения шпангоута.

Для элемента стрингера имеем

$$u_l = v + e_l \vartheta_2; \quad v_l = u + e_l \vartheta_1; \quad w_l = w; \quad \vartheta_3 = -v_x;$$

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_l + x \chi_{lx} + z \chi_{lz}; \quad \varepsilon_l = (v_l)_x + (\varphi_x^2 + \varphi_z^2)/2;$$

$$\chi_{lx} = (\varphi_z)_x; \quad \chi_{lz} = (\varphi_x)_x; \quad \chi_l = (\varphi_y)_x;$$

$$\varphi_x = -(w_l)_x; \quad \varphi_z = -(u_l)_x; \quad \varphi_y = \vartheta_2.$$

Запишем выражения (5) в матричной форме

$$\mathbf{T}_p = \mathbf{D}_p \mathbf{e}_p,$$

где $\mathbf{T}_p$ — вектор внутренних усилий и моментов ($p = s, l$),

$$\mathbf{T}_p = \{T_p, M_{px}, M_{py}, M_{pz}\}^T;$$

$\mathbf{D}_p$ — матрица упругих коэффициентов,

$$\mathbf{D}_p = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_x & C_{xz} & 0 \\ 0 & C_{xz} & C_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_k \end{bmatrix};$$

$\mathbf{e}_p$ — вектор деформаций и изменений кривизн КЭ подкреплений,

$$\mathbf{e}_p = \{\varepsilon_p, \chi_{px}, \chi_{pz}, \chi_p\}^T.$$

Энергия деформации КЭ подкрепления имеет вид

$$W_p = \frac{1}{2} \int_{l_p} \mathbf{T}_p^T \mathbf{e}_p dl_p,$$

где l_p — длина КЭ подкрепления.

Алгоритм решения задачи. Запишем вариационное уравнение Лагранжа для КЭ подкрепленной оболочки

$$\delta \Pi = \delta W + \delta W_p - \delta V = 0,$$

где δ — знак вариации.

Варьируя по узловым перемещениям КЭ, получаем систему нелинейных алгебраических уравнений относительно узловых перемещений КЭ. С учетом условия совместности узловых перемещений КЭ и граничных условий получаем систему нелинейных алгебраических уравнений относительно узловых перемещений оболочки $\mathbf{u}'$

$$\mathbf{K} \mathbf{u}' - \mathbf{Q} = 0, \quad (7)$$

где $\mathbf{K}$ — матрица жесткости оболочки, получаемая суммированием матриц жесткости отдельных КЭ с использованием матрицы индексов [15]; $\mathbf{Q}$ — вектор обобщенных узловых сил оболочки.

Для решения системы (7) воспользуемся методом Ньютона — Канторовича [16], уравнение которого имеет вид

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}'_n) \Delta = \mathbf{Q} - \mathbf{G}; \quad \mathbf{u}'_{n+1} = \mathbf{u}'_n + \Delta, \quad (8)$$

где $\mathbf{H}$ — матрица Гессе системы, элементами которого являются элементы второй вариации потенциальной энергии деформации подкрепленной оболочки; Δ — вектор приращений узловых перемещений оболочки; $\mathbf{G}$ — градиент потенциальной энергии деформации.

Решение системы уравнений (8) получаем следующим образом. Задаем небольшое значение параметра нагрузки. За нулевое приближение принимаем решение линейной задачи. Выполняем итерационный процесс (8), обеспечивающий сходимость решения с заданной точностью. Увеличиваем нагрузку. За нулевое приближение берем решение с предыдущего шага по нагрузке. Выполняем итерационный процесс (8) и т. д. На каждой итерации решение системы линейных алгебраических уравнений (8) отыскиваем методом Краута [17] с использованием разложения матрицы Гессе $\mathbf{H} = \mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L}$ на диагональную $\mathbf{D}$ и две треугольные матрицы $\mathbf{L}$.

Определив компоненты вектора узловых перемещений $\mathbf{u}'$, находим все компоненты НДС оболочки по приведенным формулам. Критическую нагрузку определяем как предельную по расходимости итерационного процесса при резком возрастании перемещений в отдельных узлах конечно-элементной сетки или как бифуркационную с использованием энергетического критерия устойчивости, согласно которому равновесное состояние устойчиво, если $\delta^2\Pi > 0$. Это условие требует положительной определенности матрицы Гессе $\mathbf{H}$ или положительности всех диагональных элементов матрицы $\mathbf{D}$ в ее разложении. Изменение какого-либо коэффициента матрицы $\mathbf{D}$ на противоположный означает потерю устойчивости оболочки.

Это легко контролировать в вычислительном алгоритме без дополнительных затрат машинного времени. После определения критической нагрузки, находим форму потери устойчивости оболочки из решения системы $\mathbf{H}\delta = 0$, где δ — вектор бифуркационных узловых перемещений. Для этого определяем одну линейно зависимую (вырожденную) строку матрицы $\mathbf{H}$, соответствующую первому отрицательному элементу матрицы $\mathbf{D}$. Элементы этой строки и

соответствующего столбца матрицы $\mathbf{H}$ полагаем равными нулю. На место диагонального коэффициента заносим единицу, а в правую часть системы переносим соответствующий столбец, умноженный на докритическое перемещение, соответствующее вырожденной строке. Из решения полученной таким образом системы получаем форму потери устойчивости оболочки. В случае предельной точки форму потери устойчивости оболочки отыскиваем из нелинейного исходного НДС для нагрузки, близкой к предельной. Изложенный алгоритм реализован вычислительной программой для персональных компьютеров.

Результаты численного исследования. Рассмотрим консольно-закрепленную ($u = v = w = w_x = 0$), подкрепленную продольным (стрингерами) и поперечным (шпангоутами) силовыми наборами некруговую цилиндрическую оболочку овального поперечного сечения, близкую по форме и размерам к поперечному сечению самолета «Экоджет», составленному из двух пар дуг окружностей. Геометрические характеристики овала поперечного сечения оболочки — эквипериметрический радиус R_0 , радиусы окружностей r и R — приведены в работе [12].

Оболочка нагружена краевой нагрузкой в виде изгибающего момента M и поперечной силы Q , приложенных к свободному краю оболочки. Нагруженный край оболочки подкреплен жестким в своей плоскости шпангоутом. Действие изгибающего момента заменим действием неоднородных по направляющей оболочки осевых усилий $T_1 = Mz_1/J$, где z_1 — расстояние от точек контура оболочки до горизонтальной оси А–А (см. рис. 1); J — момент инерции площади поперечного сечения относительно оси А–А. Действие поперечной силы заменим статически эквивалентными ей касательными усилиями $T_3 = QS/J$, где S — статический момент отсеченной части поперечного сечения.

Оболочка, имеющая длину $L = 2500$ мм, толщину $h = 2,0$ мм и эквипериметрический радиус $R_0 = 3000$ мм, выполнена из материала Д16Т и подкреплена шестью равностоящими шпангоутами и 121 стрингером с шагом 157 мм. Жесткостные характеристики шпангоутов и стрингеров приведены в табл. 1, где F — площадь; J_x и J_z — моменты инерции поперечного сечения подкрепления относительно осей x и z (см. рис. 2); J_k — момент кручения; e — эксцен-

Таблица 1

Жесткостные характеристики подкреплений

Элемент силового набора	F , мм ²	J_x , мм ⁴	J_z , мм ⁴	J_k , мм ⁴	e , мм
Стрингер	207	14 857	34 786	239	17,5
Шпангоут	370	687 143	31 714	650	90,0

триситет подкрепления относительно срединной поверхности обшивки.

В силу симметрии нагрузки рассмотрена 1/2 часть оболочки, получаемая продольным разрезом. Для расчета по линии разреза установлены условия симметрии $v=0$ и $w_\phi=0$. Оболочка разбита конечно-элементной сеткой $m \times n = 30 \times 120$, что обеспечивало сходимость решения по числу КЭ с погрешностью, не превышающей 5 %, где m — число КЭ по образующей оболочки, n — число КЭ по направляющей.

Введены следующие обозначения:

$$R_m = k_m/k_{m0} = M^*/M_0^*, \quad R_\tau = k_\tau/k_{\tau0} = Q^*/Q_0^*.$$

Здесь

$$k_m = M^*/M_0; \quad k_{m0} = M_0^*/M_0;$$

$$k_\tau = Q^*/Q_0; \quad k_{\tau0} = Q_0^*/Q_0,$$

где M^* , M_0^* и Q^* , Q_0^* — критические изгибающие моменты и поперечные краевые силы при комбинированном и раздельном нагружении оболочки соответственно; M_0 и Q_0 — верхние критические значения изгибающего момента и краевой поперечной силы для круговой цилиндрической изотропной оболочки [18],

$$M_0 = \pi E R h^2 / \sqrt{3(1-\nu^2)}; \quad Q_0 = \pi R C S_b;$$

$$C = 0,953; \quad S_b = 0,74 \frac{Eh}{(1-\nu^2)^{5/8}} \left(\frac{h}{R} \right)^{5/4} \left(\frac{R}{L} \right)^{1/2}.$$

Рассмотрены несколько вариантов оболочек с различными значениями параметра овальности $\bar{a} = a/b$, приведенными в табл. 2.

Все расчеты проводили при условии пропорционального нагружения. Задавали некоторые значения нагрузок M и Q , определяемые

Таблица 2

Значения параметра овальности для различных вариантов оболочек

Вариант	$\bar{a}$	Вариант	$\bar{a}$
1	0,625	5	1,2
2	0,714	6	1,4
3	0,833	7	1,6
4	1,000	—	—

процентными значениями от верхних критических нагрузок M_0 и Q_0 , и находили значения параметров критических нагрузок k_m , k_τ и $k_n = M^*/M = Q^*/Q$.

Варианты комбинированного нагружения оболочки изгибающим моментом M и краевой поперечной силой Q — отношений нагрузок $p_q = Q/Q_0$ и $p_m = M/M_{m0}$ — приведены в табл. 3.

Значения параметра критической нагрузки k_n для линейного и нелинейного исходных НДС оболочки при различных значениях параметров p_q и $\bar{a}$ указаны в табл. 4.

Для определения влияния нелинейности исходного НДС оболочки на параметр k_n введен параметр нелинейности

$$\Delta_n = (k_{n,n} - k_{n,l}) / k_{n,l} \cdot 100 \%,$$

где $k_{n,n}$ и $k_{n,l}$ — параметры критической нагрузки k_n для нелинейного и линейного исходных НДС оболочки.

Результаты исследования влияния нелинейности исходного НДС оболочки на параметр k_n в зависимости от параметров p_q и $\bar{a}$ приведены в табл. 5.

Анализ данных табл. 4 показывает, что с увеличением параметра овальности оболочки $\bar{a}$ параметр критической нагрузки падает, в то время как с ростом параметра p_q он увеличивается независимо от параметра овальности обо-

Таблица 3

Варианты комбинированного нагружения оболочки изгибающим моментом M и краевой поперечной силой Q

Вариант	Нагрузка, %	
	p_q	p_m
1	0	100
2	26	97
3	50	87
4	71	71
5	87	50
6	97	26
7	100	0

Таблица 4

Значения параметра k_n при различных значениях параметров $\bar{a}$ и p_q

$p_q, \%$	Параметр критической нагрузки k_n при параметре овальности оболочки $\bar{a}$						
	0,625	0,714	0,833	1,000	1,200	1,400	1,600
0	5,4/3,3	4,7/3	4,4/2,9	3,9/2,7	3,5/2,5	3,4/2,2	3,1/2,0
26	5,6/3,4	4,9/3,1	4,5/2,8	4,2/3,0	3,6/2,5	3,5/2,2	3,3/2,0
50	6,1/3,9	5,4/3,5	5,0/3,1	4,7/3,2	4,1/2,9	3,7/2,6	3,4/2,4
71	6,9/4,8	6,5/4,1	6,0/3,9	5,3/3,5	4,7/3,1	4,3/2,9	3,8/2,7
87	8,4/5,9	8,3/5,4	7,7/5,3	6,7/4,8	5,8/4,3	5,3/3,7	4,8/3,4
97	12,0/8,2	11,9/8,2	11,3/8,2	10/7,8	8,7/7,2	7,8/5,7	7,0/4,9
100	20,7/14,5	20,6/14,5	19,6/13,8	19,0/13,0	17,0/12,5	15,8/11,4	14,0/10,3
Примечание. В числителе дроби указаны значения для линейного исходного НДС оболочки, в знаменателе — для нелинейного.							

Таблица 5

Значения параметра нелинейности оболочки при различных значениях параметров p_q и $\bar{a}$

$p_q, \%$	Параметр нелинейности оболочки $\Delta_n, \%$, при параметре овальности $\bar{a}$						
	0,625	0,714	0,833	1,000	1,200	1,400	1,600
0	-40,01	-36,83	-35,02	-31,71	-30,03	-36,62	-35,02
26	-39,30	-36,88	-38,16	-30,02	-31,74	-36,60	-38,16
50	-36,42	-37,00	-38,46	-31,74	-30,03	-31,74	-30,02
71	-31,75	-38,15	-35,02	-33,39	-33,40	-31,74	-30,01
87	-30,83	-35,02	-31,74	-28,28	-26,48	-30,02	-30,03
97	-31,32	-31,73	-28,27	-22,76	-16,82	-27,43	-30,03
100	-29,82	-30,02	-30,03	-31,73	-26,51	-28,27	-26,48

лочки. Это обусловлено тем, что подкрепление оболочки в большей степени влияет на критическую нагрузку поперечной силы, чем на критический изгибающий момент.

Из табл. 5 следует, что нелинейность исходного НДС оболочки снижает параметр критической нагрузки на 20...40 %, причем ее наибольшее влияние наблюдается при нагрузке с преимущественным действием изгибающего момента ($p_q < 50 \%$). С ростом параметра овальности влияние нелинейности незначительно повышается для оболочек, вытянутых как в вертикальной плоскости, так и в горизонтальной.

Зависимости параметра критического момента k_m от параметра p_q при различных значениях параметра овальности оболочки с линейным и нелинейным исходными НДС приведены на рис. 3, а. Номера кривых соответствуют вариантам, указанным в табл. 3. Как видно из

рисунка, нелинейность снижает параметр критического изгибающего момента k_m во всем диапазоне изменения параметра овальности $\bar{a}$ и при всех значениях параметра поперечной силы p_q . С ростом параметра овальности $\bar{a}$ критические значения параметра k_m уменьшаются.

Зависимости параметра k_t от параметра овальности $\bar{a}$ оболочки с линейным и нелинейным исходными НДС при различных значениях параметра p_m приведены на рис. 3, б. Номера кривых соответствуют вариантам, указанным в табл. 3. Анализ рисунка показывает, что и в этом случае нелинейность оболочки снижает параметр критической поперечной силы k_t во всем диапазоне изменения параметра овальности оболочки $\bar{a}$ и при всех значениях параметра нагрузки p_m . Наибольшее влияние нелинейности на параметр критической поперечной силы наблюдается при малых значениях

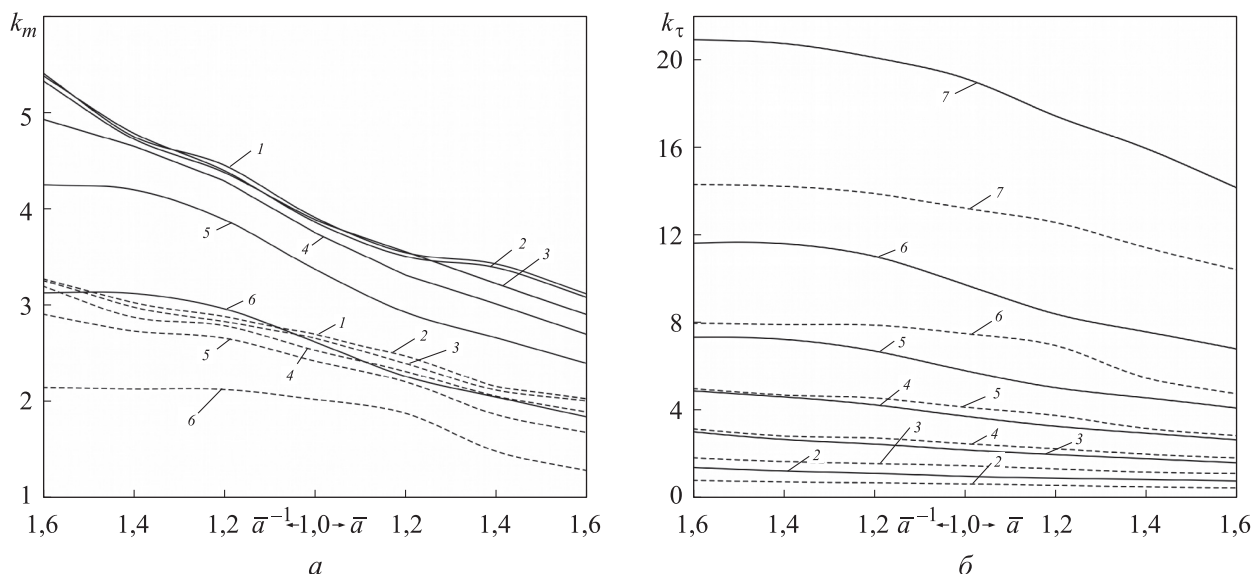


Рис. 3. Зависимости параметров k_m (а) и k_τ (б) от параметра овальности $\bar{a}$ оболочки с линейным (—) и нелинейным (---) исходными НДС при различных значениях параметров p_q и p_m

параметра p_m (кривые 6 и 7). С увеличением параметра овальности оболочки $\bar{a}$ параметр k_τ уменьшается, причем более интенсивно для сплюснутых в горизонтальной плоскости оболочек.

Кривые взаимодействия критических значений поперечной силы и изгибающего момента $R_\tau(R_m)$ для различных значений параметра овальности $\bar{a}$ оболочки с линейным и нелинейным исходными НДС приведены на рис. 4. Номера кривых соответствуют вариантам овальности оболочки, указанным в табл. 2. Как

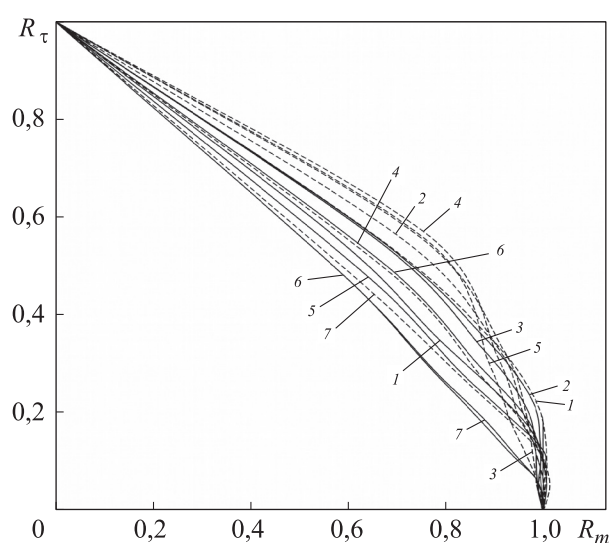


Рис. 4. Кривые взаимодействия $R_\tau(R_m)$ при различных значениях параметра овальности $\bar{a}$ оболочки с линейным (—) и нелинейным (---) исходными НДС

видно из рисунка, кривые взаимодействия в основном выпуклые, что в первую очередь относится к результатам расчета при линейном исходном НДС. Нелинейность исходного НДС увеличивает выпуклость кривых.

Зависимости параметров k_m и поперечной силы k_τ от параметров p_q и p_m при различных значениях овальности $\bar{a}$ оболочки с линейным и нелинейным исходными НДС приведены на рис. 5, а и б. Видно, что на параметр критического момента овальность оболочки оказывает большее влияние, чем на параметр критической поперечной силы. В первом случае падение достигает 50 %, во втором — 22 %, как при линейном исходном НДС, так и при нелинейном. Зная значение параметра p_m или p_q по рисунку можно найти параметр критического момента k_m или критической поперечной силы k_τ .

Формы потери устойчивости оболочки с параметром овальности $\bar{a} = 1,4$ при различных соотношениях нагрузок M и Q показаны на рис. 6, а–в. Форма потери устойчивости носит локальный характер, т. е. теряет устойчивость обшивка оболочки между стрингерами и шпангоутами при преимущественном воздействии изгибающего момента в нижней части оболочки от действия максимальных сжимающих усилий, а при воздействии только поперечной силы на боковой поверхности оболочки в местах изменений кривизн образующей от действия максимальных касательных напряжений.

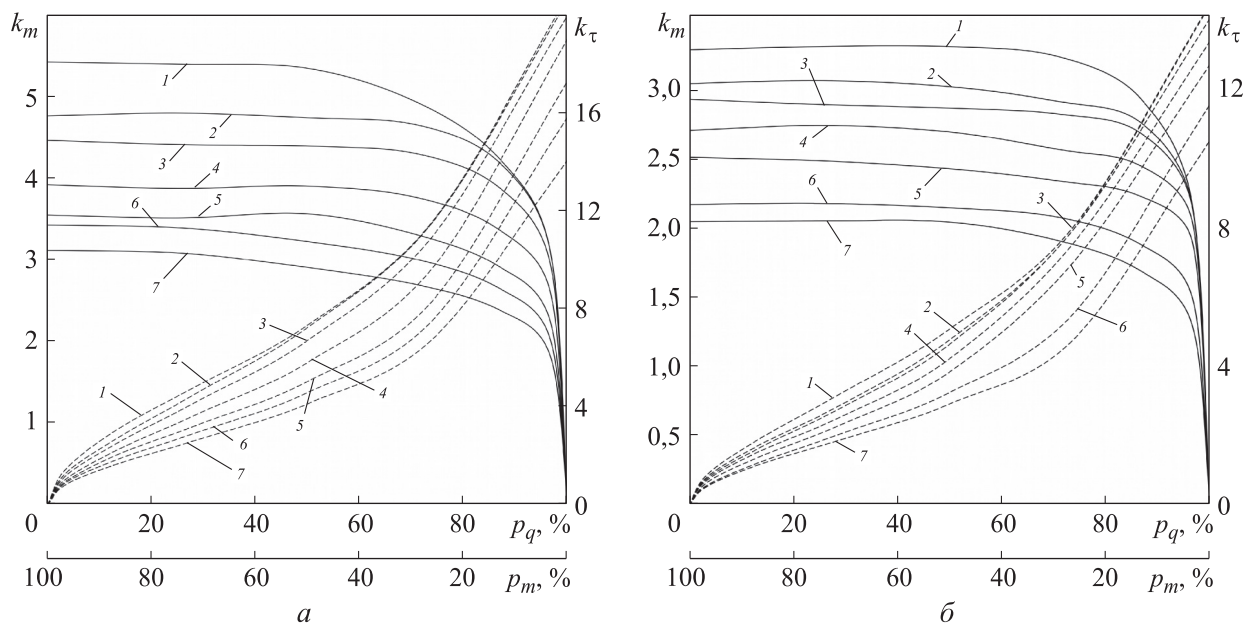


Рис. 5. Зависимости параметров k_m (—) и k_τ (---) от параметров p_q и p_m при различных значениях овальности $\bar{a}$ оболочки с линейным (а) и нелинейным (б) исходными НДС

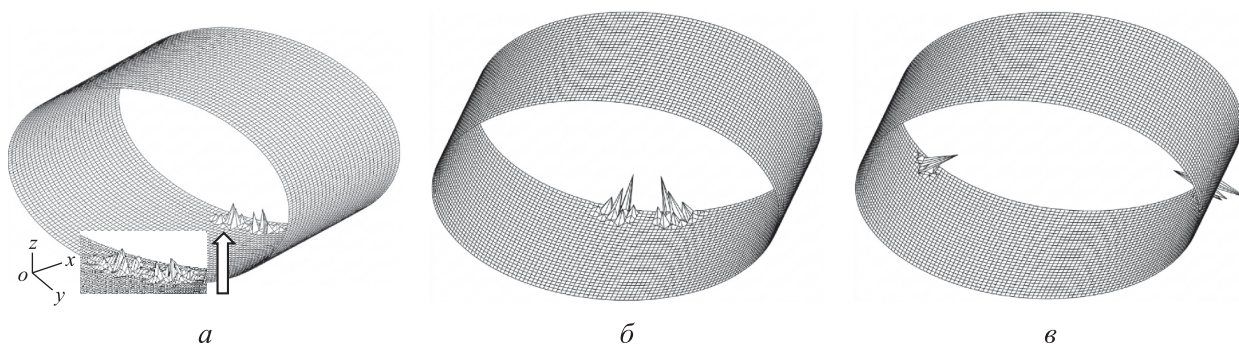


Рис. 6. Формы потери устойчивости при различных соотношениях параметров нагрузок: а — $p_m = 100\%$; б — p_m и $p_q = 71\%$; в — $p_q = 100\%$

Выводы

1. С увеличением овальности оболочки параметр критической нагрузки уменьшается и тем значительнее, чем больше параметр изгибающего момента p_m . Параметр критического момента зависит от овальности оболочки больше, чем параметр критической поперечной силы. В первом случае падение достигает 50 %, во втором — 22 %, как при линейном исходном НДС, так и при нелинейном.

2. Нелинейность исходного НДС оболочки снижает параметр критической нагрузки на 20...40 %, причем ее наибольшее влияние наблюдается при нагрузке с преимущественным действием изгибающего момента ($p_q < 50\%$).

3. Кривые взаимодействия R_τ (R_m) являются выпуклыми. Нелинейность исходного НДС увеличивает выпуклость кривых.

4. Формы потери устойчивости зависят от соотношения параметров изгибающего момента и поперечной силы. Оболочки теряют устойчивость локально в виде вмятин обшивки между стрингерами и шпангоутом в зоне заделки. При преимущественном действии изгибающего момента оболочка теряет устойчивость в нижней части от воздействия максимальных продольных сжимающих усилий. При приоритете действия поперечной силы оболочка теряет устойчивость от воздействия максимальных касательных усилий с образований локальных вмятин на ее боковой поверхности.

Литература

- [1] Махмуди Г.М. Об одном методе исследования устойчивости цилиндрических оболочек переменной толщины при поперечном изгибе. *Естественные и технические науки*, 2015, № 6, с. 539–542.
- [2] Мочалин А.А. Об устойчивости конструктивно-ортотропной неоднородной цилиндрической оболочки от неравномерной радиальной нагрузки при различных краевых условиях. *Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук*, 2014, № 12-1, с. 16–21.
- [3] Колесников А.Г., Спасских И.А. Применение методики Г.А. Гениева, Н.С. Чаусова для исследования устойчивости пологих оболочек. *Вестник МГСУ*, 2022, т. 17, № 4, с. 454–462, doi: <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2022.4.454-462>
- [4] Окладникова Е.В., Кондратьева Л.Н. Аналитическое исследование устойчивости трехслойных оболочек с изломами поверхности. В: *Строительство и природообустройство*. Благовещенск, Дальневосточный ГАУ, 2015, с. 90–95.
- [5] Адегова Л.А., Щербинина А.Е. Влияние на потерю устойчивости цилиндрической оболочки ориентации укладки слоев композиционного материала. *Научный журнал строительства и архитектуры*, 2022, № 4, с. 11–19, doi: <https://doi.org/10.36622/VSTU.2022.68.4.001>
- [6] Ванин Г.А., Семенюк Н.П., Емельянов Р.Ф. *Устойчивость оболочек из армированных материалов*. Киев, Наукова Думка, 1978. 211 с.
- [7] Бакулин В.Н., Гусев Е.Л., Марков В.Г. *Оптимальное проектирование конструкций из композиционных и традиционных материалов*. Москва, Физматлит, 2008. 250 с.
- [8] Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И. и др. *Статика и динамика оболочечных конструкций*. Москва, Машиностроение, 1975. 375 с.
- [9] Гумерова Х.С. Устойчивость ортотропной эллипсоидальной оболочки в переменном температурном поле. *Вестник Казанского технологического университета*, 2013, т. 16, № 20, с. 69–70.
- [10] Дмитриев В.Г. Численный анализ особенностей упруго-пластического деформирования неоднородных оболочек вращения в области больших перемещений и углов поворотов нормали. *Ученые записки ЦАГИ*, 2023, т. 54, № 1, с. 76–88.
- [11] Бакулин В.Н., Волков Е.Н., Симонов А.И. Динамическая устойчивость цилиндрической оболочки при действии переменного по оси внешнего давления. *Известия высших учебных заведений. Авиационная техника*, 2017, № 4, с. 28–32.
- [12] Бойко Д.В., Железнов Л.П., Кабанов В.В. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости подкрепленных эллиптических цилиндрических оболочек при комбинированном нагружении изгибающим моментом и краевой поперечной силой. *Известия РАН. МТТ*, 2011, № 5, с. 130–136.
- [13] Железнов Л.П., Кабанов В.В. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости некруговых цилиндрических оболочек при осевом сжатии и внутреннем давлении. *Прикладная механика и техническая физика*, 2002, т. 43, № 4, с. 155–160.
- [14] Железнов Л.П., Кабанов В.В. Алгоритм исследования нелинейного деформирования и устойчивости круговых цилиндрических оболочек с начальными несовершенствами формы. *Прикладная механика и техническая физика*, 1989, № 4, с. 143–148.
- [15] Постнов В.А., Хархурим И.Я. *Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций*. Ленинград, Судостроение, 1974. 341 с.
- [16] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах*. Москва, Физматгиз, 1959. 684 с.
- [17] Уилкинсон Д., Райнш К. *Справочник алгоритмов на языке Алгол. Линейная алгебра*. Москва, Машиностроение, 1976. 390 с.
- [18] Кабанов В.В. *Устойчивость неоднородных цилиндрических оболочек*. Москва, Машиностроение, 1982. 253 с.

References

- [1] Makhmudi G.M. On one method of studying the stability of cylindrical shells of variable thickness under transverse bending. *Estestvennyye i tekhnicheskie nauki* [Natural and Technical Sciences], 2015, no. 6, pp. 539–542. (In Russ.).
- [2] Mochalin A.A. On the stability of a structurally orthotropic non-uniform cylindrical shell under non-uniform radial load under various boundary conditions. *Aktualnye problemy gumanitarnykh i estestvennykh nauk*, 2014, no. 12-1, pp. 16–21. (In Russ.).
- [3] Kolesnikov A.G., Spasskikh I.A. Application of the G.A. Geniev, N.S. Chausova method for stability of shallow shells investigation. *Vestnik MGSU*, 2022, vol. 17, no. 4, pp. 454–462, doi: <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2022.4.454-462> (in Russ.).
- [4] Okladnikova E.V., Kondratyeva L.N. Analiticheskoe issledovanie ustoychivosti trekh-sloynnykh obolochek s izlomami poverkhnosti [Analytical study of the stability of three-layer shells with surface fractures]. V: *Stroitelstvo i prirodoobustroystvo* [In: Construction and environmental engineering]. Blagoveshchensk, Dalnevostochnyy GAU Publ., 2015, pp. 90–95. (In Russ.).
- [5] Adeгова L.A., Shcherbinina A.E. Evaluation of the effect of laying composite material layers on the loss of stability of a cylindrical shell. *Nauchnyy zhurnal stroitelstva i arkhitektury* [Russian Journal of Building Construction and Architecture], 2022, no. 4, pp. 11–19, doi: <https://doi.org/10.36622/VSTU.2022.68.4.001> (in Russ.).
- [6] Vanin G.A., Semenyuk N.P., Emelyanov R.F. *Ustoychivost obolochek iz armirovannykh materialov* [Stability of shells made of reinforced materials.]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1978. 211 p. (In Russ.).
- [7] Bakulin V.N., Gusev E.L., Markov V.G. *Optimalnoe proektirovanie konstruksiy iz kompozitsionnykh i traditsionnykh materialov* [Optimal design of structures made of composite and traditional materials]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2008. 250 p. (In Russ.).
- [8] Karmishin A.V., Lyaskovets V.A., Myachenkov V.I. et al. *Statika i dinamika obolocheknykh konstruksiy* [Statics and dynamics of shell structures]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975. 375 p. (In Russ.).
- [9] Gumerova Kh.S. Stability of an orthotropic ellipsoidal shell in a variable temperature field. *Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta*, 2013, vol. 16, no. 20, pp. 69–70. (In Russ.).
- [10] Dmitriev V.G. Numerical analysis of features of elastic-plastic deformation of non-homogeneous shells of revolution in the region of large displacements and angles of rotation. *Uchenye zapiski TsAGI*, 2023, vol. 54, no. 1, s. 76–88. (In Russ.).
- [11] Bakulin V.N., Volkov E.N., Simonov A.I. Dynamic stability of a cylindrical shell under alternating axial external pressure. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Aviatcionnaya tekhnika*, 2017, no. 4, pp. 28–32. (In Russ.). (Eng. version: *Russ. Aeronaut.*, 2017, vol. 60, no. 4, pp. 508–513, doi: <https://doi.org/10.3103/S1068799817040055>)
- [12] Boyko D.V., Zheleznov L.P., Kabanov V.V. Study of nonlinear deformation and stability of reinforced shells under combined loading by a bending moment and a transverse boundary force. *Izvestiya RAN. MTT*, 2011, no. 5, pp. 130–136. (In Russ.). (Eng. version: *Mech. Solids*, 2011, vol. 46, no. 5, pp. 766–771, doi: <https://doi.org/10.3103/S0025654411050104>)
- [13] Zheleznov L.P., Kabanov V.V. Nonlinear deformation and stability of noncircular cylindrical shells under internal pressure and axial compression. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 2002, vol. 43, no. 4, pp. 155–160. (In Russ.). (Eng. version: *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2002, vol. 43, no. 4, pp. 617–621, doi: <https://doi.org/10.1023/A:1016066001346>)
- [14] Zheleznov L.P., Kabanov V.V. Algorithm for studying the nonlinear deformation and stability of circular cylindrical shells with initial shape flaws. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 1989, no. 4, pp. 143–148. (In Russ.). (Eng. version: *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1989, vol. 30, no. 4, pp. 645–650, doi: <https://doi.org/10.1007/BF00851110>)
- [15] Postnov V.A., Kharkhurim I.Ya. *Metod konechnykh elementov v raschetakh sudovykh konstruksiy* [Finite element method in calculations of ship structures]. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1974. 341 p. (In Russ.).

- [16] Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsionalnyy analiz v normirovannykh prostranstvakh* [Functional analysis in normed spaces]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959. 684 p. (In Russ.).
- [17] Wilkinson J.H., Reinsch C. *Linear algebra*. Springer, 1971. 441 p. (Russ. ed.: *Spravochnik algoritmov na yazyke Algol. Lineynaya algebra*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1976. 390 p.)
- [18] Kabanov V.V. *Ustoychivost neodnorodnykh tsilindricheskikh obolochek* [Stability of inhomogeneous cylindrical shells]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1982. 253 p. (In Russ.).

Статья поступила в редакцию 07.12.2025

Информация об авторе

ЖЕЛЕЗНОВ Лев Петрович — доктор технических наук, профессор кафедры «Информационные технологии транспорта». ФГБОУ ВО «Сибирский государственный университет путей сообщения»; старший научный сотрудник, заместитель начальника отделения усталостной и статической прочности, начальник аспирантуры. ФАУ «Сибирский научно-исследовательский институт авиации имени С.А. Чаплыгина» (630051, Новосибирск, Российская Федерация, ул. Ползунова, д. 21, e-mail: Zgeleznov@sibnia.ru).

Information about the author

ZHELEZNOV Lev Petrovich — Doctor of Science (Eng.), Professor, Department of Information Technology and Telecommunications. Siberian Transport University; Senior Researcher, Deputy Head of the Department of Fatigue and Static Strength, Head of the Postgraduate Department. Chaplygin Siberian Scientific Research Institute of Aviation (630051, Novosibirsk, Russian Federation, Polzunova St., Bldg. 21, e-mail: Zgeleznov@sibnia.ru).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Железнов Л.П. Устойчивость подкрепленной некруговой цилиндрической оболочки при комбинированном нагружении изгибающим моментом и краевой поперечной силой. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2026, № 10, с. 124–136.

Please cite this article in English as:

Zheleznov L.P. Stability of a reinforced non-circular cylindrical shell under combined bending moment and marginal transverse force. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2026, no. 10, pp. 124–136.



**Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
предлагает читателям учебное пособие**

«Сборка изделий»

Авторы: Ю.В. Баданина, А.И. Долгих, А.Л. Галиновский

Рассмотрена технология сборки изделий ракетно-космической техники, описаны методы базирования и сборки отдельных узлов, агрегатов и ракетно-космических систем в целом. Приведены примеры процессов сборки герметичных и негерметичных агрегатов, отсеков сложной конфигурации.

Для студентов и аспирантов, обучающихся по направлениям подготовки 24.05.01 «Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов» (уровень специалитет), 24.04.01 «Ракетные комплексы и космонавтика» (уровень магистратуры), а также для инженеров, работающих в области проектирования и создания ракетно-космической техники.

По вопросам приобретения обращайтесь:

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
Тел.: +7 499 263-60-45, факс: +7 499 261-45-97;
press@bmstu.ru; <https://press.bmstu.ru>